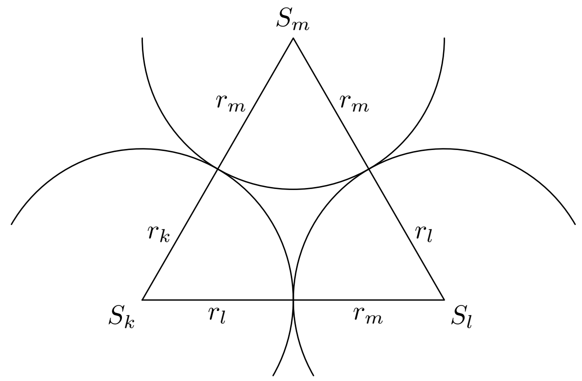
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2011/2012

Úloha č. 1:

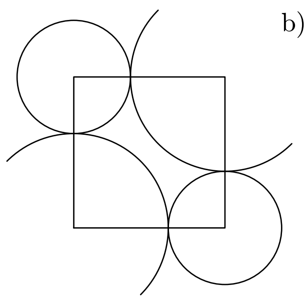
a) *Slony našli 3 kruhy k, l a m. Uložili ich do roviny tak, aby sa každé dva navzájom zvonku dotýkali. Zistili, že stredy kruhov tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. Musia mať k, l a m rovnaký polomer?*

b) *Slony tentokrát našli 4 kruhy a, b, c a d. Uložili ich do roviny tak, aby sa každý kruh zvonku dotýkal aspoň dvoch ďalších kruhov. Zistili, že stredy kruhov tvoria vrcholy štvorca. Musia mať a, b, c a d rovnaký polomer?*

Riešenie: (opravovala Betka a Kubo)



a) Slony našli kruhy k, l a m. Označme si ich polomery r_k, r_l a r_m a ich stredy označme S_k, S_l a S_m. Uložené sú tak, aby sa každé dva navzájom zvonku dotýkali. Ich stredy S_k, S_l a S_m tvoria rovnostranný trojuholník.
Chceme zistiť, či v takomto prípade musia mať k, l a m rovnaký polomer.
Vieme, že ak ku kruhu spravíme dotyčnicu, tak potom úsečka spájajúca stred tejto kružnice a bod dotyku je kolmá na túto dotyčnicu[1]. Z toho vyplýva, že ak sa dva kruhy dotýkajú, tak spojnica ich stredov je úsečka kolmá na dotyčnicu v bode ich dotyku, a tvoria ju teda polomery daných dvoch kruhov.
Trojuholník $S_kS_lS_m$ je rovnostranný, označme si jeho stranu a. Potom môžeme dĺžky strán nášho trojuholníka zapísať nasledovne: $a = r_k + r_l$, $a = r_l + r_m$ a $a = r_m + r_k$. Keď si rovnosti upravíme, dostaneme, že $r_k = r_l = r_m$. Pokiaľ stredy kružníc k, l a m tvoria rovnostranný trojuholník, ich polomery musia byť rovnaké.



b) V druhom prípade máme štyri kruhy a, b, c a d. Ich stredy tvoria štvorec. Rovnako ako v prvom prípade si napíšeme rovnosti: $a = r_a + r_b$, $a = r_b + r_c$, $a = r_c + r_d$ a $a = r_d + r_a$. Po ich úprave dostávame $r_a = r_c$ a $r_b = r_d$. Zdá sa, že v tomto prípade r_a a r_b navzájom nijako nesúvisia.
Ak sme chceli dokázať, že polomery r_a, r_b, r_c, r_d musia byť rovnaké, oplatí sa najprv skúsiť nájsť protipríklad[2] — teda v našom prípade rozmiestniť kruhy a, b, c, d tak, aby ich stredy tvorili štvorec, ale aby $r_a \neq r_b$. To ste zvládli väčšinou výborne a jeden z protipríkladov vidieť na obrázku.

Úloha č. 2: *Zebry rady kreslia čo najviac rôznych rovnostranných trojuholníkov. Aby to však nemali také ľahké, tak aspoň dva vrcholy trojuholníka sú zároveň vrcholmi dopredu nakresleného*

a) *štvorca;*

b) *pravidelného šesťuholníka;*

c) *pravidelného dvanásťuholníka.*

[1] Toto ste sa už asi učili v škole. Ak nie, bolo by dobré si to zapamätať, lebo tento fakt sa často v príkladoch používa.
[2] Protipríklad (niekedy nazývaný aj kontrapríklad) je konkrétna situácia, v ktorej dané tvrdenie neplatí.

Koľko najviac rôznych rovnostranných trojuholníkov vedia v jednotlivých situáciách zebry nakresliť? Dva trojuholníky považujeme za rovnaké, ak majú všetky tri vrcholy zhodné. Inak sú tieto trojuholníky rôzne.

Riešenie: (opravovala Miška a Zuska)
Zo zadania vieme, že aspoň dva vrcholy rovnostranného trojuholníka musia ležať vo vrcholoch pravidelného n-uholníka. Budú to teda určite dva, ale možno aj tri vrcholy. Práve toto je kľúčová myšlienka, na ktorú ste mnohí pozabudli.

a) V prípade štvorca nie je možné, aby v jeho vrcholoch ležali tri vrcholy rovnostranného trojuholníka. Z troch vrcholov štvorca vznikne jedine pravouhlý trojuholník, ktorý nikdy nie je rovnostranný. Zrátajme teda trojuholníky, ktoré majú so štvorcom dva spoločné vrcholy. Nech vyberieme ľubovoľnú dvojicu vrcholov nášho štvorca, vždy vieme zostrojiť dva rovnostranné trojuholníky (na jednu, aj na druhú stranu). Z vrcholov štvorca vieme vybrať $4 \cdot 3/2 = 6$ dvojíc, keďže ku každému zo štyroch vrcholov máme na výber tri ďalšie, avšak takto by sme každú dvojicu zarátali dvakrát. (Premyslite si.) Všimnite si, že výber dvoch vrcholov zo štyroch zodpovedá aj kombinačnému číslu $\binom{4}{2} = 6$, čo je len múdro povedaná tá istá šestka, ako predtým. Spolu vieme teda zostrojiť $2 \cdot 6 = 12$ rôznych trojuholníkov.

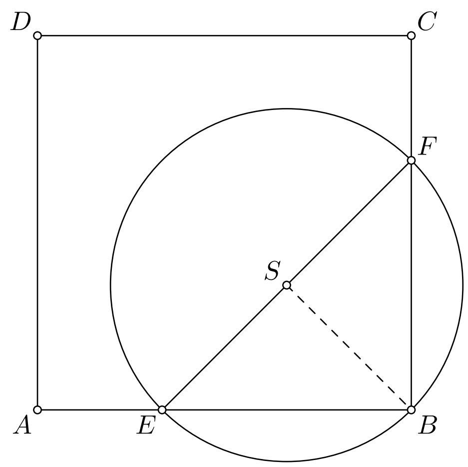
b) V tomto prípade sa úloha komplikuje, pretože rovnostranné trojuholníky zostrojené nad niektorými dvojicami bodov majú aj tretí vrchol ležiaci v nejakom vrchole šesťuholníka. Také trojuholníky sú problematické preto, lebo pri spočítavaní dvojíc vrcholov ich zarátame až trikrát — s každou stranou raz. Existujú dva takéto trojuholníky, iste ich zvládnete nájsť sami.
Opäť najprv spočítame, koľko dvojíc bodov vieme vybrať zo šiestich vrcholov. Tých je $\binom{6}{2} = 15$, nad nimi zostrojených trojuholníkov je 30. Treba si však uvedomiť, že medzi týmito trojuholníkmi sú dva, ktoré sme zarátali trikrát, a teda dvakrát ich musíme odpočítať. Spolu teda máme $30 - 2 \cdot 2 = 26$ rôznych trojuholníkov.

c) Najprv si premyslite, koľko existuje rovnostranných trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy ležia vo vrcholoch dvanásťuholníka. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade si budeme musieť dať dobrý pozor, aby sme ich nezarátali ako tri rôzne trojuholníky pre každú z ich strán.
Správne, takéto trojuholníky sú štyri. Z dvanástich vrcholov vieme vybrať $\binom{12}{2} = 66$ dvojíc. Každej z nich prislúchajú opäť dva trojuholníky, avšak štyri trojuholníky sme zarátali trojnásobne a musíme to opraviť. Spolu teda máme $66 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 124$ rôznych trojuholníkov.

Úloha č. 3: *Opica Tomáš často hrá nasledovnú hru: nájde si rovnú paličku, nakreslí štvorec $ABCD$, ktorého strana je dlhšia ako palička a snaží sa vložiť paličku do štvorca. Musí však dodržať tieto pravidlá: palička začína v bode ležiacom na strane AB (nazveme ho bod E) a končí v bode ležiacom na strane BC (nazveme ho bod F). Zároveň má byť obsah trojuholníka EBF čo najväčší. Poraďte Tomášovi, ako má umiestniť paličku!*

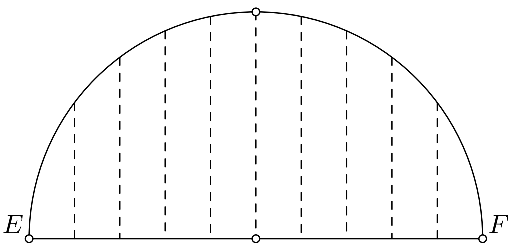
Riešenie: (opravovala Maťa a JeFo)
Riešiť danú úlohu bolo možné viacerými spôsobmi: pomocou hľadania maxima funkcie, vyjadrovaním veľkosti strán prostredníctvom veľkosti uhlov alebo úvahou o výške. Pre vzorové riešenie sme zvolili poslednú z možností, pre jej stručnosť a prehľadnosť.

