Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2011/2012

Úloha č. 1: *Ninja korytnačky Michelangelo, Donatello, Leonardo a Raphaelo si dali turnaj v jedení pizze. Súčet umiestnení Michelangela, Donatella a Leonarda bol* 6. *Súčet umiestnení Raphaela a Donatella bol tiež* 6. *Aké bolo poradie ninja korytnačiek, ak sa Donatello umiestnil lepšie ako Michelangelo a žiadni dvaja sa neumiestnili na rovnakom mieste?*

Riešenie: (opravovala Miška a Mojo)

Označme si umiestnenia jednotlivých korytnačiek M (Michelangelo), D (Donatello), L (Leonardo) a R (Raphaelo). Keďže korytnačky sú štyri a žiadne dve sa neumiestnili na rovnakom mieste, tak museli obsadiť prvé, druhé, tretie a štvrté miesto. Z toho dostávame rovnosť

$$M + D + L + R = 1 + 2 + 3 + 4 = 10. \tag{1}$$

Zo zadania vyplývajú vzťahy

$$\begin{aligned} M + D + L &= 6, \qquad &(2)\\ D + R &= 6, \qquad &(3)\\ D &< M. \qquad &(4) \end{aligned}$$

Ak od (1) odpočítame (2), dostaneme rovnosť

$$R = 4. \tag{5}$$

Z dosadenia (5) do (3) vyplýva $D = 2$. Keďže platí (4), tak nutne $M = 3$ (pretože 4. miesto je už obsadené). Pre L nám ostáva jediná možnosť, a to $L = 1$. Správnosť riešenia sa dá overiť skúškou.

Turnaj v jedení pizze teda dopadol nasledovne: vyhral Leonardo, druhý skončil Donatello, bronzovú priečku vybojoval Michelangelo a posledný bol Raphaelo.

Komentár: Úloha nebola ťažká, avšak niektorí z vás kroky v riešení dostatočne nevysvetlili a považovali ich za triviálne tvrdenia, ktoré sme v riešení požadovali ozrejmiť. Takýmto chybám by ste sa mali v budúcnosti vyhýbať, pretože sa nimi len zbytočne oberáte o body.

Úloha č. 2: *Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je deliteľný* 17 *a aj ciferný súčet čísla o jeden väčšieho je deliteľný* 17.

Riešenie: (opravovali Martina, Mary a JeFo)

Označme si hľadané číslo n a ciferný súčet čísla k označujme C_k. Vieme, že C_n je deliteľné 17. Ak posledná cifra n nie je 9, potom v čísle $n + 1$ bude na poslednej pozícii cifra o jeden väčšia, kým ostatné cifry ostanú nezmenené. Číslo $n + 1$ má teda ciferný súčet $C_n + 1$ a pretože C_n je deliteľné 17, $C_n + 1$ deliteľné 17 určite nebude. Z toho vyplýva, že na konci hľadaného n je aspoň jedna cifra 9.

Ak je na konci čísla n k-krát za sebou cifra 9 a pred nimi cifra $c \neq 9$, tak na konci čísla $n + 1$ bude k núl a pred nimi cifra $c + 1$. Ciferný súčet čísla $n + 1$ sa tak oproti n zmenší o $9k - 1$. (Toto platí aj v prípade, že všetky cifry čísla n sú 9. Rozmyslite si.) Môžeme si to zapísať takto:

$$C_n - C_{n+1} = 9k - 1.$$

Odtiaľ vyplýva, že ak je C_n deliteľné 17, tak C_{n+1} je deliteľné 17 tiež práve vtedy, keď je aj $9k - 1$ deliteľné 17. Najmenšie také k je 2. (Väčšie k neuvažujeme, lebo hľadáme najmenšie n s požadovanou vlastnosťou.) To znamená, že n sa končí dvoma deviatkami, čiže pre C_n platí $C_n \geq 18$. Najmenšie také C_n, deliteľné 17, je 34. Takýto ciferný súčet sa v trojcifernom čísle dosiahnuť nedá, lebo $C_{999} = 27 < 34$. Pre štvorciferné číslo sa to pre $k = 2$ dá dosiahnuť dvomi spôsobmi: 9799 a 8899. Nakoľko $8899 < 9799$, hľadané n je 8899.

Keďže požiadavky, ktoré sme kládli na n boli nielen nutné, ale aj postačujúce, nemusíme robiť skúšku správnosti.

Úloha č. 3: *Na jednom z políčok šachovnice 8×8 je kráľ. Marek a Paľo ním striedavo hýbu podľa štandardných pravidiel. Nemôžu ho ale posunúť na políčko, odkiaľ bol práve posunutý. Vyhrá ten, kto posunie kráľa na políčko, kde už niekedy predtým bol. Prvý je na ťahu Marek. Pre koho existuje víťazná stratégia*[1] *a v čom spočíva? Stratégiu popíšte pre ľubovoľnú východziu polohu kráľa.*

