Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2011/2012

Úloha č. 1: *Mojovi sa pod posteľou váľa 6 šimpanzov. Každý šimpanz má štyri farbičky. Vieme, že dokopy majú 6 červených, 6 modrých, 6 zelených a 6 fialových farbičiek. Najmenej koľko šimpanzov musí Mojo vytiahnuť spod postele, aby mal istotu*[1]*, že budú mať spolu aspoň jednu farbičku z každej farby?*

Riešenie: (opravovala Katka J.)

Keď Mojo vytiahne spod postele prvého šimpanza, môžu sa stať dve veci. Ak má šťastie, hneď prvý šimpanz je zásobený všetkými štyrmi farbami. Ako však všetci vieme, Mojo je známy smoliar, a tak musíme uvažovať tú najhoršiu možnosť. Budeme postupovať nasledovne: najprv nájdeme možnosť, ktorá sa nám zdá najhoršia a potom ukážeme, že horšia neexistuje.

Predstavme si, že hneď prvý šimpanz má všetky farbičky rovnakej farby, napríklad zelené. Mojovi potom nezostáva nič iné, iba vyťahovať spod postele ďalšie opice. Po chvíli premýšľania nám ľahko môže napadnúť situácia, pri ktorej treba vytiahnuť až päť šimpanzov, aby Mojo dostal všetky farby. Opice môžu mať farby rozdelené napríklad takto: prvá opica — štyri zelené, druhá opica — dve zelené a dve modré, tretia opica — štyri modré, štvrtá opica — štyri fialové, piata opica — dve fialové a dve červené. Z tohto príkladu vidno, že existuje také nevýhodné rozdelenie farbičiek, pri ktorom Mojo musí vytiahnuť päť opíc, aby mal všetky farby.

Ešte nám zostalo dokázať, že Mojovi *vždy* stačí vytiahnuť päť opíc, a že teda väčšiu smolu už mať nemôže. Päť opíc má spolu dvadsať farbičiek. Keďže z každej farby máme šesť farbičiek, v dvadsiatich kusoch musia byť určite zastúpené všetky farby. Hotovo! Podarilo sa nám ukázať, že päť šimpanzov je akurát dosť.

Úloha č. 2: *Ježibaba Algebrinda si hundre prirodzené čísla. Prvé si vždy zahundre číslo N, a ďalej si vždy pomyslí jedného deliteľa posledného zahundraného čísla, odčíta alebo pričíta ho k nemu a výsledok zahundre. Zistite, pre ktoré N si môže zahundrať aj jej obľúbené číslo 647, ak číslo 1 nikdy nepričíta ani neodčíta.*

Riešenie: (opravovali Betka a Kozzy)

V prvom rade treba správne pochopiť, čo je vlastne našou úlohou. Chceme nájsť všetky také N, s ktorými keď ježibaba začne, môže v niektorom, nie ale nutne hneď v druhom kroku zahundrať číslo 647.

Ak má v niektorom kroku zahundrané číslo $a \cdot b$, v ďalšom kroku si môže zvoliť za deliteľa číslo b a zahundrať $(a+1) \cdot b$, alebo aj $(a-1) \cdot b$, ak a nebolo 1. Potom môže znova za deliteľa zvoliť b a po nejakom počte krokov sa takto môže prehundrať k ľubovoľnému násobku čísla b.

Na začiatku má číslo $1 \cdot N$. Podľa predošlého si určite dokáže zahundrať číslo $647 \cdot N$. Toto číslo sa dá zapísať aj ako $N \cdot 647$ a ježibaba sa z neho chce dohundrať k číslu $1 \cdot 647$, čo sa jej určite podarí. Problém nastane len v prípade, že prvé zahundrané číslo bolo 1, vtedy nemôže pri splnení podmienky v zadaní zahundrať už žiadne iné číslo.

Podarí sa jej to teda pre všetky prirodzené čísla N okrem jednotky.

Úloha č. 3: *N škriatkov s podbradníkmi očíslovanými číslami $1, \ldots, N$ si sadlo okolo okrúhleho stola. Každý škriatok si chce sadnúť tak, aby škriatkovia vedľa neho mali buď obaja vyššie číslo na podbradníku, alebo obaja nižšie, inak by totiž nedostal obed. Zistite, pre ktoré N sa môžu škriatkovia usadiť tak, že sa všetci najedia.*

Riešenie: (opravoval JeFo)

Po troche skúšania na menších hodnotách nadobudneme dojem, že pre párne čísla to ide a pre nepárne to nejde. Teraz nám už ostáva len podporiť naše očakávanie poriadnym dôkazom.

Povedzme si, že škriatka medzi dvoma škriatkami s menším číslom ofarbíme na modro a škriatka medzi medzi dvoma škriatkami s väčším číslom ofarbíme na žlto. Teraz je jasné, že ak sa majú najesť všetci škriatkovia, tak každý škriatok musí byť ofarbený jednou farbou. Naviac musí sedieť žltý škriatok medzi dvoma modrými a modrý medzi dvoma žltými. Teda modrý a žltý škriatkovia sa musia pri stole striedať. Teraz je jasné, že škriatkov musí byť párny počet (premyslite si to).

Ostáva ešte ukázať, že to vieme spraviť pre párny počet trpaslíkov. Stačí, keď si trpaslíkov rozdelíme na polovice tak, aby v prvej skupine boli tí, čo majú číslo väčšie ako je polovica N a v druhej ostatní (menšie alebo rovné

[1]Mojo nevidí, aké majú šimpanzy farbičky.

ako polovica N). Teraz budeme trpaslíkov ukladať okolo stola postupne, najskôr jedného z prvej skupiny, potom jedného z druhej skupiny a opäť jedného z prvej skupiny atď. Teraz naozaj pre ľubovoľného trpaslíka platí, že jeho susedia majú buď väčšie, alebo menšie číslo, lebo obaja sú z „druhej polovice čísel“.

Úloha č. 4: *Grécky boh vysokých dôchodkov si v čase núdze kráti čas čmáraním čísel po tabuli. Na začiatku má na tabuli napísané reálne čísla 1, x, y. Na tabuľu vie ešte pripísať súčet alebo rozdiel ľubovoľných dvoch čísel z tabule alebo prevrátenú hodnotu nenulového čísla z tabule.*[2] *Zistite, či môže takýmto spôsobom na tabuľu napísať číslo:*

a) x^2,

b) xy.