(Podľa *Jakuba Cimermana* a *Mariána Longu*.)
Máme nájsť taký trojuholník EBF, ktorý má pri danej dĺžke úsečky EF najväčší možný obsah. Najskôr je dobré uvedomiť si pár vecí:



1. Vytvorený trojuholník bude pravouhlý — pretože vo štvorci $ABCD$ je $|\sphericalangle ABC| = 90°$ a práve tento uhol sa stal súčasťou hľadaného trojuholníka.
2. Kružnica so stredom v strede úsečky EF a priemerom $|EF|$ je Tálesovou kružnicou nad úsečkou EF. Z vety o Tálesovej kružnici vieme, že pre každý bod K ležiaci na tejto kružnici, ktorý tvorí s pôvodnou úsečkou EF trojuholník, bude mať tento trojuholník pri vrchole K pravý uhol. Takisto naopak platí, že pre každý trojuholník EFK s pravým uhlom pri vrchole K leží bod K na Tálesovej kružnici. Z predchádzajúcej úvahy je jasné, že aj vrchol B musí ležať na Tálesovej kružnici nad úsečkou EF.
3. Obsah trojuholníka EBF môžeme vypočítať ako: $(a \cdot v_a)/2$, kde $a = |EF|$ a v_a je výška na stranu EF.

Dĺžka úsečky EF je daná (konštantná). Z toho vyplýva, že obsah trojuholníka je závislý len od výšky v_a. Budeme sa teda snažiť umiestiť paličku tak, aby výška v_a mala čo najväčšiu dĺžku. Ako sa mení v závislosti od umiestnenia bodu B dĺžka tejto výšky?



Z obrázka vidíme, že v_a má najväčšiu dĺžku v strede — práve vtedy, ak je táto rovná polomeru kružnice. Na kružnici totiž neexistuje bod, ktorý by bol od priemeru vzdialený viac, než je veľkosť polomeru. (Skúste si toto jednoduché tvrdenie dokázať.) Takýto prípad v našom príklade nastane, ak bude bod B ležať v strede oblúka EF.
Takto sme získali trojuholník, ktorého ramená sú rovnaké — rovnoramenný trojuholník. To znamená, že Tomáš musí umiestniť paličku tak, aby mali ramená EB a FB rovnakú dĺžku.
Ešte zistíme, pomocou Pytagorovej vety, v akej vzdialenosti budú od bodu B umiestnené body E a F. Vieme, že platí $|EB|^2 + |FB|^2 = |EF|^2$ a z poznatku $|EB| = |FB|$ dostávame $|EB| = |FB| = |EF|/\sqrt{2}$

Záver: Opica Tomáš musí umiestniť paličku tak, aby mali ramená EB a FB rovnakú dĺžku, pričom body E a F budú umiestnené vo vzdialenosti $|EF|/\sqrt{2}$ od bodu B.

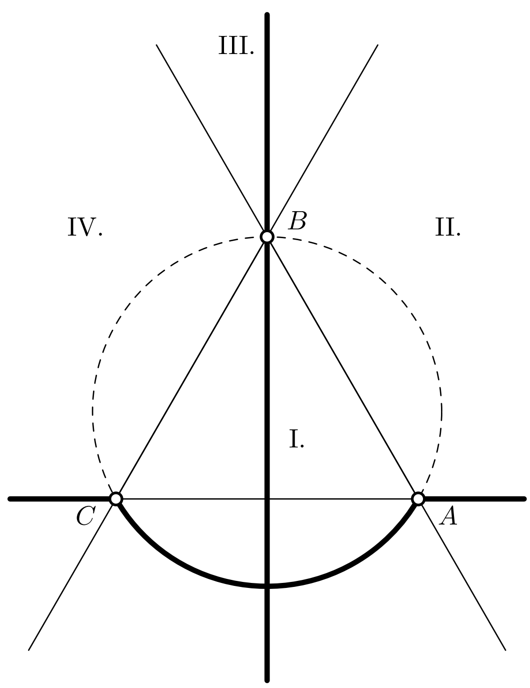
Úloha č. 4: *Krokodíl Jonatán našiel v rieke rovnostranný trojuholník ABC. Hneď našiel bod P, pre ktorý platilo $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC|$. Nájdite všetky body s takouto vlastnosťou. Nezabudnite ukázať, že iné body túto vlastnosť nemajú.*

Riešenie: (opravovali Beren a Marek Šebo)
Priamky AB a BC rozdeľujú rovinu na štyri štvrťroviny (viď obrázok). Na začiatok si rozdeľme rovinu na tri časti podľa umiestnenia bodu P vzhľadom na priamky AB a BC:

1. Bod P leží na jednej z priamok AB, BC.
2. Bod P leží v I. alebo III. štvrťrovine a neleží na priamkach AB, BC.
3. Bod P leží v II. alebo IV. štvrťrovine a neleží na priamkach AB, BC.

Teraz nám už nezostáva nič iné, ako postupne prešetriť všetky tri možné umiestnenia:

(1) Všimnime si, že minimálne jedna z trojíc bodov (A, P, B) a (C, P, B) leží na jednej priamke. Ak $P = A$ alebo $P = C$, jeden z uhlov APB, CPB nie je definovaný. Ak $P = B$, nie je definovaný dokonca ani jeden z nich. V ostatných prípadoch má práve jeden z uhlov APB, CPB veľkosť $180°$ resp. $0°$. Keďže priamky AB, BC nie sú totožné (teda body A, B, C neležia na jednej priamke), druhý z dvojice uhlov nemôže mať rovnakú veľkosť.



(2) Spomeňme si, že keď máme danú úsečku AB, tak všetky body P také, že $|\sphericalangle APB| = \alpha$, ležia na dvoch kružnicových oblúkoch zostrojených nad úsečkou AB, teda presnejšie jeden oblúk nad a jeden pod ňou. Pre úsečku BC platí to isté. Náš hľadaný bod P môže byť všade tam, kde sa tieto oblúky pretnú. Máme teda dve dvojice oblúkov pre každú veľkosť uhla APB, každé dve sa môžu pretínať v 0, 1, 2 alebo ∞ bodoch. Keďže bod B bude prienikom vždy, stačí preskúmať posledné dve možnosti.
Najprv možnosť s dvomi priesečníkmi, pričom jedným z nich je bod B. Každý oblúk leží v jednej polrovine vzhľadom na priamku AB, resp. BC, takže sa nemôže stať, že v jednej štvrťrovine bude pre jednu veľkosť uhla APB ležať viac ako jeden prienik (bod B nepatrí I. ani III. štvrťrovine). Skúsme nájsť všetky prieniky (pre všetky prípustné hodnoty veľkosti uhla APB) v I. a III. štvrťrovine. Vieme, že pre všetky body P, ležiace na osi uhla ABC platí, že trojuholníky ABP a CBP sú zhodné podľa vety *sus*, potom musí platiť aj $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC|$. Keďže je to celá priamka (okrem bodu B), vieme na nej nájsť bod P pre ľubovoľnú prípustnú veľkosť uhla APB, čiže žiadne ďalšie body P v časti (2) už nebudú existovať.
Ostáva nám ešte prešetriť prípad, keď sa niektoré dva oblúky budú prekrývať, čiže budú mať ∞ spoločných bodov. Toto môže nastať jedine vtedy, ak sú obidva oblúky súčasťou kružnice opísanej trojuholníku ABC, čo zodpovedá veľkosti uhla $|\sphericalangle APB| = 60°$. Ich spoločný prienik je vtedy kružnicový oblúk AC. (Ide o ten kružnicový oblúk, ktorý sa nachádza v časti roviny (2) a teda neobsahuje bod B.)

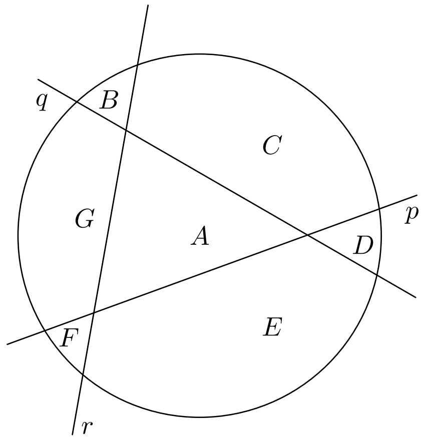
(3) Os uhla ABC touto časťou roviny neprechádza, musíme teda nájsť nejaké iné riešenia. Všimnime si, že jeden z dvojice uhlov APB, CPB vykrajuje časť roviny, v ktorej leží ten druhý. Keďže PB je spoločným ramenom oboch uhlov a dané uhly APB, BPC sú rovnako veľké, musí aj druhé rameno oboch uhlov byť spoločným. Teda AP a CP musia ležať na jednej priamke, z čoho vyplýva, že bod P leží na priamke AC. Pozor ale na to, že vyhovuje iba tá časť priamky AC, ktorá sa nachádza v časti roviny (3), čiže v II. alebo IV. štvrťrovine.

Množinou všetkých bodov P je teda zjednotenie:

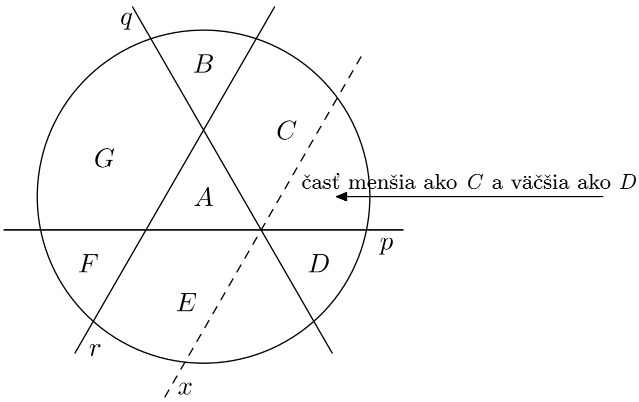
- osi uhla ABC, okrem bodu B,
- kratšieho kružnicového oblúka AC (teda toho, na ktorom neleží bod B) kružnice opísanej trojuholníku ABC, okrem bodov A, C
- a priamky AC, okrem úsečky AC.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Stádo žiráf si láme hlavu nad touto úlohou: je možné rozdeliť kruh tromi priamkami na 7 častí s rovnakým obsahom?*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Myrec a Kozzy)