Riešenie: (opravovali Betka, Véronique a Katka J.)
Pri úlohách, kde treba hľadať víťaznú stratégiu, je často užitočné najprv si hru párkrát zahrať. Pritom si môžeme všimnúť niektoré zákonitosti, ktoré v hre platia a dajú sa využiť pre zostavenie výhernej stratégie pre niektorého z hráčov. V tejto hre existovalo viacero správnych postupov, ako popísať výhernú stratégiu, ukážeme si hlavne jeden z nich.
Podľa zadania treba uvažovať, že kráľ začína z ľubovoľnej pozície. Vieme, že počet políčok v riadku aj stĺpci je osem. Niektorí z Vás si všimli užitočnú vec — platí, že v riadku, v ktorom sa nachádza kráľ, zostane už len sedem voľných políčok. Od jedného okraja sa teda kráľ nachádza nepárny počet políčok a od druhého párny. Rovnako to platí aj pre stĺpce.
Predpokladáme, že Marek aj Paľo chcú vyhrať, takže budú ťahať najlepšie, ako sa v danej pozícii dá. Bez ohľadu na začiatočnú pozíciu kráľa na šachovnici, Marek môže urobiť pohyb najviac ôsmimi smermi. V skutočnosti však urobí len jeden z dvoch typov krokov, buď sa posunie rovno alebo diagonálne. Na rade je Paľo, ak ste si situáciu doteraz nenakreslili, je najvyšší čas. Keď vezmeme do úvahy predchádzajúci Marekov ťah, môžeme si všimnúť, že niektoré ťahy pre Paľa znamenajú okamžitú prehru. Ako ste si po chvíli skúšania asi všimli, dobrá stratégia je napríklad dotlačiť súpera k okraju, kde má menej možných ťahov a ľahšie prehrá. Môže to byť víťazná stratégia? Pozrime sa na to.
Už vieme, že pre hocijakú pozíciu kráľa má Marek na výber z dvoch typov ťahov — rovno alebo diagonálne. Ak chce dotlačiť Paľa k okraju, mal by sa hýbať rovno, pretože vtedy Paľo nemôže zmeniť smer pohybu — vie sa pohnúť diagonálne, ale nevie sa vrátiť. Túto situáciu je dobré si nakresliť a poriadne premyslieť. Platí to všeobecne pre každú polohu kráľa na šachovnici, to bolo treba spomenúť aj v riešení. Teraz si môžeme všimnúť, že v každom ďalšom ťahu sa vzdialenosť k okraju, ku ktorému Marek smeruje, skráti o jedna, to platí pre Marekove aj pre Paľove (vynútené) ťahy.
Zostáva ešte ukázať, že pri okraji je naozaj ľahké vyhrať. Predstavme si, že kráľ stojí na políčku vzdialenom o jedna od okraja. Výherná stratégia pre hráča na ťahu nie je zložitá. Z miesta, kde kráľ stojí, ho treba posunúť rovno. Druhý hráč má potom štyri možnosti ťahu, ale ako si môžeme všimnúť, všetky sú prehrávajúce. Už vieme, že víťaznou stratégiou je dostať sa na políčko pri okraji šachovnice. To sa dá formulovať aj tak, že vyhráva hráč, ktorý prinúti protihráča posunúť sa na políčko o jedna vzdialené od okraja tak, aby sa sám mohol dostať do výhernej pozície.
Z toho, čo sme si doteraz povedali, už nie je ťažké odvodiť, že výherná stratégia existuje pre Mareka. Práve Marek si totiž na začiatku môže vybrať, ku ktorému okraju chce Paľa dotlačiť. Môžete si vyskúšať, že ak má byť Paľo ten, čo skončí pri okraji na ťahu, Marek sa musí na začiatku vybrať smerom k tomu okraju, od ktorého je vzdialený nepárny počet políčok. Nezabudnime, že v každom ťahu sa vzdialenosť k okraju skracuje o jedna — v Marekovom prípade dobrovoľne a Paľo nemá na výber. Z toho vyplýva, že Paľovi prischnú riadky (alebo stĺpce), ktoré sú od cieľového okraja vzdialené vždy nepárny počet políčok, takže nevyhnutne skončí o jedna vzdialený od okraja a prehrá. Všimnite si, že bez ohľadu na to, kde kráľ stojí na začiatku, Paľo sa pri tejto stratégii nikdy nevie pohnúť na políčko pri okraji kolmo, a tak nikdy nedokáže vyhrať.

Komentár: Veľa z Vás si všimlo zaujímavé veci, ktoré platia pre ťahy Mareka a Paľa, ale viacerí ste nedotiahli do konca poriadne dôkazy. Napríklad ste často tvrdili, že najvýhodnejšie je pre oboch ísť stále rovno — ale prečo? V riešení bolo treba vysvetliť aj to, či vaša výherná stratégia funguje naozaj pre každé postavenie kráľa na šachovnici.

Úloha č. 4: *Nech $n = \overline{AB}$ je dvojciferné prirodzené číslo. Prirodzené číslo s je strýčkom čísla n, ak*

- *číslica na mieste jednotiek v čísle s je B,*
- *ostatné číslice v s sú nenulové a ich súčet je A.*

(Napríklad 31 *má strýčkov* 31, 121, 211 *a* 1111.*) Nájdite všetky n, ktoré delia všetkých svojich strýčkov.*

Riešenie: (opravovali Marek Š. a Zuska)
Ako prvé si uvedomíme, že existuje deväťdesiat možných dvojciferných prirodzených čísel n (od 10 do 99). Medzi nimi chceme nájsť tie, ktoré delia všetkých svojich strýčkov. Začneme číslami $n = 10$ až 19. Pre tieto čísla existuje iba jeden strýčko[2], samotné n, preto vyhovujú zadaniu.
Ľahkú časť máme z krku. Pre $n = 20$ až 99 si budeme musieť vymyslieť nejaký systém, podľa ktorého je možné z n odvodiť, ako vyzerajú jeho strýčkovia. Predstavme si každé n (ktoré je zároveň aj svojím najmenším strýčkom — nazvime ho s_1) ako číslo, ktoré má $A + 1$ cifier ($A - 1$ núl, cifru A a cifru B). Napríklad 31 napíšeme ako 0031. Ľubovoľného nového strýčka s_x vytvoríme z s_1 tak, že v jeho A-časti (A-časťou myslíme všetky cifry okrem poslednej, tá sa nemení) niekoľkokrát presunieme jednotku smerom doľava.

[1] Víťaznou stratégiou myslíme spôsob, ako má hráč hrať, aby vyhral bez ohľadu na to, ako hrá protihráč.
[2] Inak nazývaný aj strýc, manžel strynej, ten fúzatý ujo,... spisovných možností je veľa :)

Formálnejšie to môžeme zapísať tak, že si označíme cifry s_1 ako $X_A, \dots, X_2, X_1, B$ a v jednom kroku vždy zmenšíme hodnotu nejakého X_k o 1 a zároveň zvýšime hodnotu X_{k+1} o 1. Toto môžeme opakovať potrebný počet krát, pokým platí, že napravo od cifry inej ako nula sa nenachádza nula, teda že strýčko neobsahuje nuly. V akom poradí presne jednotky posúvame, nie je pre toto riešenie dôležité, preto to bližšie nešpecifikujeme. Je ale jasné, že druhý najmenší strýčko, číslo s_2, vznikne posunutím jednej jednotky z miesta desiatok na miesto stoviek. Z 0031 sa tak stane 0121. Teraz príde na rad finta, ktorú odhalíme až po chvíli skúšania a hrania sa s číslami. Ak má n deliť svojho strýčka s_x, musí deliť aj rozdiel $s_x - n$. Všimnime si, že hodnota tohto rozdielu je pre druhého najmenšieho strýčka s_2 a pre všetky n rovná 90:

$$s_2 - n = 100 \cdot 1 + 10 \cdot (A-1) + B - (10A + B) = 90.$$

Z toho vyplýva, že n, ktoré nedelia 90, nebudú deliť ani svojho druhého najmenšieho strýčka a môžeme ich vylúčiť. Pre zostávajúce čísla 30, 45 a 90 prácne overíme, či delia aj ostatných svojich strýčkov (a hľa — delia) a riešenie je úspešne ukončené, máme 9 bodov, hurá, poďme to osláviť.
Pre tých, ktorým toto nestačí, alebo sú značne leniví a toľko overovania sa im nepáči, však pokračujeme. Ukázať, že čísla 30, 45 a 90 delia všetkých svojich strýčkov je totiž možné aj bez dosadzovania jednotlivých možností. Každé presunutie jednotky zmení hodnotu vzniknutého strýčka oproti predchádzajúcemu o konkrétnu a veľmi podozrivú hodnotu tak, ako ukazuje nasledujúca schéma:

$$\begin{array}{cc|c|c|c|c|c|c|c}
 & \dots & X_{k+2} & X_{k+1}+1 & X_k - 1 & X_{k-1} & \dots & X_1 & B \\
- & \dots & X_{k+2} & X_{k+1} & X_k & X_{k-1} & \dots & X_1 & B \\
\hline
= & \dots & 0 & 0 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0.
\end{array}$$