Riešenie: (opravovali Linda a Mary)
Isteže môže. Pozrime sa na to, ako:

a) Začneme tým, že napíšeme čísla $x+1$ a $x-1$, prevrátime ich a odčítame:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}.$$

Teraz tento zlomok dvakrát prevrátime a obe vzniknuté čísla sčítame:

$$\frac{x^2-1}{2}+\frac{x^2-1}{2}=x^2-1.$$

Vidíme, že už stačí iba pričítať jednotku a sme v cieli.

b) V časti a) sme z x nejakou postupnosťou krokov dostali x^2. Inými slovami, podarilo sa nám z povolených operácií vytvoriť umocňovanie. Nič nám ale nebráni v tom, aby sme tento postup aplikovali na iné číslo a nám sa hodí $x+y$ (ktoré na tabuľu vieme napísať). Získame tak $(x+y)^2$, čo je $x^2+2xy+y^2$. Chceme osamostatniť stredný člen, takže od tohto výrazu odčítame x^2 aj y^2 (ktoré po a)-čku už vieme napísať). Máme $2xy$, ale my by sme boli šťastnejší, keby tam tá dvojka nebola. Neostáva nám teda nič iné ako dvakrát napísať prevrátenú hodnotu a sčítať:

$$\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{2}{2xy}=\frac{1}{xy}.$$

Ajhľa, to vyzerá, že výsledok stačí prevrátiť a dostaneme xy. (A tí mudrejší z nás vedia, že to tak nielen vyzerá, ale naozaj to tak je.)

Už sme hotoví? Nie celkom, náš postup robí nepekné veci pre niektoré hodnoty x a y, konkrétne delíme nulou pre x, y rovné 1, -1 alebo 0. Keďže my matematici neradi delíme nulou, tieto prípady treba ošetriť zvlášť. To už však necháme na dobrú vôľu čitateľa a vyhlásime riešenie za kompletné.

Úloha č. 5: *Paľa hryzie svedomie, lebo nevyriešil domácu úlohu:*

a) Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že n^2+n+14 je druhá mocnina prirodzeného čísla.

b) Pre ktoré prirodzené čísla k existuje aspoň jedno prirodzené číslo n také, že n^2+n+k je druhá mocnina prirodzeného čísla?

Pomôžte mu, nech ho svedomie nezje.

Riešenie: (opravovala Katka :P)
Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Prvý a asi najpriamočiarejší je pozerať sa na úlohu ako na riešenie obyčajnej kvadratickej rovnice.

a) Máme nájsť všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je n^2+n+14 druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla. Toto číslo si označíme x. Potom má platiť, že

$$n^2+n+14=x^2. \tag{1}$$

Trochu si to upravíme a dostaneme klasickú kvadratickú rovnicu s nulovou pravou stranou

$$n^2+n+(14-x^2)=0,$$

[2] Môže sa stať, že na tabuli bude viackrát rovnaké číslo.

ktorú vieme vyriešiť pomocou diskriminantu. Ten bude rovný $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (14 - x^2)$. Keďže riešenie n, ktoré hľadáme, musí byť prirodzené číslo, musí aj odmocnina z diskriminantu byť prirodzené číslo. Z toho vyplýva, že samotný diskriminant má byť druhou mocninou prirodzeného čísla. Označme toto číslo y. Dostaneme vzťah

$$1 - 4 \cdot (14 - x^2) = y^2,$$

ktorý si trochu upravíme:

$$\begin{aligned} 1 - 56 + 4x^2 - y^2 &= 0 \\ 4x^2 - y^2 &= 55 \\ (2x - y)(2x + y) &= 55. \end{aligned}$$

Dostali sme súčin dvoch celých čísel $(2x - y)$ a $(2x + y)$, ktorý je rovný 55. Vieme, že obe sú celé čísla (lebo x a y sú prirodzené) a $(2x + y)$ je určite kladné. Navyše platí, že $(2x - y) < (2x + y)$. Číslo 55 možno rozložiť na súčin dvoch celých čísel tak, aby (aspoň) jedno z nich bolo kladné, len dvoma spôsobmi: ako $5 \cdot 11$ alebo $1 \cdot 55$. Tieto dve situácie si rozoberieme.

1. možnosť:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 2x + y &= 11. \end{aligned}$$

Ak vyriešime túto sústavu rovníc, dostaneme, že $(x, y) = (4, 3)$. Dosadením $x = 4$ do vzťahu (1) dostaneme rovnicu

$$n^2 + n - 2 = 0,$$

ktorá má riešenia $n_1 = 1$ a $n_2 = -2$. Keďže hľadáme prirodzené riešenie, vyhovuje iba $n = 1$.

2. možnosť:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 2x + y &= 55. \end{aligned}$$

Riešenie tejto sústavy rovníc je $(x, y) = (14, 27)$. Dosadením do (1) dostaneme

$$n^2 + n - 182 = 0,$$

ktorá má riešenia $n_1 = 13$ a $n_2 = -14$. Opäť nás zaujíma len kladné riešenie $n = 13$.

V úlohách ako je táto nestačí len nájsť nejaké riešenia, treba aj dokázať, že už žiadne iné neexistujú. Tento postup má obrovskú výhodu, pretože dôkaz toho, že iné riešenia (vyhovujúce n) už nie sú, vyplýva priamo zo spôsobu, ako sme ich našli.

b) V tejto časti si treba dať pozor na zadanie. Pýtame sa, pre ktoré k existuje aspoň jedno n, ktoré spĺňa podmienku. Riešením bude preto množina takýchto čísel k. Netreba hľadať *všetky* n pre dané k, stačí nájsť tie k, pre ktoré existuje *aspoň jedno.*
Veľká väčšina z vás si všimla, že výraz zo zadania si vieme napísať ako $n \cdot (n + 1) + k$. Otázkou teda je, aké môže byť k, aby sa tento výraz dal upraviť na druhú mocninu prirodzeného čísla.
Ako prvá možnosť nám udrie do očí možné $k = n + 1$. Po dosadení dostaneme $n \cdot (n + 1) + (n + 1) = (n + 1) \cdot (n + 1) = (n + 1)^2$. Zistili sme, že k danému k vieme dopočítať vhodné n v tvare $n = k - 1$. Keďže najmenšie prirodzené číslo je 1, najmenšie k, pre ktoré môžeme použiť túto metódu, je rovné 2. Pre $k \geq 2$ teda určite existuje také prirodzené číslo n, že výraz $n^2 + n + k$ je druhou mocninou prirodzeného čísla a toto n získame ako $k - 1$.
Tu mnohí z vás skončili a stratili preto bod. Podarilo sa vám síce nájsť spôsob, ako vypočítať vyhovujúce n pre $k \geq 2$, no to, že pre $k = 1$ to takto nejde, neznamená, že to *nejde vôbec.* Už tušíme, že to nepôjde, no musíme to dokázať. Toto nie je ťažké a preto to nechám na vás. Našepkám vám toľko, že sa stačí pozrieť na rozdiel dvoch po sebe idúcich druhých mocnín prirodzených čísel: $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