Po načrtnutí niekoľkých obrázkov rýchlo prídeme na to, že tri priamky rozdelia kruh na sedem častí vtedy, keď budú mať v jej vnútri tri priesečníky, teda každá pretne obe zvyšné. Žiadnym iným spôsobom kruh na sedem častí nerozdelíme. (Premyslite si.)
Rozdelením kruhu sme získali sedem častí. Jeden trojuholník (označme A), tri časti kruhu určené tromi bodmi a tri časti určené štyrmi bodmi. Časti označme zaradom dookola B až G, ako na obrázku. Priamky budeme volať p, q a r.
Nech načrtávame obrázky akokoľvek, nedarí sa to urobiť tak, aby boli všetky časti rovnaké. Je celkom možné, že sa to nedá. Skúsme tento dojem dokázať, napríklad sporom. Predpokladajme, že je možné rozdeliť kruh tromi priamkami na sedem častí s rovnakým obsahom. Čo pre ne musí platiť? Obsahy častí $B+C+D$, $D+E+F$ a $F+G+B$ sú rovnaké. Tieto obsahy závisia od dĺžky príslušnej tetivy. Kým ide o časť menšiu ako polkruh — čo v našom prípade, keď berieme tri časti zo sedem rovnakých, platí — s rastúcou dĺžkou tetivy rastie aj obsah. Všetky tri tetivy potom musia byť rovnako dlhé. Os uhla medzi dvojicou tetív, povedzme p a q, prechádza stredom kružnice. (Posledná veta platí o každých dvoch rovnako dlhých tetivách, keďže dĺžka tetivy je daná jej vzdialenosťou od stredu kružnice.) Treba si uvedomiť, že celý útvar musí byť osovo súmerný práve podľa tejto osi. Opak by spôsobil, že by sa nerovnali obsahy častí rovnakého typu na opačných stranách, teda F a D, prípadne G a C. Tým pádom aj priamka r je podľa tejto osi súmerná, z čoho plynie, že je na túto os kolmá. Z toho nutne vyplýva, že trojuholník A je rovnoramenný so základňou r. Vyššie uvedené však platí aj pre ostatné dvojice priamok, z čoho dostávame, že časť A musí byť rovnostranný trojuholník.



Teraz sa pozrieme na veľkosti obsahov C a D. Zostrojme priamku x rovnobežnú s r prechádzajúcu priesečníkom p a q. Tým sme z časti C odkrojili nejaký menší útvar. Tento útvar má s časťou D spoločnú stranu a rovnaký uhol pri vrchole (60°), no kým v D je aj druhá strana rovnako dlhá ako ich spoločná, v tomto odrezanom útvare je druhá strana určite dlhšia a prislúcha mu aj väčšia časť kružnice, teda má väčší obsah. (Toto si poriadne premyslite.) Z toho vyplýva, že C má väčší obsah ako D, nastáva spor s predpokladom, a teda nedokážeme rozdeliť kruh tromi priamkami na sedem častí s rovnakým obsahom.

<u>**Úloha č. 6:**</u> *Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A, pre ktorý platí $|AB| < |AC|$. Nech M je stred strany BC, p je kolmica na stranu BC prechádzajúca bodom M a D je priesečník priamky p a úsečky AC. Ďalej nech q je kolmica na BD prechádzajúca bodom B, r je rovnobežka s AC prechádzajúca bodom M a E je priesečník q a r. Dokážte, že trojuholníky AEM a MCA sú podobné práve vtedy, keď $|\sphericalangle ABC| = 60°$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mary a HAgO)
Na úvod si uvedieme a dokážeme tri postrehy, ktoré viedli k správnemu riešeniu. Tie neskôr využijeme v našom dôkaze.

(♣) $|\sphericalangle CAM| = |\sphericalangle ACM|$.
To vieme z toho, že trojuholník ABC je pravouhlý, jemu opísaná kružnica bude preto Tálesova so stredom v bode M. Odtiaľ $|AM| = |CM|$ a z rovnoramennosti trojuholníka MCA dostaneme dokazovanú zhodnosť uhlov.

(♠) $|\sphericalangle DCM| = |\sphericalangle DBM|$.
Môžeme si všimnúť, že trojuholníky CDM a BDM zdieľajú stranu DM, tiež $|CM| = |BM|$, pretože bod M je stred strany BC a $|\sphericalangle CMD| = |\sphericalangle BMD| = 90°$, lebo priamka p je kolmá na stranu BC. Trojuholníky CDM a BDM sú tým pádom zhodné podľa vety *sus* a naozaj platí $|\sphericalangle DCM| = |\sphericalangle DBM|$.

(♦) Trojuholníky AEM a BEM sú zhodné.
Stačí si uvedomiť, že priamka r je predĺžením strednej priečky trojuholníka ABC, prechádza teda stredom strany AB. Zároveň je na ňu aj kolmá, r je teda osou strany AB. Pre body E a M na r ležiace potom platí $|EA| = |EB|$ a $|MA| = |MB|$. Z toho je už zjavné, že trojuholníky AEM a BEM sú zhodné podľa vety *sss*.

Juchú, už vieme všetko, čo na dôkaz treba, môžeme sa naň s entuziazmom vrhnúť. Všimni si, milý riešiteľ, že zadanie od teba vyžaduje dôkaz ekvivalencie. Čo je to ekvivalencia? To je tvrdenie tvaru „A práve vtedy, keď B“. Aby sme dokázali ekvivalenciu, potrebujeme dokázať dve časti (implikácie):

a) Ak platí B, tak platí A.

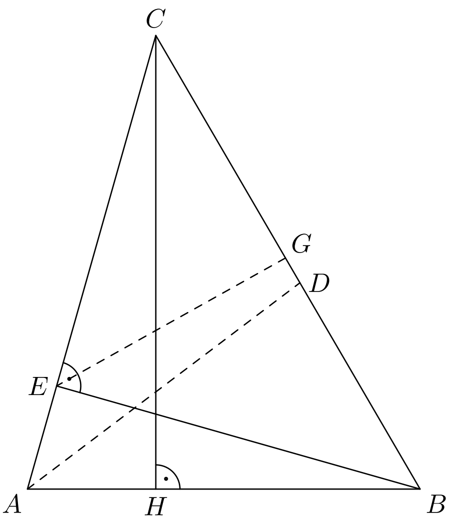
b) Ak platí A, tak platí B. (Implikácia sa dá dokázať aj obmenou: ak neplatí B, tak neplatí A.)

Poďme na to.

a) Ak $|\sphericalangle ABC| = 60°$, tak trojuholníky MCA a AEM sú podobné.
Na dokázanie tejto implikácie nám stačí vyčísliť uhly v oboch trojuholníkoch a porovnať.
Vieme, že $\sphericalangle BAC$ je pravý a z predpokladu máme $|\sphericalangle ABC| = 60°$, potom $|\sphericalangle ACB| = 30°$. Z (♣) dostaneme, že $|\sphericalangle CAM| = 30°$ a ľahko dopočítame $|\sphericalangle AMC| = 120°$. Máme vyčíslené uhly trojuholníka MCA.
Uhly BME a BCA sú súhlasné, takže $|\sphericalangle BME| = 30°$. Z (♠) máme, že $|\sphericalangle DBM| = 30°$ a zo zadania vieme, že uhol DBE je pravý, čo nám umožňuje vyrátať $|\sphericalangle EBM| = |\sphericalangle DBE| + |\sphericalangle DBM| = 120°$. Veľkosť posledného uhla v trojuholníku BEM dostaneme ako doplnok do 180°, $|\sphericalangle BEM| = 30°$. Vďaka (♦) budú uhly trojuholníka AEM rovnako veľké ako uhly trojuholníka BEM a konkrétne budú mať 30°, 30° a 120°.
V tomto bode sa dôkaz prvej implikácie končí, keďže sme ukázali, že trojuholníky MCA a AEM majú rovnako veľké uhly, teda sú podobné.

b) Ak sú trojuholníky MCA a AEM podobné, tak $|\sphericalangle ABC| = 60°$.
Označme si S priesečník priamky r a strany AB a veľkosť uhla ACB označme γ. Ak sa nám podarí ukázať, že $|\sphericalangle ABC| = 2\gamma$, tak sme vyhrali, pretože pre súčet uhlov v trojuholníku ABC dostaneme $90° + 2\gamma + \gamma = 180°$, odkiaľ $\gamma = 30°$ a $|\sphericalangle ABC| = 2\gamma = 60°$. Tak to poďme ukázať.
Ak $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, tak z (♣) máme $|\sphericalangle CAM| = \gamma$ a z predpokladanej podobnosti trojuholníkov MCA a AEM dostávame $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle AME| = \gamma$. Potom použitím (♦) vieme, že $|\sphericalangle BEM| = \gamma$ a dopočítaním uhlov v pravouhlom trouholníku EBS dostaneme $|\sphericalangle ABE| = 90° - \gamma$. Uhol ABD je doplnkom $\sphericalangle ABE$ do 90°, teda $|\sphericalangle ABD| = \gamma$. Taktiež z (♠) vieme, že $|\sphericalangle CBD| = \gamma$.
Konečne dostávame, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle CBD| = 2\gamma$. Hotovo.

__Úloha č. 7:__ *Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme D priesečník osi uhla BAC a úsečky BC a E pätu výšky z bodu B na stranu AC. Dokážte, že platí $|\sphericalangle CED| > 45°$.*



<u>Riešenie:</u> (opravovala Katka :P)
Rôznych správnych riešení tejto úlohy bolo veľa, preto sa pokúsim spojiť viaceré a vytiahnuť z nich užitočné veci, ktoré ti, milý riešiteľ, snáď v budúcnosti pomôžu. Ako prvú vec sa naučíme, že niekedy sa zíde niečo si do obrázku dokresliť. Napríklad si dokreslime os uhla CEB, ktorej priesečník so stranou BC si označíme G. Ďalej dokreslíme výšku na stranu AB, ktorej pätu označíme H. Z takto nakresleného obrázka vidíme, že ak chceme dokázať tvrdenie zo zadania, stačí nám dokázať, že $|CG| < |CD|$. Prečo? Vieme, že uhol CEB je pravý a teda $|\sphericalangle CEG| = 45°$. Preto ak bude $|CD| > |CG|$, tak bude $|\sphericalangle CED| > |\sphericalangle CEG| = 45°$.
Ako prvý nám napadne poznatok, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere zvyšných dvoch strán. (Skús si ho dokázať pomocou sínusovej vety.) V našom prípade dostaneme pri pohľade na os uhla BAC, že

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Trojuholníky AHC a AEB sú podobné, lebo majú pravý uhol a ešte spoločný uhol BAC. Potom o vzájomnom pomere ich strán vieme, že