Hodnota rozdielu dvoch takto po sebe vytvorených strýčkov sa teda rovná $9 \cdot 10^k = 90 \cdot 10^{k-1}$. Index k je prirodzené číslo, takže tento rozdiel je opäť násobok 90. Kľúčové je, že takto vieme vytvoriť ľubovoľného zo strýčkov. (Rozmyslite si, prečo). Opäť platí, že ak má n deliť svojho strýčka s_x, musí deliť aj rozdiel $s_x - n$. (A naopak, ak delí rozdiel, bude deliť aj strýčka.) Rovnako vieme všetkých strýčkov vytvoriť pripočítavaním násobkov 90 ku n, teda môžeme povedať, že $n \geq 20$ delí s_x práve vtedy, keď delí 90. Naše tri čísla toto tvrdenie spĺňajú, teda delia všetkých svojich strýčkov.

Komentár: Na záver ešte dodávame, že mnohí ste úlohu riešili viac brutálnou silou ako úvahou. Takéto riešenie síce môže byť správne, ale plný počet sme vám dali, len ak ste ho naozaj uviedli. Teda žiadne *Vyskúšal som a platí to, fakt.* Chceli sme vidieť, čo ste vyskúšali alebo aspoň vedieť, akým systémom ste presne skúšali. A úplne najradšej sme boli, ak ste šetrili papier a čas a radšej použili fintu fň.

Úloha č. 5: *Obdĺžnik nazývame štvorčekový, ak sa dá rozrezať na dva alebo viac štvorcov s celočíselnými dĺžkami strán tak, že najmenší z nich je unikátny (t. j. je tam taký len jeden). Nájdite príbeh s najpútavejším možným obsahom.*

Príbeh: (hlavná hrdinka Lindtka, vedľajšie postavy Kubman a Tinka)
Lindtke (našej novej vedúcej) sa podarila nemilá vec. Sedela si na zastávke, vonku bola riadna zima, studený vietor dul, až sa jej nos červenal. I sadla si na obal s papiermi a úlohami do školy. Potom nastúpila do autobusu, ten s ňou odišiel a obal aj s riešeniami (všetkými) piateho príkladu ostal na lavičke. Keď sa o pár minút, po vystúpení na ďalšej zastávke a behu naspäť (ktorý ju takmer stál vykĺbený členok (tak vás má rada)), vrátila, už tam obal nebol. Napriek tomu, že v tom obale mala napísané kontaktné informácie s adresou, telefónnym číslom a e-mailom a prehľadala všetky kontajnery v okolí, aj supermarket stojaci neďaleko, či to tam niekto neodniesol, stále sú všetky jej veci aj príklady nezvestné. Chvíľu sme čakali, že to nejaká dobrá duša donesie, ale nestalo sa.

Preto Ťa, milý riešiteľ, prosíme o prepáčenie. Teraz za piatu úlohu nedostaneš žiadne body. Ale nezúfaj! S ďalšou sériou nám pošli piaty príklad znovu. My ho opravíme a body ti prirátame ešte do tejto série.
Vieme, že niektorí z vás sa už o príklade rozprávali. (To je to, čo robí správny riešiteľ po poslaní série.) Preto Ťa prosíme: napíš riešenie zhruba tak, ako si ho poslal. Ak ho máš uložené v počítači, len ho bez úprav pošli, ako bolo. Ak si riešenia posielal elektronicky, tie samozrejme ešte máme, posielať ich nemusíš. Ak náhodou ešte nejaká duša stratený Lindtkin obal donesie, my si pozrieme, či si si riešenie veľmi neprikrášlil(a). Alebo Ťa len skúšame? ;)

Úloha č. 6: *Nech p, l, u, s sú také prirodzené čísla, že ich najmenší spoločný násobok je $p + l + u + s$. Dokážte, že $p \cdot l \cdot u \cdot s$ je deliteľné 3 alebo 5.*

Riešenie: (opravovali Marek K., Mário a Paľo)
Riešenie tohto príkladu sa skladá z viacerých pozorovaní, ktoré treba vhodne pospájať dokopy. Pri pohľade na zadanie si isto hneď všimneme, že všetky výrazy v zadaní sú symetrické vzhľadom na p, l, u, s. Môžeme si preto BUNV[3] povedať, nech platí

$$p \leq l \leq u \leq s. \tag{1}$$

Potom platí

$$p + l + u + s \leq 4s.$$

[3]bez ujmy na všeobecnosti

Zo zadania máme $p+l+u+s=\mathrm{nsn}(p,l,u,s)$, a keďže $\mathrm{nsn}(p,l,u,s)=k\cdot s$, pre nejaké prirodzené číslo k, platí

$$k\cdot s=\mathrm{nsn}(p,l,u,s)=p+l+u+s\leq 4s. \tag{2}$$

Odtiaľ po vydelení kladným s dostaneme nerovnosť $k\leq 4$. Sú teda štyri možnosti:

- ($k=1$): Z (2) by sme dostali $s=p+l+u+s$, čo neplatí, takže táto možnosť nemôže nastať.
- ($k=2$): Túto možnosť rozoberieme neskôr.
- ($k=3$): To by znamenalo (opäť z (2)), že najmenší spoločný násobok čísel p,l,u,s je deliteľný tromi. Potom ale musí byť aspoň jedno z čísel p,l,u,s deliteľné tromi. (Toto si dokážte sami.[4]) Keď je aspoň jedno z nich deliteľné tromi, tak aj ich súčin je deliteľný tromi. V tomto prípade teda dokazované tvrdenie platí.
- ($k=4$): Z (2) by sme dostali $4s=p+l+u+s$, čo spolu s (1) dáva $p=l=u=s$. Potom by ale ich najmenší spoločný násobok bol s, nie $4s$, takže ani táto možnosť nemôže nastať.