<u>Iné riešenie:</u>
Nedá mi neukázať aj iné, veľmi elegantné riešenie prvej časti úlohy. Spočíva v tom, že si ohraničíme množinu možných x, pre ktoré môže byť $n^2 + n + 14$ štvorcom čísla x. Na prvý pohľad je jasné, že $n^2 + n + 14 > n^2$, pretože na ľavej strane máme navyše kladný člen $n + 14$. Teda dolné ohraničenie je $x > n$. Ľahko dokážeme, že $n^2 + n + 14 < (n + 4)^2$, z čoho dostaneme, že $x < n + 4$. Keďže sa pohybujeme v prirodzených číslach, možné hodnoty x sú teda $n + 1$, $n + 2$ a $n + 3$. Ak si tieto dosadíme do (1), dostaneme dve vyhovujúce n, a to 1 a 13.

<u>Úloha č. 6:</u> *Najväčší nepárny deliteľ prirodzeného čísla k nazývame chvostík čísla k. Dokážte, že súčet chvostíkov prirodzených čísel $n + 1$, $n + 2$, …, $2n$ je rovný n^2.*

Riešenie: (opravovali Kubo a Mojo)
Ako to už často býva, keď je v zadaní n, treba ako prvé skúsiť matematickú indukciu[3] a väčšinou to tak pôjde. Tento príklad nie je výnimkou. Pozrime sa na nejaké malé prípady.
Pre $n = 1$: Číslo 2 má chvostík 1. A to je naozaj 1^2.
Pre $n = 2$: Číslo 3 má chvostík 3, číslo 4 má chvostík 1. Spolu to je 4, čo je naozaj 2^2.
Tu si už môžeme všimnúť, že každé nepárne číslo je svojim vlastným chvostíkom, pretože žiadny väčší deliteľ čísla ako ono samo neexistuje. Zaujímavé je, že pri našom postupe nepotrebujeme celkom vedieť, ako to bude s párnymi číslami. Stačí si len všimnúť, že čísla n, a $2n$ majú rovnaké chvostíky. Ich prvočíselné rozklady sú totiž rovnaké, až na jednu dvojku navyše. Teda každý nepárny deliteľ jednoho čísla je zároveň aj deliteľom druhého čísla.
Vyzbrojení touto vedomosťou sa môžeme pustiť do druhého indukčného kroku. Označme si $S(k)$ súčet chvostíkov čísel $k + 1$, $k + 2$, $\ldots$, $2k$. Ďalej nech $ch(k)$ je chvostík čísla k.
Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n, čiže $S(n) = n^2$. Dokážme, že tvrdenie platí aj pre $n + 1$. Z čísel, ktorých chvostíky spočítavame, ubudne $n + 1$, a pribudne $2n + 1$ a $2n + 2$. Čiže máme rovnosť

$$S(n + 1) = S(n) - ch(n + 1) + ch(2n + 1) + ch(2n + 2).$$

Čísla $n + 1$ a $2n + 2$ majú rovnaký chvostík, a teda nijako celkový súčet nezmenia. Zmení ho ale číslo $2n + 1$. Toto číslo je nepárne, a teda pri prechode od n ku $n + 1$ sa súčet chvostíkov zväčší o $2n + 1$. Teda súčet chvostíkov je $S(n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, čo sme mali dokázať.

Úloha č. 7: *Pre reálne čísla a, b, c má rovnica $ax^2+bx+c = 0$ dva rôzne reálne korene p_1, p_2 a rovnica $cx^2+bx+a = 0$ dva rôzne reálne korene q_1, q_2. Čísla p_1, q_1, p_2, q_2 tvoria v takomto poradí aritmetickú postupnosť. Dokážte, že $a + c = 0$.*
Riešenie: (opravoval Hago)
Niektorí riešitelia dospeli v priebehu riešenia k záveru, že taká trojica a, b, c nemôže existovať a po prvom prečítaní zadania som bol aj ja ohľadom tohto faktu skeptický. Preto som sa rozhodol, že hneď takto zozačiatku uvediem trojicu

$$a = 3, \qquad b = 2\sqrt{3}, \qquad c = -3.$$

Táto trojica spĺňa podmienky zadania a platí aj to, čo máme dokázať, že $a + c = 0$.
Teraz sa už bez strachu môžeme pustiť do dokazovania. Začneme niekoľkými jednoduchými pozorovaniami:

- Keďže korene tvoria aritmetickú postupnosť, vieme niečo o vzdialenostiach medzi nimi (o ich rozdieloch). Napríklad aj to, že vzdialenosť medzi p_1 a p_2 je rovnaká ako vzdialenosť medzi q_1 a q_2, a obe sú rovné dvojnásobku diferencie tej aritmetickej postupnosti.
- Na druhej strane o vzdialenosti medzi koreňmi jednej kvadratickej rovnice vieme niečo aj zo vzorca na ich výpočet, ktorý snáď pozná každý z vás. Pre kvadratickú rovnicu s diskriminantom D a vedúcim koeficientom v vyjde táto vzdialenosť
$$\left|\frac{\sqrt{D}}{v}\right|.$$
- Obe kvadratické rovnice majú rovnaký diskriminant, označme ho D. Keďže majú obe rovnice dve rôzne riešenia, tak $D > 0$. (Vďaka tomuto poznatku vieme, že v budúcich úpravách môžeme deliť výrazom $\sqrt{D}$.)

Spojením pozorovaní dostaneme

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= |q_1 - q_2| \\ \left|\frac{\sqrt{D}}{a}\right| &= \left|\frac{\sqrt{D}}{c}\right| \\ |a| &= |c| \\ a &= \pm c. \end{aligned}$$

Takže buď naozaj $a + c = 0$, alebo $a = c$.
Ak by nastal druhý prípad, tak sú obe kvadratické rovnice rovnaké, čiže majú aj rovnaké korene. Máme rovnaké členy v aritmetickej postupnosti, čo znamená, že táto postupnosť je konštantná. Tu sa dostávame do sporu so zadaním v tom, že jednotlivé kvadratické rovnice majú mať dva rôzne korene.
Druhý prípad teda nemôže nastať, čím sme dokázali, čo sme dokázať mali.