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|EB|}.$$

Ďalej si všimneme, že trojuholník CEH má tupý uhol pri vrchole E. Vieme, že v tupouhlom trojuholníku je najdlhšia strana oproti tupému uhlu, takže platí $|CE| < |CH|$. Uvedomiť si tento poznatok a použiť ho v správnej chvíli je tiež užitočné. Ako cvičenie si skúste dokázať, že $|CE| < |CH|$, napríklad pomocou vyjadrenia obsahu trojuholníka ABC pomocou strán a výšok.
Vzťah, ktorý sme získali, si trochu upravíme — vydelíme ho $|EB|$. Keďže je to dĺžka strany, je to kladné číslo, takže znamienko nerovnosti sa nezmení. Dostávame

$$\frac{|CE|}{|EB|} < \frac{|CH|}{|EB|}.$$

Ako poslednú využijeme os uhla CEB, ktorá rozdelí stranu BC v pomere

$$\frac{|CG|}{|GB|} = \frac{|CE|}{|EB|}.$$

Teraz vieme všetko na to, aby sme úlohu vyriešili. Už potrebujeme len vhodne spojiť, čo sme zistili. Poďme na to:

$$\frac{|CG|}{|GB|} = \frac{|CE|}{|EB|} < \frac{|CH|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|DB|} \implies \frac{|CG|}{|GB|} < \frac{|CD|}{|DB|} \implies |CG| < |CD|.$$

Úloha č. 8: *Štvoruholník $ABCD$ je tetivový. Označme postupne r_a, r_b, r_c a r_d polomery kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, ACD, ABD a ABC. Dokážte, že platí $r_a + r_c = r_b + r_d$.*

Riešenie: (opravoval Maťo Bachratý)
Keďže obrázok zo zadania je pomerne veľký, tak ho sem kresliť nebudeme. Namiesto toho si ho nakreslite na (veľký) papier a postupne si doň dokresľujte veci spomínané vo vzoráku. Najskôr označme postupne I_A, I_B, I_C a I_D stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, ACD, ABD a ABC, kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ si označme k a pusťme sa do riešenia. Keďže je naša úloha geometrická, tak začneme tým, že si narysujeme čo najpresnejší obrázok. Buď rukou na papier alebo myšou v nejakom počítačovom geometrickom programe. (To je ešte o trošku výhodnejšie, lebo keď chceme iný obrázok spĺňajúci zadanie, tak nám stačí chytiť a posunúť bod, zatiaľ čo na papieri musíme rysovať odznova.) Ak sme kreslili pekne, tak si môžeme všimnúť, že štvoruholník $I_AI_BI_CI_D$ je obdĺžnik. Je to náhoda? Skúsime dokázať, že nie, ale najskôr porozmýšľajme, či nám to bude na niečo užitočné.

Predpokladajme, že $I_AI_BI_CI_D$ je obdĺžnik. Označme si postupne p, q, e a f priamky AC, BD, I_AI_C a I_BI_D. Ďalej si označme X priesečník priamok e a q a Y priesečník priamok f a p. (Skúste si uvedomiť, prečo sú dvojice priamok e, q a f, p rôznobežné. Ak by totiž neboli, tak nemôžeme predpokladať, že majú práve jeden priesečník.) Nakoniec si ešte označme postupne σ a ρ veľkosti uhlov I_BYA a I_CXD.
Určite platí, že $|I_AI_C| = |I_BI_D|$. Ďalej platí, že $r_a = |I_Aq|$, $r_c = |I_Cq|$ a $r_b = |I_Bp|$, $r_d = |I_Dp|$. Vieme, že sínus uhla je v pravouhlom trojuholníku pomer protiľahlej strany ku prepone. Teda dĺžka protiľahlej strany je prepona krát sínus uhla. To teraz využijeme:

$$r_a + r_c = |I_Aq| + |I_Cq| = |I_AX| \cdot \sin\rho + |I_CX| \cdot \sin\rho = (|I_AX| + |I_AY|) \cdot \sin\rho = |I_AI_C| \cdot \sin\rho.$$

Analogicky platí

$$r_b + r_d = |I_BI_D| \cdot \sin\sigma.$$

Keďže $|I_AI_C| = |I_BI_D|$, stačí nám dokázať, že $\sin\sigma = \sin\rho$, teda $\sigma = \rho$ alebo $\sigma = 180° - \rho$. Najskôr ale ukážeme, že $I_AI_BI_CI_D$ je obdĺžnik.

Teraz sa na chvíľku odosobnime od označenia, ktoré používame a pozrime sa na toto tvrdenie. Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a stredom vpísanej kružnice I. Priesečník osi uhla ABC a kružnice k rôzny od B označme E. Platí $|AE| = |CE| = |IE|$, z čoho vyplýva napríklad aj to, že E je stred oblúka AC neobsahujúceho B. Toto tvrdenie je známe natoľko, že na olympiádach ho môžete používať bez dôkazu. Ak ho ale nepoznáte, tak si ho určite skúste, najlepšie hneď teraz, dokázať. Je to celkom pekné cvičenie na obvodové uhly. (Nič viac na dôkaz netreba.) Prečo je dobré si ho skúsiť dokázať? Preto, že vám potom viac utkvie v pamäti a zároveň je dosť užitočné. Ak sa totiž v príklade vyskytne os uhla a opísaná kružnica, tak vo väčšine prípadov vás použitie tohto tvrdenia posunie k riešeniu. Vráťme sa teraz k nášmu príkladu obohatení touto zbraňou.

Označme postupne E a F stredy oblúkov AB a CD neobsahujúcich body C a D, respektíve A a B. Z predošlého tvrdenia vieme, že priamky DE, CE, BF a AF sú postupne osi uhlov ADB, ACB, DBC a DAC, $|EI_C| = |EA| = |EI_D|$ a $|FI_B| = |FC| = |FI_A|$. Trojuholníky FI_AI_B a EI_CI_D sú teda rovnoramenné so základňami I_AI_B a I_CI_D. Priesečník priamok AC a BD označme T. Stredy kružníc opísaných trojuholníkom ATD, ATB, BTC a CTD označme postupne K, L, M a N. Vidíme, že aj trojuholníky EKM a FKM sú rovnoramenné. Ak by sa nám to podarilo ukázať, tak by bola priamka I_BI_A rovnobežná s priamkou KM, ale aj priamka I_CI_D by bola rovnobežná s KM, teda I_BI_A a I_CI_D by boli rovnobežné. Ukážme, že $|\sphericalangle EKM| = |\sphericalangle EMK|$:

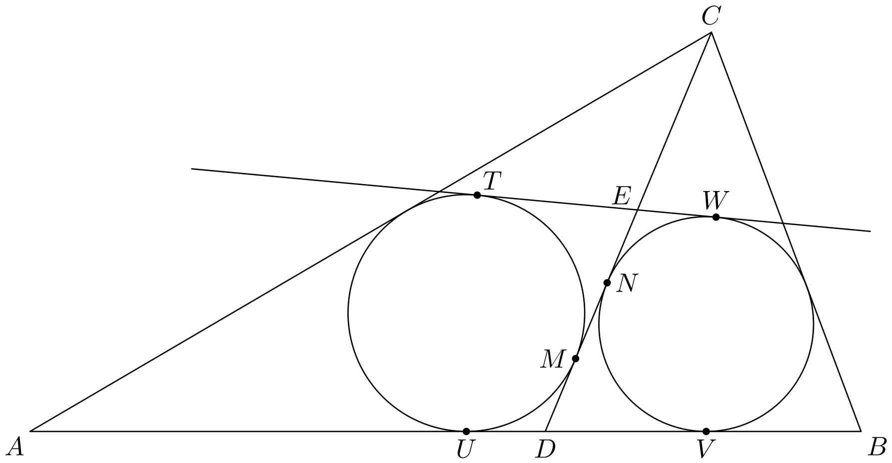
$$\begin{aligned}|\sphericalangle EKM| &= |\sphericalangle EKT| = 180^\circ - |\sphericalangle DKT| = 180^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle KDT| - |\sphericalangle KTD|) = |\sphericalangle KDT| + |\sphericalangle KTD| = \\ &= |\sphericalangle EDB| + |\sphericalangle KTA| = |\sphericalangle ECB| + |\sphericalangle MTC| = |\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle MTC| = |\sphericalangle MCT| + |\sphericalangle MTC| = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle MCT| - |\sphericalangle MTC|) = 180^\circ - |\sphericalangle TMC| = |\sphericalangle TME| = |\sphericalangle KME| = |\sphericalangle EMK|.\end{aligned}$$

Využili sme obvodové uhly a fakt, že K a M ležia na osiach uhlov trojuholníkov ATD a BTC. To, že aj FKM je rovnoramenný trojuholník, platí analogicky. Máme dokázané, že priamky I_AI_B a I_CI_D sú obe rovnobežné s priamkou KM. Analogicky platí aj to, že priamky I_BI_C a I_AI_D sú rovnobežné s priamkou LN. Ak ukážeme, že priamky KM a LN sú navzájom kolmé, tak štvoruholník $I_AI_BI_CI_D$ už bude obdĺžnikom. (Premyslite si, prečo to tak je.) To je celkom jednoduché, lebo veľkosť uhla KTL sa rovná súčtu veľkostí uhlov KTA a ATL, a to sú polovice uhlov ATD a ATB, ktoré dávajú dokopy 180 stupňov. Polovica zo 180 stupňov je presne veľkosť pravého uhla.

Čaká nás posledná časť dôkazu. Ukážeme, že platí $\sigma = \rho$, teda $|\sphericalangle I_BYA| = |\sphericalangle I_CXD|$. Platí $|\sphericalangle I_CXD| = |\sphericalangle I_AXB|$. Vidíme, že platí $|\sphericalangle I_BAY| = |\sphericalangle I_ABX|$, pretože sú to uhly nad oblúkmi rovnakej dĺžky. (F je stred oblúka DC.) Taktiež platí, že $|\sphericalangle I_DI_BI_A| = |\sphericalangle I_CI_AI_B|$, lebo v obdĺžniku zvyknú takéto veci platiť a $|\sphericalangle I_AI_BF| = |\sphericalangle I_BI_AF|$, pretože trojuholník I_AI_BF je rovnoramenný. Preto aj $|\sphericalangle YI_BA| = 180^\circ - |\sphericalangle I_DI_BI_A| - |\sphericalangle I_AI_BF| = 180^\circ - |\sphericalangle I_CI_AI_B| - |\sphericalangle I_BI_AF| = |\sphericalangle XI_AB|$. Zistili sme teda, že v trojuholníkoch I_BYA a I_AXB sú dve dvojice uhlov rovnaké. Z toho vyplýva, že aj posledná dvojica uhlov je rovnaká, ináč povedané, že $|\sphericalangle I_BYA| = |\sphericalangle I_AXB|$. Tým sme dokázali všetko, čo sme potrebovali. Platí $r_a + r_c = r_b + r_d$.
Ak vám ani po treťom prečítaní vzorák nevysvetlil, čo potrebujete, skúste si pozrieť videovzorák.