Stačí už len vyriešiť prípad $k=2$. Napíšme si (2) špeciálne pre tento prípad, trocha v inom poradí:

$$\mathrm{nsn}(p,l,u,s)=2s=p+l+u+s.$$

Rovnosť napravo sa dá upraviť (odčítaním s) na

$$s=p+l+u \tag{3}$$

a rovnosť naľavo nám hovorí, že existujú také prirodzené čísla n_p, n_l, n_u, že platí

$$n_p\cdot p=2s,\qquad n_l\cdot l=2s,\qquad n_u\cdot u=2s. \tag{4}$$

Poďme zistiť, aké môže byť n_u. Z (1) máme $p+l+u\leq 3u$, čo spolu s (3) dáva $s\leq 3u$. Odtiaľ po prenásobení dvomi a predelení kladným u dostaneme $n_u\leq 6$. Stačí teda znovu rozobrať zopár možností:

- Ak by $n_u=1$, tak by $u=2s$, čo je spor s (1).
- Ak by $n_u=2$, tak by $u=s$ a z (3) by sme dostali $u=p+l+u$, čo je spor.
- Ak by bolo n_u jedno z čísel $3,5,6$, tak zopakovaním úvah z prípadu ($k=3$) by sme dospeli k záveru, že $p\cdot l\cdot u\cdot s$ je deliteľné 3 alebo 5.

Zostala jediná možnosť $n_u=4$. Potom $4u=2s$, resp. $u=s/2$. Z (3) po odčítaní $s/2=u$ dostaneme $s/2=p+l$, čo si podľa (4) môžeme prepísať na

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{n_p}+\frac{1}{n_l}. \tag{5}$$

Teraz už len stačí vyriešiť, aké dvojice n_p,n_l prichádzajú do úvahy. Z (5) hneď máme $n_l>4$. Na druhej strane z (1) a (4) vyplýva $n_l\leq n_p$, preto z (5) dostaneme aj horný odhad $n_l\leq 8$. Takže n_l musí byť niektoré číslo z množiny $\{5,6,7,8\}$.
Prípady $n_l=5$, resp. $n_l=6$ vedú opäť k tomu, že $5|p\cdot l\cdot u\cdot s$, resp. $3|p\cdot l\cdot u\cdot s$. Ak $n_l=7$, tak z (5) vypočítame $n_p=28/3$, a to je spor s tým, že n_p je prirodzené. Nakoniec, ak $n_l=8$, tak z (5) dostaneme $n_p=8$. Keď to zhrnieme dokopy, zistíme, že máme $\mathrm{nsn}(s/4,s/4,s/2,s)=2s$. Ale pravdou je $\mathrm{nsn}(s/4,s/4,s/2,s)=s$, takže sme znovu dostali spor.
Záver: Rozdelili sme situáciu na niekoľko prípadov. Ukázali sme, že niektoré z nich nemôžu nastať, lebo by viedli k nejakému sporu. Vo všetkých ostatných prípadoch sme ukázali, že $p\cdot l\cdot u\cdot s$ je deliteľné tromi alebo piatimi. Tým sme úlohu vyriešili.

Poznámka: Ak by to niekoho zaujímalo, tak uvádzame dva príklady štvorice (p,l,u,s) spĺňajúcej podmienky v zadaní: $(1,1,4,6)$, $(1,2,2,5)$.

Úloha č. 7: *Nech x,y sú kladné reálne čísla také, že $(1+x)(1+y)=2$. Dokážte, že platí*

$$xy+\frac{1}{xy}\geq 6.$$

Riešenie: (opravovali Ondrej a Katka :P)
Najskôr budeme len upravovať nerovnosť zo zadania, pričom sa chceme zbaviť zlomku. Pri násobení výrazom xy sa musíme zamyslieť nad tým, či náhodou neotočí znak nerovnosti. Keďže x aj y sú podľa zadania kladné, nič sa nestane a nerovnosť môžeme pokojne vynásobiť.

[4] *pomôcka:* sporom

$$
\begin{aligned}
x^2y^2+1 &\geq 6xy\\
x^2y^2-2xy+1 &\geq 4xy\\
(xy-1)^2 &\geq 4xy
\end{aligned}
$$

Teraz z väzby $(1+x)(1+y)=2$ vyjadríme $xy=1-x-y$, dosadíme to do poslednej nerovnosti a ďalej upravujeme.

$$
\begin{aligned}
(1-x-y-1)^2 &\geq 4xy\\
(-x-y)^2 &\geq 4xy\\
x^2+2xy+y^2 &\geq 4xy\\
x^2-2xy+y^2 &\geq 0\\
(x-y)^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dostali sme nerovnosť, v ktorej vystupuje druhá mocnina reálneho čísla. O tejto vieme, že je vždy nezáporná, preto nerovnosť, ktorú sme dostali, platí. A keďže všetky vykonané úpravy boli ekvivalentné, platí aj dokazovaná nerovnosť.

Poznámka: Táto úloha sa dala riešiť aj inými spôsobmi, napríklad iným vyjadrením väzby (mnohí vyjadrili len x), použitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti alebo jednoduchým skúmaním oboru riešení rovnice a nerovnice.

Úloha č. 8: *Pre kladné celé čísla a, b, c, d platí $ab = cd$. Dokážte, že číslo $a+b+c+d$ je zložené.*

Riešenie: (opravovali Kozzy, Peťo, HAgO)
Ak máme dokázať zloženosť nejakého čísla, ideálne je rozložiť ho na súčin činiteľov nerovnajúcich sa 1. Tým by bol dôkaz hotový. Poďme sa o to teda pokúsiť. S pomocou zadaných vlastností vyjadríme čísla a, b, c, d tak, aby sme so súčtom $a+b+c+d$ vedeli ďalej pracovať.
Z rovnosti $ab = cd$ vyplýva, že $a|cd$. Teda každé prvočíslo nachádzajúce sa v prvočíselnom rozklade čísla a sa bude nachádzať aj v rozklade c alebo d. (Samozrejme, môže sa stať, ak c a d sú súdeliteľné, že niektoré prvočíslo z rozkladu a sa bude nachádzať aj v rozklade c aj d.) Našou snahou bude vyjadriť a ako súčin tých prvočísel, ktoré sa nachádzajú v rozklade c a tých z rozkladu d, ktoré sme nevzali z rozkladu c. V prvom prípade môžeme zvoliť najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, c, v druhom sa budeme musieť uspokojiť s nejakým prípadne menším spoločným deliteľom čísel a, d.
Zaveďme označenie $N_{a,c}$ pre najväčší spoločný deliteľ a, c a $B_{a,d}$ pre bežný spoločný deliteľ čísel a, d. Potom z predošlého vieme určite zvoliť $B_{a,d}$ tak, aby platilo $a = N_{a,c} \cdot B_{a,d}$. Ďalej existujú prirodzené čísla Z_c a Z_d také, že $c = N_{a,c} \cdot Z_c$ a $d = B_{a,d} \cdot Z_d$. Pre našu rovnosť $ab = cd$ to znamená

$$
\begin{aligned}
(N_{a,c} \cdot B_{a,d})b &= (N_{a,c} \cdot Z_c)(B_{a,d} \cdot Z_d),\\
b &= Z_c \cdot Z_d.
\end{aligned}
$$

Teraz môžeme rozložiť $a+b+c+d$ na súčin:

$$a+b+c+d = N_{a,c}B_{a,d} + Z_cZ_d + N_{a,c}Z_c + B_{a,d}Z_d = (N_{a,c}+Z_d)(B_{a,d}+Z_c).$$

Každý deliteľ čísla (či už je označený N, B alebo Z) je aspoň 1, činitele súčinu sú teda oba aspoň 2, čo je presne to, o čo sme sa snažili.