Úloha č. 8: *Nájdite všetky celé čísla m a prirodzené čísla a, b také, že platí*

$$(a + b^2)(b + a^2) = 2^m.$$

[3] Tým, ktorí nevedia, čo to je matematická indukcia, odporúčame prečítať si vzorák úlohy č. 8, prvej zimnej série 2009/2010. Nájsť ho môžete na `http://www.kms.sk/docs/vzoraky/20092010/zim/seria1.pdf`.

Riešenie: (opravovali Paľo a Mario)
V našej úlohe treba nájsť riešenia rovnice. Keďže však vidíme, že neznáme v rovnici sú až tri, zatiaľ čo rovnica len jedna, mali by sme porozmýšľať aj nad inými informáciami, uvedenými v zadaní. Zadanie úlohy je však celkom stručné, všimneme si iba skutočnosti, že a, b majú byť prirodzené čísla a m celé. Teraz už máme zadanie poriadne prečítané a môžeme sa pustiť do riešenia.
Predpokladajme, že naozaj nejaká taká trojica čísel a, b, m existuje. Čo by pre ňu muselo platiť?
Obe zo zátvoriek naľavo sú určite rovné aspoň 2, čiže ich súčin, teda aj pravá strana je minimálne štyri. Z toho vyplýva že m je minimálne 2. Teda 2^m je určite párne číslo.
Preto môžeme smelo napísať:

$$a^2 + b = 2^p,$$
$$b^2 + a = 2^r,$$

pre prirodzené $p, r \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
BUNV, nech je $p \geq r$. Označme $s = p - r$. Teda platí:

$$a^2 + b = 2^{(r+s)},$$
$$b^2 + a = 2^r.$$

Teraz odčítame druhú rovnicu od prvej a upravíme na súčin:

$$a^2 - b^2 + b - a = 2^{(r+s)} - 2^r,$$
$$(a + b)(a - b) - (a - b) = 2^r(2^s - 1),$$
$$(a + b - 1)(a - b) = 2^r(2^s - 1).$$

Vidíme , že 2^r je určite párne číslo, čiže aj naľavo je tiež párne číslo. Preto musí byť aspoň jedna zátvorka na ľavej strane deliteľná dvomi. Ak by platilo $2|(a + b - 1)$, znamenalo by to, že práve jedno z a,b je nepárne. Potom by bol aj pôvodný výraz $(a^2 + b)(b^2 + a)$ nepárny, čo by bol spor s tým, že 2^m je párne.
Teda musí platiť, že $(a - b)$ je párne, potom je $(a + b - 1)$ nutne nepárne.
Ďalej nech $s \neq 0$, špeciálny prípad rovnosti vyriešime nakoniec. Z toho vyplýva že výraz na pravej strane je určite kladný, teda prirodzené číslo. Z rovnosti pravej a ľavej strany to bude rovnako platiť aj pre ľavú stranu, z čoho vyplýva $a \neq b$. Teraz si uvedomme, že v prvočíselnom rozklade pravej strany mám r dvojek. Teda týchto r dvojek musí byť aj v prvočíselnom rozklade ľavej strany. Keďže je však $(a + b - 1)$ číslo nepárne, jeho prvočíselný rozklad nemôže obsahovať žiadnu dvojku. Preto musí všetky obsahovať výraz $(a - b)$, z čoho dostávame $2^r|(a - b)$.
Z toho vyplýva, že $2^r \leq (a - b)$. Rozšírením o triviálne nerovnosti dostaneme:

$$a < b^2 + a = 2^r \leq (a - b) < a.$$

Z toho by malo platiť $a < a$, čo je spor, preto pre tento prípad riešenie neexistuje.
Zostáva už iba vyriešiť prípad $s = 0$. Potom by očividne platilo $(a + b - 1)(a - b) = 2^r(2^s - 1) = 0$.
Potom by platilo $(a + b - 1) = 0$ alebo $(a - b) = 0$. Z prvej podmienky by vyplývalo $a + b = 1$, čo nastať nemôže, keďže a, b sú prirodzené. Teda platí $a - b = 0$, z čoho vyplýva $a = b$. Dosadením do pôvodnej rovnice a následným upravením dostávame:
$a(a + 1)a(a + 1) = 2^m$.
Teraz si už len všimnime dôležitú vec: 2^m má delitele len čísla $1, 2, 4, \ldots, 2^m$. Po sebe idúce čísla $a, a+1$ sú očividne deliteľmi tohoto výrazu, jediné riešenie môže byť len $a = 1$ lebo $1, 2$ sú jediné po sebe idúce delitele čísla 2^m.
Zostáva už len overiť, či existuje celé číslo m také, že pre jediné možné hodnoty $a = b = 1$ nastáva uvedená rovnosť. Po dosadení s nadšením zisťujeme, že $m = 2$ vyhovuje našej rovnici. Jediným riešením rovnice je teda trojica $a = b = 1, m = 2$.

Úloha č. 9: *Marek našiel doma gramofónovú platňu, na ktorej je napísaná dvojica prirodzených čísel $(a,\ k)$. Keď sa táto platňa dostane do blízkosti všetkých prirodzených čísel, tak im začne skákať po hlavách. Najprv skočí na číslo a. Následne, keď sa nachádza na nejakom prirodzenom čísle n,[4] tak sa správa podľa pravidiel:*

i) Ak je n deliteľné piatimi, preskočí na $n/5$.

ii) Ak n nie je deliteľné piatimi, preskočí na $n + k$.

Takto sa to opakuje a platňa si skáče. Gramofónovú platňu nazveme pokazenou, *ak po istom čase začne dokola skákať po tej istej sekvencii čísel. Pre aké dvojice prirodzených čísel $(a,\ k)$ je Marekova platňa pokazená?*

[4] Najprv sa n rovná a.