__Úloha č. 9:__ *Nech D je ľubovoľný bod vnútri strany AB trojuholníka ABC. Bod E vnútri trojuholníka ABC je priesečníkom úsečky CD so spoločnou dotyčnicou kružníc vpísaných trojuholníkom ACD a BCD. Dokážte, že ak budeme hýbať bodom D vnútri úsečky AB, tak bod E bude opisovať oblúk kružnice.*

__Riešenie:__ (opravoval Petržlen a KuboS)
Chceme dokázať, že pri pohybovaní bodu D opisuje bod E oblúk nejakej kružnice. Veľmi by nám pomohlo niečo o tej kružnici vedieť. Čo tak sa pokúsiť nájsť stred kružnice, po ktorej sa bod E pohybuje? Nemôže to byť nejaký už známy bod? V tomto momente si riešenie príkladu vyžadovalo štipku vašej šikovnosti. Rysovaním sa dá prísť na to, že stredom kružnice bude bod C. To bude platiť práve vtedy, keď sa vzdialenosť bodov C a E nemení pre rôzne body D. Ukážme, že dĺžka $|CE| = |CD| - |DE|$ je konštantná.
Na začiatku si ozrejmime jedno elementárne tvrdenie — nazvime ho *kravička*: Majme kružnicu k a bod M mimo kružnice k. Veďme bodom M dotyčnice ku kružnici k ktoré sa dotýkajú kružnice v bodoch T_1 a T_2. Zrejme potom platí $|MT_1| = |MT_2|$.
Označme si teraz všetky dôležité body. Priamka CD sa dotýka kružníc vpísaných trojuholníkom ADC a BDC v bodoch M a N, priamka AB v bodoch U a V a druhá spoločná vonkajšia dotyčnica týchto dvoch kružníc v bodoch T a W.



Keďže priamky TW, UV aj ED sú dotyčnice kružníc vpísaných trojuholníkom ADC a BDC, vyzerá to tak, že dĺžky úsečiek $|TW|$, $|UV|$ a $|ED|$ navzájom nejako súvisia. (Je tam plno vzťahov, ktoré popisuje *kravička*, takže to fakt môže byť pravda).
Zrejme platí, že $|ED| = |DM| + |ME|$. *Kravička* hovorí, že $|DM| = |DU|$ a aj $|EM| = |ET|$. Z toho vieme dĺžku úsečky DE vyjadriť ako $|DE| = |DU| + |ET|$. Analogicky $|DE| = |DN| + |EN| = |DV| + |EW|$. A teda

$$|DU| + |ET| = |DV| + |EW|. \tag{1}$$

Všimnime si tiež, že $|TW| = |UV|$. To vieme odôvodniť napr. zhodnosťou lichobežníkov UVS_2S_1 a TWS_2S_1, kde S_1, S_2 sú stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ADC a BDC. Keď rozpíšeme rovnosť $|TW| = |VU|$ do tvaru podobného rovnosti (1), dostávame rovnosť

$$|ET| + |EW| = |DU| + |DV|. \qquad (2)$$

Zo vzťahov (1) a (2) sa dajú vyvodiť rovnosti $|EW| = |UD|$ a $|TE| = |DV|$. A teda $|ED| = |DU| + |ET| = |DU| + |DV| = |UV|$.
Pre veľkosť úsečky DU platí* $|DU| = (|AD|+|CD|-|AC|)/2$, podobne $|DV| = (|DB|+|CD|-|BC|)/2$. Sčítaním dostaneme $|UV| = |DU| + |DV| = |CD| + (|AB| - |AC| - |BC|)/2$. Nakoniec vyjadríme dĺžku úsečky CE:

$$|CE| = |CD| - |ED| = |CD| - |UV| = |CD| - \left(|CD| + \frac{|AB| - |AC| - |BC|}{2}\right) = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2},$$

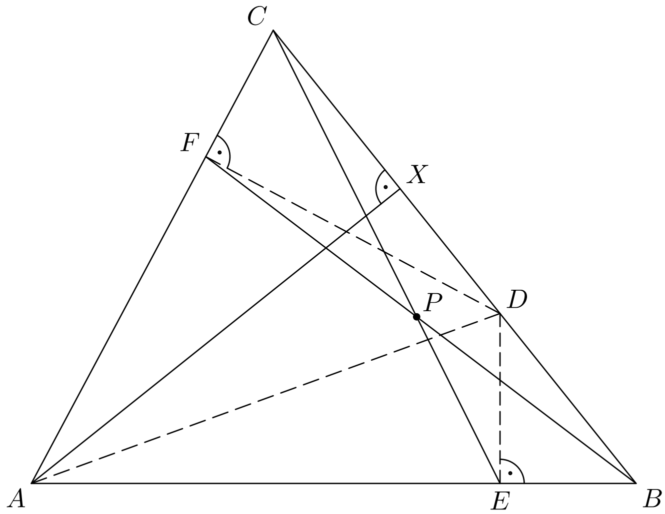
čo je konštanta pre daný trojuholník ABC. Pri pohybovaní bodu D teda opisuje bod E oblúk kružnice so stredom v bode C s polomerom $(|AC| + |BC| - |AB|)/2$.
Vyhrali sme.

* Použili sme vzťah pre dĺžky úsekov, na ktoré sú strany trojuholníka rozdelené bodmi dotyku vpísanej kružnice. Presnejšie, majme trojuholník ABC a jemu vpísanú kružnicu. Tá sa dotýka strán AB, BC a CA v bodoch T, U a V. Potom $|AT| = (|AB| + |AC| - |BC|)/2$. Toto sa dá jednoducho dokázať pomocou *kravičky.* (Skúste si to.)

Komentár: Tento príklad bol netradičný. Jednak nebol zadaný presne, lebo vo všeobecnosti existujú 4 spoločné dotyčnice dvoch kružníc. Niektorí sa opýtali a zistili, že nás zaujíma tá „vrchná“ dotyčnica. Ostatným, ktorí si úlohu urobili ťažšou, sa ospravedlňujeme. Jednak nebolo jasné, čo presne treba robiť. Uhádnuť, že stred kružnice bude práve v bode C, nie je práve štandardný krok. Takisto, vyjadrenie dĺžky $|CE|$ v závislosti od strán trojuholníka ABC vyžadovalo dlhé skúšanie. V konečnom dôsledku príklad nevyžadoval hlboké znalosti geometrie, ale bolo treba dlhým skúšaním nájsť tú správnu cestu. Dúfame, že tento vzorák a príklad bol pre vás poučný.

Úloha č. 10: *Trojuholník ABC nemá pravý uhol. Nech D je ľubovoľný bod vnútri strany BC. Označme postupne E a F päty výšok z bodu D na priamky AB a AC. Nech P je priesečník priamok BF a CE. Dokážte, že priamka AP je výškou trojuholníka ABC práve vtedy, keď AD je osou uhla CAB.*

Riešenie: (opravoval CD a Edo)
Označíme si pätu výšky na stranu CB ako X.



V tomto príklade sme mali dokázať tvrdenie, že priamky AP a AX sú totožné práve vtedy, keď AD je osou uhla BAC. Prvá časť tohoto tvrdenia je ekvivalentná s tým, že AX prechádza bodom P, a teda že sa priamky AX, BF a CE pretínajú v jednom bode (P). To je podľa Cevovej vety ekvivaletné s rovnosťou

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CF}{AF} = 1.$$

Všimnime si, že trojuholníky BED a BXA sú podobné, lebo majú spoločný uhol a oba sú navyše pravouhlé. Rovnako sú podobné trojuholníky CFD a CXA . Z prvej podobnosti vieme, že platí $BE/DE = BX/AX$. To si upravíme na $BE = DE{\cdot}BX/AX$. Podobne si z druhej podobnosti vyjadríme CF a dostaneme $CF = DF{\cdot}CX/AX$. V Cevovej vete sa nám zíde podiel týchto dvoch rovníc a ten po vykrátení AX dáva $CF/BE = (DF \cdot CX)/(DE \cdot BX)$. Teraz si upravíme Cevovu vetu, dosadíme si vyjadrený podiel CF/BE a dostaneme

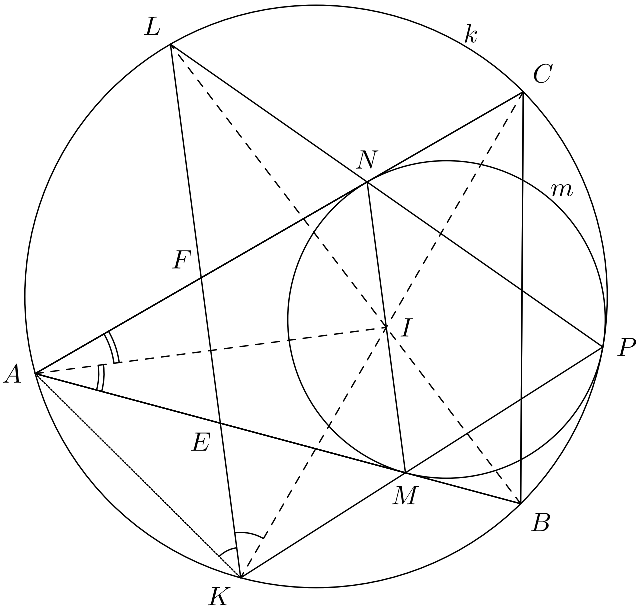
$$1 = \frac{AE}{BE} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CF}{AF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CF}{BE} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{DF \cdot CX}{DE \cdot BX} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{DF}{DE}.$$

Z vyššie uvedeného po úprave dostávame, že $AE/DE = AF/DF$ práve vtedy, keď AD je osou uhla BAC. Avšak rovnosti $AE/DE = AF/DF$ je ekvivalentné, že AED a AFD sú podobné trojuholníky podľa vety *sus*, pretože majú rovnaký uhol $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AFD| = 90°$. Z toho dostávame, že $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle FAD|$ a teda, že AD je osou uhla BAC. Naopak, z rovnosti $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle FAD|$ vyplýva podobnosť trojuholníkov AED a AFD, tentokrát podľa vety *uu*. Tým je dôkaz zadanej ekvivalencie hotový.