Úloha č. 9: *Nájdite všetky zložené kladné celé čísla n, pre ktoré je možné umiestniť všetkých deliteľov čísla n väčších ako 1 do kruhu tak, aby bola každá dvojica susediacich deliteľov súdeliteľná.*

Riešenie: (opravovali Maťo Bachratý, Laco Bačo)
Najskôr si pre zjednodušenie povedzme, že kruh, na ktorom sú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v tomto poradí (susedné sú čísla vedľa seba a ešte a_1 s a_n) budeme označovať $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Poďme sa pozrieť na malé prípady. Číslo 1 má nula deliteľov väčších ako jedna a tie snáď nejako na tú kružnicu umiestnime. Pre 2 to zvládneme tiež, v rámci nášho zápisu to bude vyzerať takto: (2). Pre 3 máme (3). Na rade je 4, tá už má dvoch deliteľov, ale že by nám to robilo problém, sa povedať nedá, dáme ich jednoducho vedľa seba a dostaneme $(2, 4)$. Ľahko si uvedomíme, že pre ľubovoľnú mocninu prvočísla nájdeme riešenie ľahko. Všetky jeho delitele väčšie od jedna sú totiž súdeliteľné, je teda úplne jedno ako ich dáme do kruhu, vždy to bude vyhovovať podmienke.
Pozrime sa teraz na 6. Tá má delitele $2, 3, 6$. (Od teraz budeme nazývať deliteľmi len tie delitele, čo sú väčšie než jedna.) Keďže máme len tri delitele, tak na kruhu musí každý susediť s každým. (Premyslite si, prečo.) Dvojka a trojka však sú nesúdeliteľné, teda nemôžu byť susedmi. Pre 6 riešenie neexistuje. Znova si ľahko uvedomíme, že

aj vo všeobecnosti pre čísla tvaru $p \cdot q$, kde p a q sú rôzne prvočísla, riešenie neexistuje. Tieto čísla majú totiž len troch deliteľov a p a q sú nesúdeliteľné.
Po chvíli skúšania prídeme k záveru, že pre všetky ostatné čísla to už ide. Poďme to teda dokázať. Rozoberieme si dva prípady: buď má n viac než dvoch prvočíselných deliteľov alebo má iba dvoch, ale aspoň jedného v aspoň druhej mocnine. (Zvyšné prípady — nula, jeden prvočíselný deliteľ a dva delitele v prvej mocnine — sme už rozobrali.)
Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n}$, kde $p_1, \ldots, p_n$ sú rôzne prvočísla. Vytvorme takýto kruh:

$$(p_1, p_1p_2, p_2, p_2p_3, p_3, p_3p_4, \ldots, p_{n-1}p_n, p_n, p_np_1).$$

Susedné čísla sú súdeliteľné, každé číslo v kruhu je deliteľom n, jediné čo nám vadí, je to, že v kruhu nie sú všetky delitele. To však vyriešime veľmi jednoducho. Vezmime si najskôr všetky delitele n, ktoré nie sú v kruhu a sú násobkom p_1. Tie vložme medzi p_1 a p_1p_2 v ľubovoľnom poradí. Týmto sa vlastnosť, že susedia sú súdeliteľní, nepokazí. (Znova si skúste uvedomiť, prečo to tak je.) Teraz si vezmime všetky delitele n, ktoré ešte nie sú v kruhu a sú násobkom p_2. Tie vložme medzi p_2 a p_2p_3 v ľubovoľnom poradí. (Predošlé pridávanie deliteľov nezmenilo fakt, že p_2 a p_2p_3 sú susedné.) Ďalej vezmeme delitele n, ktoré nie sú ešte v kruhu a sú násobkami p_3, a tak ďalej, až po násobky p_n. Tým sme dostali do kruhu všetky delitele n (každý práve raz), pričom vlastnosť, že susedia sú súdeliteľní, ostala zachovaná. (Poriadne sa zamyslite nad tým, prečo sú tam naozaj všetky delitele, a prečo tam nie je žiadny dvakrát.) Ostáva nám posledný typ čísel.
Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, kde p_1, p_2 sú rôzne prvočísla a $\alpha_1 > 1$. Vytvorme takýto kruh:

$$(p_1, p_1p_2, p_1^2p_2).$$

Sú v ňom delitele n a susedia sú súdeliteľní. Medzi p_1 a p_1p_2 vložme v ľubovoľnom poradí delitele n, ktoré ešte nie sú v kruhu a sú násobkom p_1. Zvyšné delitele n, ktoré ešte nie sú v kruhu (všetky budú násobkom p_2, lebo inak by museli byť násobkom p_1, ale tie sme vložili do kruhu už skôr), vložme v ľubovoľnom poradí medzi p_1p_2 a $p_1^2p_2$. Tým sme vyrobili kruh vyhovujúci zadaniu. (Znova si skúste uvedomiť, že naozaj všetko sedí — susedia sú súdeliteľní a v kruhu je každý deliteľ n práve raz.)
Takže podmienky zo zadania platia pre všetky n, okrem tých, ktoré sa dajú zapísať ako súčin dvoch rôznych prvočísel.

Úloha č. 10: *Petržlena už prestalo baviť hrať obyčajné piškvorky s CéDečkom. Preto si vymyslel inú hru, podobnú piškvorkám. Hrá sa na nekonečnom štvorčekovom papieri. Petržlen začína a označí nejaké neoznačené políčko krížikom, potom CéDečko označí nejaké neoznačené políčko krúžkom a takto sa ďalej striedajú. Vyhráva hráč, ktorého znak vyplní štvorec 2×2. Dokáže Petržlen vo svojej hre vždy vyhrať?*

Riešenie: (opravoval CD a Mišo)
V takto zadanej úlohe môžu nastať 2 prípady:

1. Existuje víťazná stratégia pre Petržlena a my ju potrebujeme nájsť.
2. Neexistuje víťazná stratégia pre Petržlena a my potrebujeme nájsť neprehrávajúcu stratégiu pre CéDečka.