Riešenie: (opravoval Škrečok)
Pozrime sa, čo sa stane s platňou na začiatku. Najprv skočí na číslo a. Ak je toto číslo deliteľné päťkou alebo nejakou jej vyššou mocninou, niekoľkokrát sa použije pravidlo i), až kým neskočí na číslo, ktoré nie je deliteľné piatimi. Následne sa použije pravidlo ii). Formálnejšie, nech $a = 5^b c$ (kde b je nezáporné celé a c je prirodzené číslo) a 5 nedelí c (c môže byť aj jedna). Platňa po b vydeleniach piatimi skočí na číslo c a potom na $c + k$ (vďaka $5 \nmid c$).
Ako si skoro všetci z vás všimli, ak je k deliteľné piatimi, po týchto úvodných krokoch, po ktorých platňa skočí z a na c ($5 \nmid c$) bude ďalej skákať len po číslach, ktoré dávajú rovnaký (nenulový) zvyšok po delení piatimi ako c, a teda už nikdy sa nepoužije pravidlo i). Skúsme opäť tieto myšlienky povedať formálnejšie: ak si k zapíšeme ako $k = 5l$ (kde l je prirodzené číslo), platňa sa po s skokoch dostane z c na $c + k \cdot s = c + 5l \cdot s$, a keďže 5 nedelí c, nebude deliť ani $c + 5l \cdot s$. Z toho vyplýva, že pre ľubovoľné a a k deliteľné piatimi sa platňa nikdy nepokazí, bude až do nekonečna skákať po číslach v tvare $c + k \cdot s$.
To by sme mali, poďme sa pozrieť na opačný prípad, kedy k nebude deliteľné piatimi. Predpokladajme, že platňa skočí na prirodzené číslo n. Ako si mnoho z vás všimlo, ale menej z vás poriadne objasnilo, *najneskôr* po 4 použitiach pravidla ii) dostaneme číslo deliteľné piatimi. Totiž čísla n, $n + k$, $n + 2k$, $n + 3k$ a $n + 4k$ musia všetky navzájom dávať rôzne zvyšky po delení piatimi, a teda jedno z čísel musí dať zvyšok nula po delení piatimi. Dá sa to ľahko ukázať sporom, ak by nejaké z nich dávali rovnaký zvyšok po delení piatimi, napríklad $n + ik$ a $n + jk$ (kde i a j sú dve rôzne prirodzené čísla, $0 \le i, j \le 4$), ich rozdiel $(i - j)k$ by bol deliteľný piatimi, a teda muselo by platiť buď $5|i - j$ alebo $5|k$. To je spor, pretože pre takéto i, j nemôže platiť $5|i - j$ (premyslite si) a z predpokladu v úvode odstavca nemôže platiť ani $5|k$. Ukázali sme teda, že ak k nie je deliteľné piatimi a platňa skočí na prirodzené číslo n, najneskôr po 4 použitiach pravidla ii) dostaneme číslo deliteľné piatimi, a pri ďalšom skoku sa teda bude používať pravidlo i).
Rozlíšime teraz (samozrejme stále skúmame k, ktoré nie je deliteľné piatimi) dva prípady podľa čísla a, na ktorom sa platňa nachádza na začiatku.
Najprv nech $a \le k$, ukážeme, že v tomto prípade bude platňa určite pokazená. K číslu a najmenej nulakrát a nanajvýš štyrikrát pričítame k a následne použijeme pravidlo i), teda vzniknuté číslo vydelíme piatimi. *Najväčšie* číslo, na ktoré môže platňa skočiť po tomto vydelení piatimi je

$$\frac{a + 4k}{5},$$

lebo pre ostatné možné platia nerovnosti

$$\frac{a}{5} < \frac{a + k}{5} < \frac{a + 2k}{5} < \frac{a + 3k}{5} < \frac{a + 4k}{5}.$$

Avšak aj toto najväčšie možné číslo $(a + 4k)/5$ určite nepresiahne k, lebo nerovnosť $a \le k$ (ide vlastne o úvodný predpoklad) sa dá ekvivalentne upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} a &\le k \\ a + 4k &\le 5k \\ \frac{a + 4k}{5} &\le k \end{aligned}$$

Opakovaním tohto procesu najviac štvornásobného použitia pravidla ii) a následného použitia pravidla i) budeme vždy dostávať prirodzené čísla neprevyšujúce k. Bez toho, aby sa nám nejaké z nich zopakovalo, sa toto môže stať najviac k-krát. To ale znamená, že najneskôr po $k+1$ opakovaniach musí platňa skočiť na nejaké číslo, na ktorom už predtým bola. No a keďže nasledujúci skok platne je úplne určený iba číslom, na ktorom sa momentálne nachádza, toto celé čo sme zistili nám zaručuje, že sa platňa v prvom prípade $a \le k$ určite pokazí.
Teraz sa pozrime na druhý (a posledný) prípad, ktorý môže nastať, a to že a je väčšie ako k. Ukážeme, že platňa sa v tomto prípade musí niekedy dostať na číslo a', pre ktoré bude platiť $a' \le k$, čím úlohu prevedieme na predošlý prípad. Tým vlastne ukážeme, že platňa je pokazená aj pre $a > k$. Nerovnosť $a > k$ ekvivalentne upravíme:

$$\begin{aligned} a &> k \\ 5a &> a + 4k \\ a &> \frac{a + 4k}{5} \end{aligned}$$

V preklade do ľudskej reči: dostali sme, že po každom najviac štvornásobnom použití pravidla ii) a následnom použití pravidla i) sa číslo, na ktorom sa platňa nachádza, určite (ostro) zmenší. To sa však nemôže stať nekonečne veľa krát, raz sa platňa preto musí dostať na číslo a' neprevyšujúce k. Kedže ďalší skok platne je určený iba číslom, na ktorom momentálne je, toto a' stačí položiť ako a do predchádzajúceho prípadu.
Aby sme celé tieto riadky zhrnuli, platňa bude pokazená pre všetky dvojice prirodzených čísel (a, k), kde k nie je deliteľné piatimi (a môže byť ľubovoľné, od tohto chúďatka aj tak nič nezávisí).

Komentár: Hoci príklad hlavne skúsenejším riešiteľom nerobil veľké ťažkosti, množstvo riešení bolo skôr o intuícii typu „niečo nebude nikdy priveľké“ ako o poriadnom dôkaze. Treba si na to dať pozor, v tomto príklade bolo o dosť ľahšie nadobudnúť len tušenie ako toto tušenie exaktne overiť.