Komentár: Väčšina z tých, ktorí to mali dobre, riešila úlohu pomocou goniometrie. Na tom pravdaže nie je nič zlé, vzorák sme ale chceli urobiť bez nej. Dôležitá časť bola Cevova veta, bez ktorej to išlo len veľmi ťažko.

Úloha č. 11: *Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k. Kružnica m leží vnútri uhla CAB, dotýka sa strán AB, AC v bodoch M_1, N_1 a dotýka sa vnútra kružnice k v bode P_1. Body M_2, N_2, P_2 a M_3, N_3, P_3 sú definované podobne pre uhly ABC a BCA. Ukážte, že úsečky M_1N_1, M_2N_2 a M_3N_3 sa pretínajú v jednom bode, ktorý je zároveň ich spoločným stredom.*

Riešenie: (opravoval Filip a Matúš)
Je zrejmé, že stredy úsečiek M_iN_i ležia na osiach uhlov. Ak majú všetky tieto tri body splynúť, tak musia byť totožné so stredom vpísanej kružnice. Zvyšné dve situácie sú úplne analogické, preto si BUNV zoberme kružnicu m, dotykové body $M = M_1$, $N = N_1$, $P = P_1$ a dokážme, že stred úsečky MN je priesečník osí uhlov. Vydáme sa dvomi rôznymi cestami:



(Podľa *Adely Abaffyovej.*)
Stred úsečky MN určite leží na osi uhla CAB. Problém je s ostatnými dvomi osami. To sú priamky CK a BL, kde K a L sú stredy oblúkov AB a AC na kružnici k, ktoré neobsahujú tretí vrchol trojuholníka ABC. Platí to kvôli obvodovým uhlom a je dobré to mať vždy na pamäti. Všimnime si teraz dve veci:

1. Body P, M, K sú kolineárne[3] a takisto body P, N, L.

   Využijeme rovnoľahlosť kružníc m a k so stredom v bode P. Tá zobrazuje dotyčnice na dotyčnice a priamky na rovnobežné priamky. Ale dotyčnica ku k v bode K je rovnobežná s AB, lebo K je stred oblúka. Preto sa tieto dve priamky zobrazia jedna na druhú, a teda bod M sa zobrazí na bod K.

2. Priamka KL prechádza cez stredy úsečiek AM a AN, označme ich E, F.

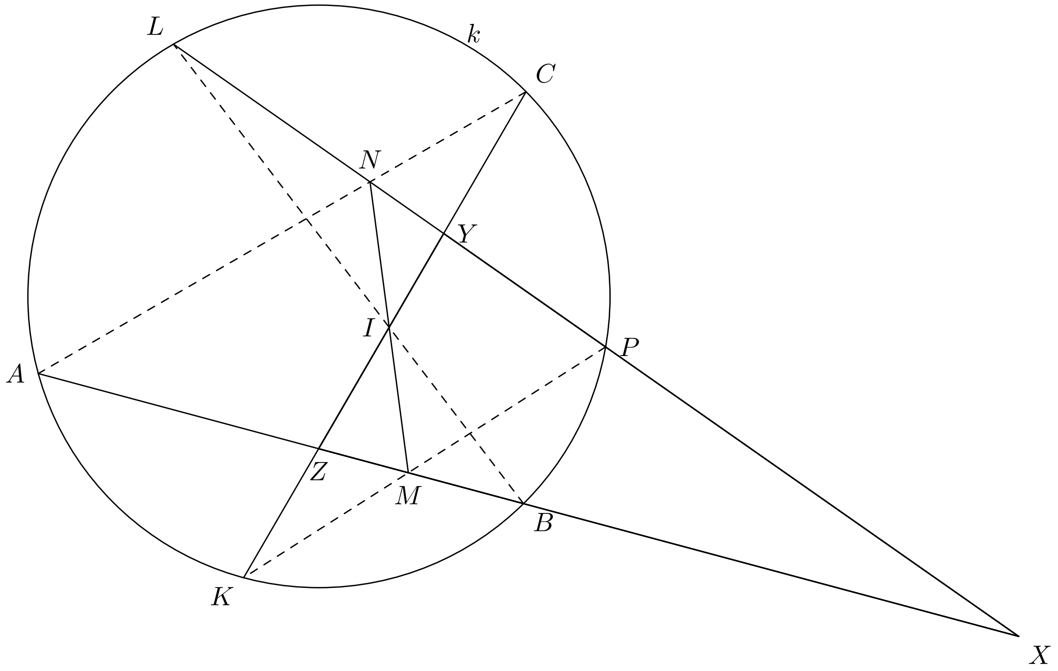
   Tu prichádza pointa tohoto riešenia. Povieme si, že bod je špeciálny prípad kružnice — kružnica s nulovým polomerom. Keď už máme takúto definíciu, má zmysel uvažovať o chordále[4] bodu a kružnice. Sami si overte, že všetko funguje, ako má. Preto priamka EF je chordála bodu A a kružnice m.
   Zostrojme kružnicu l cez body A, M, P. Priamka MP je chordála kružníc l a m. Čo je chordála A a l? Predsa dotyčnica ku kružnici l v bode A. A to je presne priamka AK. Keďže K je stred oblúka na kružnici m, tak $|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle KPA| = |\sphericalangle MPA|$ a tvrdenie vyplýva z nájdeného *úsekového uhla* KAM, ktorého veľkosť sa rovná veľkosti obvodového uhla APM.
   A teraz finta. Máme tri kružnice a k nim tri chordály, ktoré nie sú navzájom rovnobežné. Prečo? Lebo chordály

[3] ležia na jednej priamke
[4] *Chordála* dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť ku obidvom kružniciam a vždy je to priamka kolmá na spojnicu ich stredov.

MP aj AK prechádzajú bodom K. Odtiaľ hneď dostávame, že K je potenčný bod[5] daných troch kružníc a prechádza ním aj tretia chordála EF. Analogicky tiež bod L leží na EF.

Záver: Trojuholník MNA je rovnoramenný, takže bod A sa podľa strednej priečky preklopí na stred úsečky MN, označme ho I. V tej istej osovej súmernosti sa priamka KA preklopí na priamku KI, ale takisto na priamku KC, lebo $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LKC|$, takže priamky KI a KC sú zhodné. Dostali sme, že K, I, C sú kolineárne, čo bolo treba dokázať. Takisto dostaneme, že B, I, L sú kolineárne.

Iné riešenie:
(Podľa *Le Anh Dunga.*)
Priesečníky priamok PM a PN s kružnicou k, rôzne od P, označme K, L, v tomto poradí. V rovnoľahlosti so stredom v bode P a nejakým koeficientom r sa kružnica m zobrazí na k, pretože m sa dotýka k v bode P. V tejto rovnoľahlosti sa body M a N zobrazia na body K, L. Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme povedať, že AB je vodorovná a C sa nachádza nad ňou. (Len si tak otočíme alebo preklopíme obrázok, aby to platilo.) Potom M je najnižším bodom kružnice m, lebo všetky body kružnice m okrem M ležia nad úsečkou AB, ktorej sa dotýka v M, takže M sa v už spomínanej rovnoľahlosti zobrazí na najnižší bod kružnice k. Keďže AB je vodorovná, najnižší bod oblúka AB kružnice k je zároveň aj stredom tohto oblúka. Preto K je stredom oblúka AB kružnice k. Analogicky sa dokáže, že L je stredom oblúka AC kružnice k.



V nasledujúcej časti dokážeme Pascalovu vetu. V skutočnosti táto veta platí pre ľubovoľnú kužeľosečku, no my si dokážeme len slabšie tvrdenie pre kružnicu.

Pascalova veta (pre kružnicu): Nech šesť bodov A, B, L, P, K, C leží, nie nutne v tomto poradí, na kružnici k. Potom ak existujú priesečníky priamok AB a PK, BL a KC, LP a CA, tak tieto tri priesečníky ležia na jednej priamke.

Dôkaz: Nech trojuholník XYZ je ohraničený priamkami AB, LP, KC. Potom z Menelaovej vety pre trojuholník XYZ a priamku AC, ktorá pretína jeho strany[6] v bodoch A, C, N, platí

$$\frac{XA}{AZ} \cdot \frac{ZC}{CY} \cdot \frac{YN}{NX} = -1.$$

Podobne pre priamky PK resp. BL, ktoré pretínajú strany trojuholníka XYZ v bodoch M, K, P resp. B, I, L, vyplývajú z Menelaovej vety rovnosti

$$\frac{XM}{MZ} \cdot \frac{ZK}{KY} \cdot \frac{YP}{PX} = -1,$$
$$\frac{XB}{BZ} \cdot \frac{ZI}{IY} \cdot \frac{YL}{LX} = -1.$$

[5]Keď máme tri kružnice, vieme im po dvoch priradiť chordály. Tie sú buď navzájom rovnobežné, alebo sa pretínajú v jednom bode s názvom *potenčný bod.*
[6]Stranami tu myslíme aj ich prípadné predĺženie.

Ich vynásobením dostávame

$$\frac{XA}{AZ}\cdot\frac{ZC}{CY}\cdot\frac{YN}{NX}\cdot\frac{XM}{MZ}\cdot\frac{ZK}{KY}\cdot\frac{YP}{PX}\cdot\frac{XB}{BZ}\cdot\frac{ZI}{IY}\cdot\frac{YL}{LX}=-1.$$

Z mocnosti bodov X, Y, Z ku kružnici k máme rovnosti $XB\cdot XA = XP\cdot XL$, $YC\cdot YK = YP\cdot YL$, $ZK\cdot ZC = ZA\cdot ZB$. Vykrátením týchto výrazov v predchádzajúcom súčine (nezmení nám to znamienko, lebo vždy sú v menovateli obidve úsečky opačne orientované) dostávame

$$\frac{YN}{NX}\cdot\frac{XM}{MZ}\cdot\frac{ZI}{IY}=-1,$$

čo je presne Menelaova veta pre trojuholník XYZ a body N, M, I ležiace na jeho stranách. Takže naozaj dostávame, že tieto tri body sú kolineárne.