Skúsme si tieto fajné piškvorky zahrať. Po pár minútach simulovania tejto hry nám začína byť čoraz jasnejšie, že možnosť 1 sa nám asi dokázať nepodarí. Radšej sa rovno vrhnime na možnosť 2 a dokážme, že CéDečko nikdy neprehrá, ak bude hrať podľa presne danej stratégie. Keďže CéDečko je známy šachista, ofarbíme si celé naše štvorčekové pole ako šachovnicu. Dve vodorovne susediace políčka také, že ľavé je čierne (a pravé teda biele) budeme volať „tehlička“. Čierne políčko v každej tehličke si nazvime „černica“ a biele „belica“. Viď obrázok nižšie.

č	b	č	b	č	b	č	b	č	b	č	b
b	č	b	č	b	č	b	č	b	č	b	č
č	b	č	b	č	b	č	b	č	b	č	b
b	č	b	č	b	č	b	č	b	č	b	č

Naša stratégia bude založená na tom, že si všimneme, že každý štvorec 2×2 obsahuje práve jednu tehličku. Ak Petržlen označí svojim krížikom černicu, my označíme krúžkom belicu, ktorá je v rovnakej tehličke. A takisto naopak, ak Petržlen označí belicu, my označíme černicu v rovnakej tehličke. Týmto zabránime Petržlenovi označiť celú tehličku, pretože akonáhle si označí jeden jej štvorček, my označíme jej druhý štvorček. A keďže nikdy neoznačí celú tehličku, nikdy neoznačí ani celý štvorec 2×2. Naša stratégia je teda neprehrávajúca, CéDečko je šťastný a Petržlenovi ostali len oči pre plač.

Úloha č. 11: *Edo má doma 8 krabíc a v každej z nich je práve 6 bezfarebných guľôčok. Každú guľôčku sa Edo rozhodol zafarbiť jednou z n rôznych farieb tak, aby platilo:*

- *Ľubovoľné dve guľôčky v rovnakej krabici majú rôzne farby.*
- *Ľubovoľné dve farby sa súčasne vyskytujú v maximálne jednej krabici.*

Zistite, pre aké najmenšie n dokáže Edo guľôčky takto zafarbiť.

Riešenie: (opravovali Petržlen, Kubo S., Matúš)
Pri riešení takéhoto príkladu je dobré začať so skúšaním nejakých ofarbovaní. Pomerne ľahko sa dostaneme k ofarbeniu, pri ktorom použijeme 24 farieb.

A:	1	2	3	4	5	6
B:	1	7	8	9	10	11
C:	2	7	12	13	14	15
D:	3	8	12	16	17	18
E:	4	9	13	16	19	20
F:	5	10	14	17	19	21
G:	6	11	15	18	20	21
H:	1	12	21	22	23	24

Ak chceme ofarbiť guľôčky menším počtom farieb, musí platiť aspoň jedna z týchto podmienok:

(1) Jednu z farieb použijeme aspoň 4-krát.

(2) Aspoň dve farby použijeme 3-krát.

Teraz pre oba prípady zistíme dolné odhady pre n. Hor sa do toho!

(1) Štyri krabice obsahujúce rovnakú farbu nazvime A, B, C a D. V týchto štyroch krabiciach už nemôžeme zafarbiť dve guľôčky rovnakou farbou, lebo by to bol spor so zadaním. Na ofarbenie krabíc A, B, C a D teda potrebujeme $4 \cdot 5 = 20$ nových farieb. Nasledujúca krabica E môže obsahovať maximálne 4 farby z predchádzajúcich krabíc. Keby ich obsahovala 5 alebo viac, tak by sa dve z týchto farieb už vyskytovali v jednej z krabíc A, B, C, D, čo by bol opäť spor so zadaním. Krabica E teda obsahuje aspoň 2 nové farby. Pozrime sa teraz na ďalšiu krabicu F. Podobnou úvahou ako pri krabici E zistíme, že krabica F musí obsahovať aspoň 1 novú farbu. Keď si to spočítame, zistíme, že potrebujeme aspoň $1 + 20 + 2 + 1 = 24$ farieb na ofarbenie guľôčok za podmienky (1).

(2) Ak existujú farby 1 a 2, ktoré sa vyskytujú v krabiciach 3-krát, môžu nastať dve možnosti:

a) Práve jedna krabica obsahuje obidve farby 1 a 2.

b) Žiadna z krabíc neobsahuje obidve farby 1 a 2.

(2a) Nech krabice A, B, C obsahujú farbu 1 a krabice C, D, E obsahujú farbu 2. Potom platí, že na ofarbenie krabíc A, B, C potrebujeme 14 nových farieb. Je jasné, že krabice D a E nemôžu obsahovať farby z krabice C. Navyše krabice D a E môžu obe obsahovať najviac 2 farby z krabíc A a B. Z toho vyplýva, že na ich ofarbenie budeme potrebovať aspoň 6 nových farieb (za obe krabice tri farby a tieto farby musia byť rôzne pre D a E). Na ofarbenie krabice F môžeme použiť najviac 5 farieb z krabíc A, B, C, D, E, a teda potrebujeme aspoň jednu novú farbu. Sčítaním farieb dostávame, že $n \geq 2 + 14 + 3 + 3 + 1 = 23$.

(2b) Nech krabice A, B, C obsahujú farbu 1 a krabice D, E, F obsahujú farbu 2. Použijeme podobné úvahy, ako doteraz. V krabiciach A, B, C musia byť všetky ostatné farby navzájom rôzne, preto potrebujeme 15 nových farieb. O krabiciach D, E, F vieme, že nemôžu mať žiadnu spoločnú farbu (okrem farby 2). Ďalej o nich vieme povedať, že môžu mať maximálne po tri farby z krabíc A, B, C. Na ich úplné ofarbenie potrebujeme teda aspoň 6 nových farieb. Takže $n \geq 2 + 15 + 6 = 23$.
Podarilo sa nám zdola ohraničiť n číslom 23. Na začiatku sme konštrukciou zistili, že $n \leq 24$. Teraz nám už len zostáva overiť, či je možné skonštruovať ofarbenie pre $n = 23$. Pri našej konštrukcii sa inšpirujeme prípadom (2b).

A:	1	3	4	5	6	7
B:	1	8	9	10	11	12
C:	1	13	14	15	16	17
D:	2	3	8	13	18	19
E:	2	4	9	14	20	21
F:	2	5	10	15	22	23
G:	6	11	16	18	20	22
H:	7	12	17	19	21	23

Komentár: Veľa z vás prišlo na riešenie $n = 24$. Väčšinou ste na začiatku ofarbili prvú krabicu. Potom ste postupne pridávali ďalšie krabice a ofarbovali ich čo najmenším počtom nových farieb. Používali ste takzvaný „pažravý“ (greedy) algoritmus. Predpokladali ste, že optimálnym ofarbením pre aktuálnu krabicu dosiahnete optimálne riešenie aj pre všetky krabice. Toto ste sa snažili dokázať najrôznejšími spôsobmi ale zakaždým ste neuspeli, lebo to v tomto príklade proste nie je pravda :-) (Nezúfajte, občas sa tento „pažravý“ algoritmus dá použiť.)