Úloha č. 10: *Kubo a Matúš zakopli o prirodzené číslo n, a tak sa rozhodli, že si zahrajú hru. V tejto hre budú striedavo písať jednu z číslic 0 alebo 1 na rolku toaleťáka. Každý napíše svoju číslicu hneď za poslednú súperovu. Prehráva hráč, ktorý napíše číslicu, po ktorej sa na toaleťáku objavia dve rovnaké n-tice za sebou idúcich číslic.*[5] *Ukážte, že:*

a) Hra vždy skončí.

b) Ak začína Kubo a n je nepárne, tak Matúš dokáže vyhrať, aj keby Kubo hral najlepšie ako dokáže.

Riešenie: (opravoval Matúš)
a) Hra určite skončí, lebo všetkých n-tíc zložených len z núl a jednotiek je len konečne veľa (2^n) a počnúc napísaním n-tého čísla na toaleťák sa v každom ďalšom ťahu vytvorí nová n-tica. Čiže najneskôr po $2^n + n$ ťahoch hra skončí, lebo tam bude o jednu n-ticu viac ako počet všetkých (čiže aspoň jedna sa musela zopakovať).

b) Matúš vyhrá ak bude vždy dávať opačné číslo ako napísal Kubo pred ním (opačné číslo k 0 je 1 a opačné k 1 je 0). Ešte pred tým ako si začneme niečo dokazovať, zaveďme si nejaké označenie. Hru budeme zapisovať ako postupnosť čísel

$$k_1,\ m_1,\ k_2,\ m_2,\ k_3,\ m_3, \ldots,\ k_r,\ m_r,$$

kde jednotlivé členy znázorňujú čísla zapísané na toaleťáku (k_i označuje Kubov i-ty ťah a m_j označuje Matúšov j-ty ťah). Ďalej nech l je také celé číslo, že $n = 2l + 1$ (lebo sa hráme len s nepárnymi n).
Už vieme, že hra skončí teda niekto z nich musí prehrať. Dokážeme, že Matúš nemôže prehrať ak sa drží svojej stratégie, teda musí vyhrať. Pre spor predpokladajme, že Matúš prehral. To znamená, že napísal posledný znak n-tice, ktorá sa zopakovala, nech je tento znak m_{r+l}. Rovnaká n-tica tam musela byť už skôr a mohol ju ukončiť Matúš alebo Kubo (t. j. má posledný znak na párnej alebo nepárnej pozícii).

- Ak prvý výskyt dokončil Matúš, tak oba výskyty zopakovanej n-tice Matúš začal aj skončil (lebo n je nepárne). Lenže na to, aby Matúš dal rovnaké prvé znaky prehrávajúcich n-tíc — nech sú to m_p a m_r, musel Kubo dať rovnaké tie im predchádzajúce čísla (k_p a k_r), lebo Matúš dáva vždy opačný znak od posledného Kubovho. Takže ak sú rovnaké n-tice
$$m_p,\ k_{p+1},\ m_{p+1}, \ldots,\ m_{p+l},$$
$$m_r,\ k_{r+1},\ m_{r+1}, \ldots,\ m_{r+l},$$
tak sa musia rovnať aj tie, ktoré začínajú o znak skôr. Čiže Matúš nemohol takto prehrať, lebo Kubo by prehral už v predošlom ťahu.

- Ak prvý výskyt dokončil Kubo, tak tú n-ticu aj začal (nech je ten prvý znak k_p). Takže rovnaké sú n-tice
$$k_p,\ m_p\ \ ,\ k_{p+1}, \ldots,\ k_{p+l},$$
$$m_r,\ k_{r+1},\ m_{r+1}, \ldots,\ m_{r+l},$$
lenže vieme, že členy s rovnakým indexom sú opačné čísla. Preto keďže $m_p = k_{r+1}$ tak sa rovnajú aj k nim opačné čísla $k_p = m_{r+1}$, lenže z rovnosti postupností $m_{r+1} = k_{p+1}$, takže $k_p = k_{p+1}$. Podobne dostaneme celý rad rovností
$$k_p = k_{p+1} = k_{p+2} = \cdots = k_{p+l}.$$
Bez ujmy na všeobecnosti nech je $k_p = 1$ (inak zmeníme všetky čísla na opačné). Postupnosť, ktorá sa zopakovala musela byť $1, 0, 1, 0, \ldots, 1$. Lenže potom sa musela zopakovať postupnosť $0, 1, 0, 1, \ldots, 0$ už o ťah skôr, konkrétne n-tice
$$m_{p-1},\ k_p\ \ ,\ m_p\ \ , \ldots,\ k_{p+l-1},$$
$$k_{r+1},\ m_{r+1},\ k_{r+2}, \ldots,\ m_{r+l+1},$$
sú obe $0, 1, 0, 1, \ldots, 0$ (Overte si, že je to tak!). Preto ani v tomto prípade Matúš nemohol prehrať.

Úloha č. 11: *Na šachovnici 8×8 nazývame dve políčka* dotýkajúce sa*, ak spolu susedia stranou alebo rohom. Určte, či dokáže šachový kráľ prejsť celú šachovnicu tak, že začína na nejakom políčku, a počnúc od druhého ťahu sa vždy pohne na políčko dotýkajúce sa s párnym počtom už navštívených políčok.*

[5] Tieto n-tice sa môžu prekrývať, avšak nie v celej svojej dĺžke.

Riešenie: (opravoval Cédéčko)
V zadaní tohto príkladu nebolo jednoznačne napísané, či kráľ má ísť na každé políčko „práve raz“ alebo „aspoň raz“. V pôvodnom zadaní malo byť „práve raz“, príklad s variantou „aspoň raz“ ide vyriešiť rovnako, je však komplikovanejší, pretože je viac možností.
Tento príklad ste riešili dvoma spôsobmi, ale len jeden z nich viedol k riešeniu. Prvý spôsob spočíval v rozoberaní všetkých možností, aké mohli byť posledné ťahy kráľa. Tento spôsob je zlý už len preto, že na presné rozobratie možností treba aspoň 20 A4-riek, kde urobíte veľa chýb a nepresností. Malo by vás vtedy napadnúť, že vedúci mali asi na mysli iný dôkaz. :)