Najprv dokážeme, že I leží na úsečke MN. Keďže šestica bodov A, B, C, K, L, P leží na jednej kružnici, platí pre ne už spomínaná Pascalova veta, čiže $AB\cap PK$, $BL\cap KC$, $LP\cap CA$ sú kolineárne. Toto môžeme tvrdiť, lebo každý z tých priesečníkov existuje. Totiž v našom prípade sú body na kružnici vždy v poradí A, K, B, P, C, L. (Rozmyslite si.) Lenže $M\in AB\cap PK$, $N\in LP\cap CA$ a $I\in BL\cap KC$, lebo K, L sú stredy oblúkov AB, AC. Preto CK, BL sú osami uhlov ACB a ABC v trojuholníku ABC a I je stred kružnice vpísanej, takže je priesečníkom osí uhlov. Odtiaľ platí, žeM, I, N sú kolineárne.
Teraz ukážeme, že trojuholníky AMI, ANI sú zhodné podľa vety *sus*. Kružnica m sa dotýka strán AB a AC v bodoch M a N, preto platí $|AM| = |AN|$. Keďže I je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, AI je osou uhla BAC, preto $|\sphericalangle MAI| = |\sphericalangle NAI|$. A stranu AI majú tieto trojuholníky spoločnú. Sú teda naozaj zhodné a z tejto zhodnosti máme aj rovnosť zodpovedajúcich strán $|MI| = |NI|$.
Dokázali sme, že body M, I, N sú kolineárne a tiež $|MI| = |NI|$. Z toho máme, že I je stredom úsečky MN. Analogicky sa to dá dokázať aj pre úsečky M_2N_2, M_3N_3. Preto sa všetky tri pretínajú v bode I, ktorý je zároveň ich stredom.

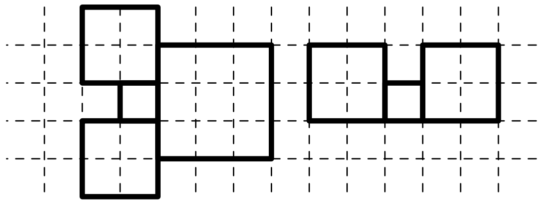
Komentár: Štyrom úspešným borcom gratulujeme. O to viac, že každý mal úplne odlišné riešenie. Dve ste mali možnosť vidieť. *Jakub Šafin* a *Martin Vodička* sa popasovali s úlohou vyjadrovaním dĺžok cez sínusy a kosínusy. Zaujímavosťou Martinovho prístupu bol pohľad, ktorým sa pozrel na úlohu odzadu. Zostrojil kružnicu, ktorá sa dotýkala strán trojuholníka v priesečníkoch priamky prechádzajúcej stredom vpísanej kružnice a zároveň kolmej na os uhla, so stranami trojuholníka. O nej potom ukázal, že sa dotýka zvnútra opísanej kružnice. Vieme, že taká kružnica, ktorá sa dotýka strán trojuholníka a zvnútra opísanej kružnice, je práve jedna a tým je dôkaz hotový. Nebolo to také elegantné ako vzorové riešenia, ale keď to inak nejde, dakedy sa oplatí pustiť aj do analytiky.

Nasleduje 5. príklad z 1. série.

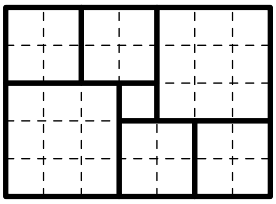
Úloha č. 5, 1. séria: *Obdĺžnik nazývame štvorčekový, ak sa dá rozrezať na dva alebo viac štvorcov s celočíselnými dĺžkami strán tak, že najmenší z nich je unikátny (t. j. je tam taký len jeden). Nájdite rozmery štvorčekového obdĺžnika s najmenším možným obsahom.*

Riešenie: (opravovali Kubman, Lindtka a Tinka)
Určite mnohí riešitelia, po prečítaní tohto príkladu, zobrali do ruky štvorčekový papier, ceruzku a začali skúšať. Tento postup je samozrejme správny, pretože predstavovať si to len v hlave je omnoho náročnejšie. Je dosť pravdepodobné, že riešiteľ vie po konečnom počte krokov prísť k výsledku, ale skúsme sa nad tým rozumnejšie zamyslieť a ušetriť si tým prácu a veľa papiera.
Ako prvé, čo by nás mohlo zaujímať je to, kde sa bude nachádzať ten najmenší štvorček. Bude v rohu? Na kraji? Či 47. zľava?
Skúsme si predstaviť, čo by sa stalo, keby bol náš najmenší štvorček na kraji, BUNV[7] na spodnom kraji. Keďže je najmenší a unikátny, zhora s ním musí susediť väčší štvorček. Tým pádom naľavo alebo napravo od najmenšieho štvorčeka ostáva nezaplnený priestor, ktorý ale nemáme čím vyplniť, lebo najmenší štvorček nesmieme použiť znovu a väčší štvorček sa tam nezmestí. Takže najmenší štvorček nemôže byť na kraji a tým pádom ani v rohu. (Byť v rohu je len špecifický prípad umiestnenia na kraji.)
Už vieme, že najmenší štvorček je zo všetkých strán obkolesený štvorčekmi. V prípade, že dĺžka strany najmenšieho štvorčeka je 1, vieme, že ho budú obkolesovať štvorčeky s dĺžkou strany aspoň 2. Preto oba rozmery štvorčekového obdĺžnika musia byť minimálne $1 + 2 + 2 = 5$. Všeobecne, ak by bola dĺžka strany najmenšieho štvorčeka k, tak strany štvorčekového obdĺžnika by boli minimálne $3k + 2$. (Premyslite si to.)

[7] bez ujmy na všeobecnosti



Akú pozíciu budú mať tieto susedné štvorčeky? Vieme, že všetky štyri susedné štvorčeky sú väčšie ako najmenší štvorček, preto budú z aspoň jednej strany najmenšieho štvorčeka „vyčnievať“. Ako môžeme vidieť na obrázku, ak susedný štvorček bude vyčnievať z oboch strán, alebo ak protiľahlé susedné štvorčeky budú vyčnievať z rovnakej strany, nebudeme môcť vyplniť priestor, ktorý vznikne. Preto musí každý susedný štvorček najmenšieho štvorčeka vyčnievať iba z jednej strany a z opačnej ako protiľahlý susedný štvorček. Posnažme sa teda poskladať s pomocou týchto informácií čo najmenší štvorčekový obdĺžnik.



Ako vidno na obrázku, vieme poskladať obdĺžnik rozmerov 5×7. Na to sa dalo prísť po chvíľke kreslenia. Ale vieme poskladať menší? Vieme už, že štvorčekový obdĺžnik musí mať dĺžky oboch strán aspoň 5, čiže ak chceme poskladať menší obdĺžnik ako 5×7, musí mať rozmery buď 5×6 alebo 5×5. (6×6 nie, lebo $6 \cdot 6 = 36 > 35 = 5 \cdot 7$.)
Z toho vyplýva, že jeden rozmer obdĺžnika musí byť 5. Pri strane dĺžky 5 musí ležať nejaký štvorček s nepárnou dĺžkou strany. (Lebo súčet párnych čísel je vždy párne číslo a 5 je nepárne.) Keďže štvorček 1×1 je unikátny a neleží pri žiadnej strane obdĺžnika, musí pri strane dĺžky 5 ležať štvorček aspoň 3×3. To isté však platí aj pre protiľahlú stranu obdĺžnika, preto jeho druhý rozmer musí byť aspoň $1 + 3 + 3 = 7$. Takže najmenší štvorčekový obdĺžnik má rozmery 5×7.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	3.	GAlej KE	7	8			9	9	9	9	8		44	89
2.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	2	0			9		9	9	9		36	77
3.	Horňák Marián	4.	GPár NR	10	9			9	8	9	9			35	72
3.	Lukáček Viktor	4.	GsvM PO	4	1		9	9	9	9				36	72
3.	Šimsa Štěpán	3.	Litoměřice ČR	5	5			9	9	9				27	72
6.	Žídek Augustin	4.	Frýdlant ČR	10	4			9	5	9	5			28	67
7.	Tóth Michal	4.	GJH BA	10	6			9	9		9			27	64
8.	Hledík Michal	3.	GJH BA	6	2		9	9						18	62
9.	Kopf Michal	4.	Opava ČR	10	5			5	5	9	9			28	60
10.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	1	0	8	2	4	9					23	59
10.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3	0		9	9			9			27	59
12.	Korbela Michal	2.	G Bánovce	4	0	6	5	2	9		9			31	56
12.	Šafin Jakub	3.	GPH MI	6	3			2	9			9		20	56
14.	Galovičová Soňa	4.	GJH BA	10	7			9	9		9			27	55
14.	Kossaczká Marta	3.	Gamča BA	7	4			9			9			18	55
16.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	3	0	8	7	5	5					25	54
16.	Stankovič Miroslav	2.	GPoš KE	4	3			9						9	54
18.	Hlaváčik Matúš	3.	GAlej KE	6	2		9	9		8				26	51
18.	Lipovský Mário	2.	GJH BA	4	0	1	6	9						16	51
18.	Šimková Ľudmila	2.	GPár NR	4	0	0	0	3	9					12	51
21.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	1	0	9	9	9						27	50
22.	Koprda Pavol	4.	GAM TT	9	3			5	5					10	47
22.	Psota Miroslav	2.	GHlin ZA	4	0	0	9		9					18	47
24.	Kavický Dušan	3.	GJH BA	5	2		9	9						18	45
25.	Halajová Barbora	4.	GVO ZA	9	3			3			9			12	41
26.	Jasenčáková Katarína	4.	GVO ZA	10	4			4			9	0		13	40
26.	Magyarová Zuzana	2.	GBST LC	4	0		5	6		2				13	40
28.	Prívozník Matej	2.	GJH BA	4	0		9							9	39
29.	Gonda Tomáš	3.	Gamča BA	4	1		8	6	7					21	38
29.	Hrivová Ivona	2.	GVO ZA	4	0	1	6		2		0			9	38
31.	Hofierka Jaroslav	2.	GJAR PO	4	0	1	5							6	37
31.	Ječmenová Andrea	2.	GVO ZA	4	0	2	5					0		7	37
31.	Vlachynská Petra	4.	GJH BA	7	0	4	9	4						17	37