Výsledková listina

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9	*		9		45
2.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	1	9	9	6	9			4		37
3.	Longa Marián	1.	ŠPMNDG BA	1	7	9	9	9	*				34
3.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	1	9	9	9		*		7		34
5.	Lâm Tuân Dûng	1.	GJH BA	1	9	9		8			7		33
6.	Rako Matúš	1.	Gamča BA	1	9	9	2	8	*	1	0		29
7.	Králik Matej	1.	GJH BA	1	9	9	1	9					28
8.	Ďuratná Petra	1.	ŠPMNDG BA	1	9	3		5	*		9		26
8.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	2		8	6	8	*	0	4		26
10.	Ďurajková Hana	1.	GJH BA	1	9	9		6					24
10.	Palko Maximilián	2.	1SG BA	2		9	9	6	*				24
12.	Šteňová Júlia	1.	GJH BA	1	9	9		3	*				21
12.	Veselá Simona	1.	GJH BA	1	9	8	4						21
14.	Murin Martin	1.	GJH BA	1	6	1	2	2	*		7		18
14.	Pilňan Branislav	1.	GJH BA	1	9	9							18
16.	Vozárová Viktória	2.	GJH BA	3				9	*		7		16
17.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3			1	4	*		7		12
18.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	3					*	1	9		10
18.	Svitková Patrícia	2.	GLN BA	2		7		3					10
20.	Martinková Sandra	1.	GJH BA	1	9								9
21.	Ošková Eva	2.	GJH BA	2	7	4	1	2	*				7
21.	Zhen Ning Dávid Liu	2.	Gamča BA	2					*		7		7
23.	Híveš Zdenko	2.	1SG BA	2		6					0		6
23.	Vajner Elisabeth	1.	GLS BA	1		2	1	2			1		6
25.	Galanová Miriam	2.	GJH BA	2					*		3		3
26.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3					*		1		1
27.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3									0

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Horváth Samuel	2.	GPár NR	3			9	9	*	9	7		34
2.	Kluvanec Roman	1.	GPár NR	1	9	3	8	2	*	0	5		27
3.	Mikulec Jaromír	1.	GsvJ NM	1	9	7		9	*	1	0		26
3.	Tóth Andrej	2.	GPár NR	2		9	3	7	*		7		26
5.	Marčeková Katarína	1.	GPár NR	1	9	2		5	*		7		23
6.	Kuťka Daniel	2.	GPár NR	2		9	3	3	*		7		22
7.	Kováčová Mária	1.	GsvCM NR	1	9	9		2	*				20
7.	Prešinská Kristína	1.	GPár NR	1	9	7		4	*	0			20
9.	Bieliková Michaela	2.	GVMS	2		9	8	2	*				19
9.	Daniel Mark	2.	GPár NR	3			7	5	*		7		19
11.	Straková Valentína	2.	GVMS	2		9	7	2	*				18
12.	Balážová Michaela	2.	G Bánovce	3			6	4	*		0		10
12.	Hladká Barbora	1.	GPár NR	1	9		1		*				10
14.	Matiaško Dušan	2.	GVBN PD	2	9	3	0	0	*	0	0		3
15.	Šuppa Marek	3.	GsvCM NR	3				2					2

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Nepšinská Silvia	1.	GJCh BR	1	9	9	9	7	*				34
2.	Labjaková Gabriela	1.	GMH Trstená	1	9	9	2			1	7		28
3.	Santrová Michaela	1.	GMH Trstená	1	9	9	1	6		1			26
4.	Kňaze Adam	1.	GJCh BR	1	9	9	6		*		0		24
5.	Dráček František	1.	GŠkol PB	1	9	9		5	*	0	0		23
6.	Tomašec Samuel	2.	GVar ZA	2		8	5	7					20
7.	Rizman Daniel	2.	GVar ZA	2		9	1	9	*				19
8.	Cimerman Jakub	3.	GJGT BB	3			4	5	*		9		18
8.	Mores Martin	2.	GVar ZA	2		9	9		*				18
10.	Šeligová Kristína	1.	GsvFA ZA	1	9	6							15
11.	Halamová Mária	1.	GVO ZA	1	9	2	0		*		0		11
12.	Hradňanská Petra	1.	GVar ZA	1	9			0					9

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	1	9	9	9	9	*		9		45
2.	Jarošová Dorota	1.	GAlej KE	1	8	9	5	6	*		7		35
3.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	1	9	9	3	6			0		27
4.	Oravcová Martina	2.	GPoš KE	2		3	9	3	*		7		22
4.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	3			9	7	*		6		22
4.	Rapavý Martin	2.	GAlej KE	3			4	9	*		9		22
7.	Puza Marko	2.	GPoš KE	2		9	2	9	*		0		20
7.	Ženčuchová Andrea	1.	GJAR PO	1	9	3	8	0	*	0	0		20
9.	Fedák Marek	1.	CGsvM SL	1	9		2	7	*				18
10.	Kello Tomáš	3.	GJAR PO	3					*	1	9		10
11.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	2					*		9		9
11.	Jursa Ján	2.	GPoš KE	2	9	9							9
13.	Dudič Ján	3.	GPoš KE	3				7	*	0	1		8
14.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3					*		7		7
14.	Lukáč Jakub	2.	GKuk PP	2		7							7
14.	Stehlík Mojmír	1.	GTreb KE	1			7						7
17.	Bašista Adam	2.	GKuk PP	2			1	0	*				1
18.	Polovka Maroš	2.	GKuk PP	3									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Žárský Jan	1.	Kopřivnice ČR	1	9	9	9	6	*				33
2.	Zlocha Martin	1.	Kirchberg LU	1	7	9	6	7	*				29
3.	Štěpánek Martin	1.	Příbor ČR	1	9	9	7		*		0		25
4.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	2							7		7