Druhý spôsob si ukážeme inšpirovaný *Adelou Abaffyovou.*
Každé políčko šachovnice si predstavíme ako komnatu. Medzi každými dvoma dotýkajúcimi sa komnatami si vyrobíme dvere. Na začiatku sú všetky dvere zatvorené. Povieme si, že vždy keď vojde kráľ do komnaty, otvorí všetky dvere do tých komnát, v ktorých už bol. Kľúčová myšlienka je nasledovná: Potom čo kráľ prejde celý svoj palác, budú všetky dvere otvorené (rozmyslite si :)). Zo zadania vieme, že v prvom ťahu kráľ otvorí jedny dvere a v každom ďalšom ťahu párny počet dverí. Z toho dostávame, že po každom ťahu je otvorených nepárny počet dverí. A teda špeciálne, po kráľovej prechádzke po celom paláci bude tiež nepárny počet otvorených dverí. Teraz nám už len stačí spočítať, koľko je v paláci dverí. Použitím stredovej alebo osovej súmernosti, alebo jednoduchých počtov môžeme zistiť, že dverí je párny počet. To je ale spor, a teda kráľ nemohol prejsť celú šachovnicu.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	3.	GAlej KE	8	9			9	9	9	9	9		45	135
2.	Lukáček Viktor	4.	GsvM PO	5	2			9	9	9	9	2		38	127
3.	Šimsa Štěpán	3.	Litoměřice ČR	6	6			9	9	9	9			36	120
4.	Horváth Samuel	2.	GPár NR	4	0	9	9	7	1	6				32	118
5.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	3	1			9	9	8		9		35	117
5.	Liu Zhen Ning Dávid	2.	Gamča BA	3	1		9	9	8	8	2			36	117
7.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	2	0		9	7	9	6	9			40	112
7.	Tóth Michal	4.	GJH BA	11	7			9	9	9	9			36	112
9.	Hanzely Filip	3.	GAP SB	8	4			4	5	8	2			19	106
10.	Kossaczká Marta	3.	Gamča BA	8	5			9	9	9	9			36	105
11.	Hlaváčik Matúš	3.	GAlej KE	6	2			9	9	7	9			34	104
12.	Stankovič Miroslav	2.	GPoš KE	5	4			7		7	9			23	103
13.	Psota Miroslav	2.	GHlin ZA	5	1		9	7	9	7	6	2		38	101
14.	Ficková Klára	4.	GPoš KE	6	3			9	9	9	9			36	97
15.	Greššák Jerguš	3.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9	7		8	2			35	96
15.	Koprda Pavol	4.	GAM TT	10	4			7	7	8	6	9		37	96
15.	Puza Marko	2.	GPoš KE	3	0	8	9	7						24	96
18.	Klembarová Barbora	4.	GKuk PP	10	4			7	9	4	2	1		23	95
18.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	2	1		8	9	9	4	2	0		32	95
20.	Kopf Michal	4.	Opava ČR	11	6				9	5	9			23	94
20.	Pokrývka Filip	2.	G Bánovce	5	1		9	9	3	8	2			31	94
20.	Prívozník Matej	2.	GJH BA	5	1		9	7	8	9	9			42	94
23.	Korbela Michal	2.	G Bánovce	5	1		6	4		6	9	9		34	93
23.	Smolík Milan	3.	GJH BA	5	0	7	9	5		1	2			24	93
23.	Trembecký Richard	3.	GAlej KE	3	0	8	9	7	9	7				40	93
26.	Semanišinová Denisa	3.	GAlej KE	5	0	8	9	7		8	2			34	92
27.	Galovičová Soňa	4.	GJH BA	11	8			7	9	8	3			27	90
28.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	4	1		9	9	9	2	2			31	89
29.	Cibulka Samuel	3.	GJH BA	6	0	7	8	7						22	88
29.	Matejovičová Tatiana	3.	Gamča BA	5	1		9	5	5	4				23	88
29.	Žídek Augustin	4.	Frýdlant ČR	11	5			4	9	9	2			24	88
32.	Gafurov Askar	3.	Gamča BA	5	1		9	5	9	7	3	1		33	86
32.	Šafin Jakub	3.	GPH MI	6	3									0	86