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
34.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	2	0									0	36
34.	Vlček Andrej	4.	EvSŠ LM	7	2		9							9	36
36.	Matejovičová Tatiana	3.	Gamča BA	4	0	3	5							8	35
37.	Červeňák Michal	3.	G Púchov	4	0	1	4	0						5	33
38.	Belanová Michaela	4.	ŠPMNDG BA	9	3			4	0			1		5	32
38.	Pokrývka Filip	2.	G Bánovce	4	0	2	5	1						8	32
38.	Surovčík Juraj	3.	GPOH DK	6	1		5							5	32
41.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	1	0		5							5	31
41.	Zhen Ning Dávid Liu	2.	Gamča BA	2	0	4	5							9	31
43.	Ficková Klára	4.	GPoš KE	6	3			1	1	0				2	30
43.	Marečáková Barbora	4.	GKuk PP	10	4			3						3	30
45.	Hraška Peter	3.	Gamča BA	4	0	1	1	2						4	29
46.	Nociarová Jela	3.	GBST LC	6	1	6	8	6						14	28
46.	Svoboda Josef	3.	Frýdlant ČR	4	1									0	28
48.	Kello Tomáš	3.	GJAR PO	3	0	2	5							7	27
48.	Krakovská Hana	2.	Gamča BA	4	0	9	5							14	27
50.	Petrucha Jaroslav	3.	GMet BA	7	2									0	26
51.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	3	0	1	6	5						12	25
52.	Mojžišová Karolína	2.	Gamča BA	4	0	2	4	2	0					8	24
52.	Teiml Dominik	3.	AG Praha	5	3									0	24
54.	Bock Michal	3.	Gamča BA	5	1									0	23
54.	Gafurov Askar	3.	Gamča BA	5	1		5							5	23
54.	Kováčová Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0		9							9	23
54.	Pellerová Daniela	3.	Gamča BA	7	3			3			1			4	23
58.	Greššák Jerguš	3.	ŠPMNDG BA	4	0	2	7							9	22
58.	Puza Marko	2.	GPoš KE	2	0	2	9							11	22
60.	Komanová Kristína	3.	GAS BB	6	2		5	0		0				5	21
61.	Hanzely Filip	3.	GAP SB	7	3			1						1	19
62.	Abaffyová Adela	2.	GMH Trstená	2	0						9	9		18	18
62.	Macko Vladimír	3.	GĽŠ ZV	6	3									0	18
62.	Magurová Lucia	3.	GPoš KE	5	0		9							9	18
62.	Smolík Martin	3.	Gamča BA	5	0									0	18
66.	Zemková Kristýna	4.	Prachatice ČR	5	1		8							8	17
67.	Faguľová Kristína	4.	GPoš KE	9	3									0	15
67.	Klembarová Barbora	4.	GKuk PP	10	4									0	15
69.	Kurdelová Alžbeta	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	13
70.	Galanová Miriam	2.	GJH BA	2	0									0	12
70.	Vozárová Viktória	2.	GJH BA	3	0									0	12
72.	Mikloš Martin	4.	EvLýc BA	4	0	1	2							3	11
72.	Rako Matúš	1.	Gamča BA	1	0		0							0	11
74.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3	0		5							5	7
74.	Semanišinová Denisa	3.	GAlej KE	5	0									0	7
74.	Šandalová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	7
77.	Santer Martin	3.	GMH Trstená	5	0									0	5
77.	Šromeková Karolína	2.	GDT PP	4	0									0	5
79.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3	0	1	2	0			0			3	4
80.	Polovka Maroš	2.	GKuk PP	3	0	1								1	2
81.	Fiľová Lucia	4.	HA BR	4	0	1	0					0		1	1
81.	Melošová Veronika	3.	GJCh BR	4	0									0	1
81.	Pivovarník Roman	2.	GJAR PO	4	0									0	1
84.	Vozárová Zuzana	4.	GJH BA	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	1	9	9	9	7	8	2	4		87
2.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	1	9	8	9	7	9	9	9		86
3.	Longa Marián	1.	ŠPMNDG BA	1	7	9	9	5	6				79
4.	Lâm Tuân Dûng	1.	GJH BA	1	6	1	9	3		9	7		67
5.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	1	9	4	9	3		4			66
6.	Rako Matúš	1.	Gamča BA	1	8	4	2	3		0			51
7.	Palko Maximilián	2.	1SG BA	2		7	9	3		2			50
8.	Králik Matej	1.	GJH BA	1	6	9	2	3					48
8.	Šteňová Júlia	1.	GJH BA	1	4	7	2		9				48
10.	Ďuratná Petra	1.	ŠPMNDG BA	1	6	9	2	3	1				47
11.	Veselá Simona	1.	GJH BA	1	5	7	9		2				44
12.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	2		4	3	5	0	3			41
13.	Ďurajková Hana	1.	GJH BA	1	7	6			1				38
14.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	3					8	7	5		36
15.	Murin Martin	1.	GJH BA	1	6	4	2	3	2				35
16.	Pilňan Branislav	1.	GJH BA	1	8	7							33
17.	Svitková Patricia	2.	GLN BA	2		9	9						28
18.	Martinková Sandra	1.	GJH BA	1	7	6	2	2		0			26
19.	Zhen Ning Dávid Liu	2.	Gamča BA	2					4	5			24
20.	Híveš Zdenko	2.	1SG BA	2		3	9	2		2			22
21.	Vozárová Viktória	2.	GJH BA	3									19
22.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3			1	2	0		0		15
23.	Galanová Miriam	2.	GJH BA	2									11
24.	Ošková Eva	2.	GJH BA	2									7
25.	Vajner Elisabeth	1.	GLS BA	1									6
26.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3						5			5
27.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3					1	2	0		4

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Horváth Samuel	2.	GPár NR	3			9	3	0	3	1		57
2.	Mikulec Jaromír	1.	GsvJ NM	1	7		3	2	1	1	1		45
3.	Kluvanec Roman	1.	GPár NR	1	7	4	2	3	1		0		44
4.	Kováčová Mária	1.	GsvCM NR	1	8	9	1	2					42
5.	Daniel Mark	2.	GPár NR	3			6	6		9			40
6.	Tóth Andrej	2.	GPár NR	2		4	1		1				38
7.	Marčeková Katarína	1.	GPár NR	1	7	0	0	0		1	1		37
8.	Bieliková Michaela	2.	GVMS	2		4	2	3		0			33
8.	Prešinská Kristína	1.	GPár NR	1	7	0	0	0		1	0		33
10.	Straková Valentína	2.	GVMS	2		9		3	2				32
11.	Hladká Barbora	1.	GPár NR	1	8	0	0	3		1	0		26
12.	Kuťka Daniel	2.	GPár NR	2									22
13.	Balážová Michaela	2.	G Bánovce	3			2	0	2	1			20
14.	Matiaško Dušan	2.	GVBN PD	2									3
15.	Šuppa Marek	3.	GsvCM NR	3									2

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Nepšinská Silvia	1.	GJCh BR	1	8	9		7	2	3			72
2.	Kňaze Adam	1.	GJCh BR	1	7	9	2	2	2				53
3.	Mores Martin	2.	GVar ZA	2		9	5	5	2	4			49
4.	Tomašec Samuel	2.	GVar ZA	2		9	9	5	5				48
5.	Dráček František	1.	GŠkol PB	1	7	4	2	5		4			45
5.	Labjaková Gabriela	1.	GMH Trstená	1	8	4	2	2			1		45
7.	Cimerman Jakub	3.	GJGT BB	3			9	3	1	5			39
7.	Santrová Michaela	1.	GMH Trstená	1	2	4	2	3	2				39
9.	Rizman Daniel	2.	GVar ZA	2		4	2	7	1				36
10.	Halamová Mária	1.	GVO ZA	1	6	4	2	3	1				34
11.	Hradňanská Petra	1.	GVar ZA	1	4	4	2	1	1	0	0		21
12.	Šeligová Kristína	1.	GsvFA ZA	1									15
13.	Abaffyová Adela	2.	GMH Trstená	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	1	8	9	9	7		5			83
2.	Jarošová Dorota	1.	GAlej KE	1	8	3	9	5		5	1		65
3.	Puza Marko	2.	GPoš KE	2		9	3	3	2	9			53
4.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	3			9	7	1	6	5		51
5.	Rapavý Martin	2.	GAlej KE	3			9	5	1	4			50
6.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	1	9	4	2	3			0		45
7.	Oravcová Martina	2.	GPoš KE	2		8	2	3	1	4	0		44
8.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3						9	9		32
8.	Jursa Ján	2.	GPoš KE	2		9	2	3		9			32
10.	Ženčuchová Andrea	1.	GJAR PO	1	7	0	1	3					31
11.	Flóriánová Lucia	2.	GPoš KE	2		9	9	3		9			30
12.	Dudič Ján	3.	GPoš KE	3			3	3		2	3		24
12.	Kello Tomáš	3.	GJAR PO	3					2	5			24
14.	Lukáč Jakub	2.	GKuk PP	2		9	1	2	1				20
15.	Fedák Marek	1.	CGsvM SL	1									18
16.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	2									9
17.	Országh Marián	2.	GJAR PO	3				2	1	4			7
17.	Stehlík Mojmír	1.	GTreb KE	1									7
19.	Bašista Adam	2.	GKuk PP	2		2	2	1					6
20.	Polovka Maroš	2.	GKuk PP	3					1				1

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	$\mathbf{k}_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Žárský Jan	1.	Kopřivnice ČR	1	8	9	9	4					68
2.	Štěpánek Martin	1.	Příbor ČR	1	8	4	3	3	1				53
3.	Zlocha Martin	1.	Kirchberg LU	1	4	4	2	2	1				47
4.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	2							9		16