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k_α**	**k_β**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Stankovič Miroslav	2.	GPoš KE	4	3			9	9	9	9	9		45	45
1.	Šimsa Štěpán	3.	Litoměřice ČR	5	5			9	9	9	9	9		45	45
1.	Vodička Martin	3.	GAlej KE	7	8			9	9	9	9	9		45	45
4.	Hledík Michal	3.	GJH BA	6	2		9	9	8		9	9		44	44
5.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	2	0			7	9	7	9	9		41	41
6.	Žídek Augustin	4.	Frýdlant ČR	10	4			9	8	8	9	5		39	39
7.	Horňák Marián	4.	GPár NR	10	9			9	9	9	9	1		37	37
7.	Koprda Pavol	4.	GAM TT	9	3			9	9	6	9	4		37	37
7.	Kossaczká Marta	3.	Gamča BA	7	4			9	6	9	4	9		37	37
7.	Tóth Michal	4.	GJH BA	10	6			9	9	9	1	9		37	37
11.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	2	0	*		9	9	9	9			36	36
11.	Lukáček Viktor	4.	GsvM PO	4	1		4	9	9	9		5		36	36
11.	Šafin Jakub	3.	GPH MI	6	3			7	8	9	9	3		36	36
14.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	1	0	*		9	9	8		9		35	35
15.	Kopf Michal	4.	Opava ČR	10	5			7	5	6	9	5		32	32
15.	Šimková Ľudmila	2.	GPár NR	4	0	*	6	9	9	8				32	32
17.	Halajová Barbora	4.	GVO ZA	9	3			9	9	7	3	1		29	29
17.	Lipovský Mário	2.	GJH BA	4	0	*	2	9	9	9				29	29
19.	Galovičová Soňa	4.	GJH BA	10	7			9	9	9		1		28	28
19.	Svoboda Josef	3.	Frýdlant ČR	4	1		3	7	8	9		1		28	28
21.	Belanová Michaela	4.	ŠPMNDG BA	9	3			7	8	9	0	3		27	27
21.	Hofierka Jaroslav	2.	GJAR PO	4	0	*	9	9	9					27	27
21.	Jasenčáková Katarína	4.	GVO ZA	10	4			8	8	8	2	1		27	27
21.	Kavický Dušan	3.	GJH BA	5	2			7	5	6		9		27	27
21.	Marečáková Barbora	4.	GKuk PP	10	4			7	8	8		4		27	27
21.	Surovčík Juraj	3.	GPOH DK	6	1			7	9	6	2	3		27	27
21.	Vlček Andrej	4.	EvSŠ LM	7	2			9	9	9				27	27
28.	Petrucha Jaroslav	3.	GMet BA	7	2			9	9	8				26	26
29.	Ficková Klára	4.	GPoš KE	6	3			9	6	9	0	1		25	25
29.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3	0	*		7	9	9				25	25
29.	Hlaváčik Matúš	3.	GAlej KE	6	2			7	9	5		4		25	25
32.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	3	0	*	1	9	9	4		1		24	24
32.	Magyarová Zuzana	2.	GBST LC	4	0	*	0	7	9	8				24	24
32.	Prívozník Matej	2.	GJH BA	4	0	*			9	9	1	5		24	24
32.	Teiml Dominik	3.	AG Praha	5	3		8	5	8	9	2			24	24
36.	Bock Michal	3.	Gamča BA	5	1			7	9	6		1		23	23
36.	Ječmenová Andrea	2.	GVO ZA	4	0	*		7	8	5		3		23	23
38.	Hrivová Ivona	2.	GVO ZA	4	0	*		9	6	3		3		21	21
38.	Matejovičová Tatiana	3.	Gamča BA	4	0	*		7	5	8		1		21	21
40.	Červeňák Michal	3.	G Púchov	4	0	*	2	9	9			0		20	20
40.	Psota Miroslav	2.	GHlin ZA	4	0	*		0	5	6		9		20	20
42.	Korbela Michal	2.	G Bánovce	4	0	*		9	1	4	4	1		19	19
42.	Pellerová Daniela	3.	Gamča BA	7	3			9	6	1	2	1		19	19
44.	Gafurov Askar	3.	Gamča BA	5	1		6	0	6	5		1		18	18
44.	Hanzely Filip	3.	GAP SB	7	3			9		9				18	18
44.	Hraška Peter	3.	Gamča BA	4	0	*		7		7	3	1		18	18
44.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	1	0	*		9	9					18	18
44.	Macko Vladimír	3.	GĽŠ ZV	6	3			9		9				18	18
44.	Smolík Martin	3.	Gamča BA	5	0	*		3	6	7	1	1		18	18
50.	Gonda Tomáš	3.	Gamča BA	4	1			7		9		1		17	17
50.	Pokrývka Filip	2.	G Bánovce	4	0	*		1	9	6		1		17	17
52.	Komanová Kristína	3.	GAS BB	6	2		1	4	5	5	1			16	16

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
52.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	1	0	*		7	1	8				16	16
54.	Faguľová Kristína	4.	GPoš KE	9	3			9	6					15	15
54.	Klembarová Barbora	4.	GKuk PP	10	4			9	5			1		15	15
56.	Nociarová Jela	3.	GBST LC	6	1			9	5			0		14	14
56.	Zhen Ning Dávid Liu	2.	Gamča BA	2	0	*		7	5	1		1		14	14
58.	Kello Tomáš	3.	GJAR PO	3	0	*	1	9	1	2				13	13
59.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	3	0	*		6	5			1		12	12
59.	Vlachynská Petra	4.	GJH BA	7	0	*		9		3				12	12
61.	Kováčová Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0	*				9		1		10	10
62.	Magurová Lucia	3.	GPoš KE	5	0			9						9	9
62.	Mojžišová Karolína	2.	Gamča BA	4	0	*	2	1	1	4		1		9	9
62.	Vozárová Viktória	2.	GJH BA	3	0	*		7	1	1				9	9
62.	Zemková Kristýna	4.	Prachatice ČR	5	1			9						9	9
66.	Greššák Jerguš	3.	ŠPMNDG BA	4	0	*		7	1					8	8
67.	Kurdelová Alžbeta	2.	ŠPMNDG BA	4	0	*		7						7	7
67.	Semanišinová Denisa	3.	GAlej KE	5	0			7						7	7
67.	Šandalová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0	*		7						7	7
70.	Rako Matúš	1.	Gamča BA	1	0	*	1	0	0	2	1	1		5	5
70.	Santer Martin	3.	GMH Trstená	5	0				5					5	5
70.	Šromeková Karolína	2.	GDT PP	4	0			5						5	5
73.	Galanová Miriam	2.	GJH BA	2	0	*		3				1		4	4
73.	Krakovská Hana	2.	Gamča BA	4	0	*		1		2		1		4	4
73.	Mikloš Martin	4.	EvLýc BA	4	0	*	1	0	0	1	1	1		4	4
73.	Puza Marko	2.	GPoš KE	2	0	*		0	1	2		1		4	4
77.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3	0				1			1		2	2
78.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3	0	*		1			0	0		1	1
78.	Melošová Veronika	3.	GJCh BR	4	0	*	0	0	0	1	0	0		1	1
78.	Pivovarník Roman	2.	GJAR PO	4	0	*						1		1	1
78.	Polovka Maroš	2.	GKuk PP	3	0						1			1	1
82.	Vozárová Zuzana	4.	GJH BA	4	0									0	0