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**k**$_\beta$	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
32.	Šimková Ľudmila	2.	GPár NR	5	1		9		0	3	2			14	86
35.	Daniel Mark	2.	GPár NR	4	0	5	9	6						20	85
36.	Batmendijn Eduard	1.	CGsvM SL	3	0									0	84
37.	Hrivová Ivona	2.	GVO ZA	5	1		9	7	3	2	6			27	83
37.	Kováčová Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	8	9		2	2			29	83
37.	Svoboda Josef	3.	Frýdlant ČR	5	2				9	7				16	83
40.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	3	0	6	8	4		4				22	81
40.	Magurová Lucia	3.	GPoš KE	5	0	7	8	7						22	81
42.	Marečáková Barbora	4.	GKuk PP	11	5			9	1	4				14	80
43.	Bačinská Irena	2.	G Lipany	2	0	8	4	7						19	78
43.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	2	0									0	78
45.	Macko Vladimír	3.	GĽŠ ZV	6	3			4		5				9	76
46.	Kobák Michal	2.	Gamča BA	2	0	8	8	4			2			22	75
47.	Bahyl Jakub	3.	GVar ZA	3	0	8	6	9						23	74
48.	Mojžišová Karolína	2.	Gamča BA	5	1		9	9	1	1	2	1		22	70
49.	Horňák Marián	4.	GPár NR	10	9									0	69
49.	Jasenčáková Katarína	4.	GVO ZA	11	5			9	1	1				11	69
51.	Halajová Barbora	4.	GVO ZA	10	4			6	1	3				10	67
52.	Surovčík Juraj	3.	GPOH DK	7	2		9	4	2	3	2			20	66
53.	Krakovská Hana	2.	Gamča BA	5	1		9	4	1	0	2	1		17	65
54.	Ječmenová Andrea	2.	GVO ZA	5	1		9	9		3	2			23	64
55.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3	0	5	9	5		3				22	60
55.	Kurdelová Alžbeta	2.	ŠPMNDG BA	4	0	8	6		4			1		19	60
57.	Belanová Michaela	4.	ŠPMNDG BA	10	4			5	9	4				18	58
58.	Rapavý Martin	2.	GAlej KE	4	0									0	57
59.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2	0						9	9		18	54
59.	Magyarová Zuzana	2.	GBST LC	5	1		9	7	1					17	54
61.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	2	0	1	8	4						13	52
62.	Oravec Matej	1.	GVar ZA	1	0	8	9	1						18	48
63.	Benešová Katarína	3.	ŠPMNDG BA	7	2		9	9						18	45
64.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3	0	0	0	2						2	38
65.	Rabatin Branislav	4.	GJH BA	7	1									0	37
66.	Nociarová Jela	3.	GBST LC	6	1									0	35
66.	Šromeková Karolína	2.	GDT PP	5	0									0	35
68.	Šandalová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0	7								7	32
69.	Lipovský Mário	2.	GJH BA	4	0									0	30
70.	Iždinská Dominika	2.	GJH BA	4	0	4	1		2	2	2			11	29
71.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3	0		9		1	2				12	28
72.	Faguľová Kristína	4.	GPoš KE	10	4									0	24
72.	Hledík Michal	3.	GJH BA	6	2									0	24
74.	Komanová Kristína	3.	GAS BB	6	2									0	23
75.	Pellerová Daniela	3.	Gamča BA	8	3									0	22
76.	Kavický Dušan	3.	GJH BA	5	2									0	21
76.	Kmeťová Katarína	4.	Kilmallock IR	8	1									0	21
78.	Santer Martin	3.	GMH Trstená	6	0									0	18
78.	Vlček Andrej	4.	EvSŠ LM	7	2									0	18
80.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	2	0									0	17
81.	Koľveková Veronika	3.	GPoš KE	3	0									0	15
82.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3	0									0	9
82.	Hraška Peter	3.	Gamča BA	4	0									0	9
82.	Petrucha Jaroslav	3.	GMet BA	8	3									0	9
85.	Mikuš Peter	2.	GJAR PO	3	0									0	8
86.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	2		4	9		1	8	4		105
2.	Krakovská Ema	1.	Gamča BA	1	9	3	9		8		7		87
2.	Lâm Tuân Dûng	1.	GJH BA	2			9	1	8	9	4		87
4.	Ralbovský Peter	0.	ŠPMNDG BA	0	3	2	9	8					85
5.	Longa Marián	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9		9	9			75
6.	Murin Martin	1.	GJH BA	2		4	5		5		5		74
7.	Králik Matej	1.	GJH BA	2		4	9		5				69
8.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3			2		0	0	2		61
9.	Kobák Michal	2.	Gamča BA	2					8	8	4		60
10.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	3					6	8	4		56
10.	Rebro Marcel	2.	ŠPMNDG BA	2		4	9						56
12.	Palko Maximilián	2.	1SG BA	3			6						54
13.	Svitková Patricia	2.	GLN BA	3			9	6		8			52
14.	Liu Zhen Ning Dávid	2.	Gamča BA	3						9	9		49
15.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	2						9	7		48
16.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	2						8	9		45
17.	Vajner Elisabeth	1.	GLS BA	2		1	4		2	3			41
18.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3					5	9	5		37
19.	Veselá Simona	1.	GJH BA	1									33
20.	Pilňan Branislav	1.	GJH BA	1	9	4					7		29
21.	Ďurajková Hana	1.	GJH BA	1	0	9	4	8	7				28
22.	Žilková Alexandra	2.	ŠPMNDG BA	3			4		5	4			26
23.	Martinková Sandra	1.	GJH BA	1	0		4						25
24.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3						9			24
25.	Híveš Zdenko	2.	1SG BA	2									19
26.	Šteňová Júlia	1.	GJH BA	2									17
27.	Pazdera Tomáš	2.	SZS BA	2		3		6					9

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bafrnec Matúš	1.	GPár NR	1	9	9	6	1	8	4	4		103
2.	Kluvanec Roman	1.	GPár NR	1	9	9	5	1	8				97
3.	Prešinská Kristína	1.	GPár NR	2		9	9	1	8	1			93
4.	Bieliková Michaela	2.	GVMS	3			9	2	0	9	7		85
4.	Marčeková Katarína	1.	GPár NR	1	7	9	5			4			85
6.	Kováčová Mária	1.	GsvCM NR	1	9	3	6				1		82
7.	Mikulec Jaromír	1.	GsvJ NM	2		3	5	5	8				59
8.	Straková Valentína	2.	GVMS	3			6	2	1	7			57
9.	Madaj Pavel	1.	GVBN PD	1									45
9.	Mečiar Adam	1.	GVBN PD	1									45
11.	Hladká Barbora	1.	GPár NR	1									26
12.	Tóth Andrej	2.	GPár NR	3									19

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Nepšinská Silvia	1.	GJCh BR	2		9	9	3	9	2	1		92
2.	Santrová Michaela	1.	GMH Trstená	2		9	6			6			89
3.	Kňaze Adam	1.	GJCh BR	2		9	5	2	7	3	4		85
4.	Bahyl Jakub	3.	GVar ZA	3			5	8	8	6	9		83
4.	Oravec Matej	1.	GVar ZA	1		7	9	1	8	9	1		83
6.	Hošták Viliam	2.	GVar ZA	2		3	9		8				82
7.	Mores Martin	2.	GVar ZA	3			9		7		5		68

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
8.	Dráček František	1.	GŠkol PB	2		9	9		4	8	1		67
9.	Tomašec Samuel	2.	GVar ZA	3			9		7		4		63
10.	Barbora Dávid	1.	GFS Nová Baňa	1	9	3	9	2	0				60
10.	Labjaková Gabriela	1.	GMH Trstená	1	9	3		1	4		1		60
12.	Halamová Mária	1.	GVO ZA	2	7	3	9						56
13.	Rizman Daniel	2.	GVar ZA	3									33
14.	Šeligová Kristína	1.	GsvFA ZA	1									21
15.	Sučíková Katarína	-1.	ZŠ Čelovce	-1	9	2	2		4				17
16.	Dendis Tomáš	1.	BiG Sučany	1									5
17.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Puza Marko	2.	GPoš KE	3			9	8	8	9	7		100
2.	Ténai Alexander	1.	GPoš KE	1	2		9	8	5		9		93
3.	Ženčuchová Andrea	1.	GJAR PO	1	6	3	9		8				65
4.	Kurimská Mária	2.	GsvM PO	2									60
5.	Trembecký Richard	3.	GAlej KE	3					8	9	7		58
6.	Bačinská Irena	2.	G Lipany	2					8	4	7		43
7.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	2									41
8.	Batmendijn Eduard	1.	CGsvM SL	3									25
9.	Flóriánová Lucia	2.	GPoš KE	2									15
10.	Dudič Ján	3.	GPoš KE	3									14
10.	Jursa Ján	2.	GPoš KE	2			6	8					14
12.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	2									12
13.	Koľveková Veronika	3.	GPoš KE	3									10
14.	Mikuš Peter	2.	GJAR PO	3									7
15.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Štěpánek Martin	1.	Příbor ČR	2	6	3	6	1		4			65
2.	Žárský Jan	1.	Kopřivnice ČR	2		9	9						48
3.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	3							9		25