Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2011/2012

Úloha č. 1: *Bača a jeho žena Anička našli pod posteľou 25 korbáčikov. Bača navrhol rozdeliť si ich nasledovnou hrou: položia všetky korbáčiky na stôl a striedavo si odtiaľ budú brať. Vždy si musia zobrať taký počet korbáčikov, ktorý je deliteľom počtu korbáčikov práve položených na stole. Nie je však povolené zobrať všetky, dokiaľ neostane posledný korbáčik. Kto získa viac korbáčikov, ak začína Anička a obaja hrajú ideálne?*

Riešenie: (opravoval Foxie, Betka)
Na začiatku máme pod posteľou 25 korbáčikov. Je dobré uvedomiť si, že ten, kto získa 13 korbáčikov, už vyhral, lebo má viac ako polovicu. Poďme si po jednotlivých ťahoch rozobrať, akými smermi sa môže hra uberať, a ktorý z dvojice vyhrá. Anička začína podľa pravidiel, na ktorých sa dohodli s bačom — môže ťahať jeden alebo päť korbáčikov. Pre prehľadnosť budeme namiesto Anička písať A a miesto bača B.

- Ak by A zobrala len 1 korbáčik, na stole by ich ostalo 24. Tu má B na výber veľa možností, koľko potiahnuť (12, 8, 6, 4, 3, 2, 1). Lenže ak vezme 12 korbáčikov, už potrebuje len 1 aby mal 13. To sa mu určite podarí dosiahnuť, keďže čokoľvek by A ďalej vzala, B sa ešte dostane na ťah.

- Môžeme usúdiť, že ideálne hrajúca A by si jeden korbáčik nepotiahla, ak by mala lepšiu možnosť. Pozrime sa na situáciu, keď v prvom ťahu potiahne 5 korbáčikov. A má 5 korbáčikov, B nič a na stole je 20 korbáčikov. Tu by sa riešenie malo znova deliť, pretože B má niekoľko možností (10, 5, 4, 2, 1).
  - Ak B potiahne 10, A môže v ďalšom ťahu potiahnuť 5. (Ak by A potiahla 2 respektíve 1, B môže následne potiahnuť 5 respektíve 3 a tým vyhrá, keďže A koná ideálne, vyhne sa týmto možnostiam.) B ďalej nemá inú možnosť ako 1, A potiahne 2, B potiahne 1, A posledný korbáčik a vyhrala. Žiaľ, niektorí ste v tomto momente povedali, že A má výhernú stratégiu. Nie je to však tak, pretože B nemusí tých 10 potiahnuť.
  - Ak však B potiahne 5 korbáčikov, ostane 15 a A ostane na výber zobrať si 5, 3 alebo 1 korbáčik. Obaja hráči majú 5 korbáčikov, na stole je ich 15, na ťahu je A a my ideme zasa deliť riešenie.
    - Ak A vezme 5, B si môže vziať 5 korbáčikov, A nemá na výber a vezme 1, B si vezme 2, A jeden, B vezme posledný a vyhral.
    - Ak A zoberie 3 korbáčiky, ostane 12, B môže zobrať 6 a čokoľvek A spraví, B dokáže získať aspoň 2 korbáčiky, ktoré ho delia od výhry. Presvedčte sa sami, ostáva 6 korbáčikov a na ťahu je A.
      - Ak A zoberie 3, priebeh hry je už jasný, pretože sa vždy dá potiahnuť len 1 a B získa 2.
      - Ak A zoberie 2, B môže rovno potiahnuť 2.
      - Ak A zoberie 1, B potiahne 1, A nemôže hru ukončiť, čiže sa na ťah dostane aj B, takže získa aj ďalší korbáčik.
    - Napokon, ak A vezme len 1 korbáčik, na stole ostane 14 korbáčikov. B môže spraviť všeličo, ale zaujímavý nápad je, pokúsiť sa nechať A prvočíslo, aby mohla zobrať v ďalšom ťahu len 1. Najväčšie, čo môže vziať, aby ostalo prvočíslo je 7. Tým pádom má zároveň 12 a keďže sa určite ešte dostane na ťah, má vyhraté.

  V poslednom uvedenom prípade B určite vyhrá, a keďže hrá ideálne, určite bude ťahať tak, ako je uvedené pri jednotlivých možnostiach.

Záver: Bača má výhernú stratégiu pre čokoľvek, čo by mohla Anička spraviť.

Úloha č. 2: *Pastieri pred spaním počítajú ovce. Pastier Mišo ich napočítal x, pastier Laco ich napočítal y. Bača o číslach x a y vie len to, že pre ne platí*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}.$$

Pomôžte bačovi nájsť všetky možné dvojice prirodzených čísel x a y.

Riešenie: (opravoval Kozzy a Kubo)
Skôr, ako začneme rozmýšľať nad tým, aké čísla by sa dali doplniť za x a y, rovnicu upravíme do takého tvaru, nad ktorým sa nám bude rozmýšľať lepšie. Keďže x, y sú prirodzené, môžeme nimi násobiť a bude to ekvivalentná úprava. Skúsme najprv odstrániť počty ovečiek z menovateľa, prenásobíme rovnicu xy:

$$x + y = \frac{xy}{2011}.$$

Na ľavej strane máme zjavne prirodzené číslo, to znamená, že číslo na pravej strane bude tiež prirodzené. Potom vieme, že xy je deliteľné 2011. Lenže 2011 je prvočíslo, teda nemá ani s x ani s y žiadneho spoločného deliteľa medzi 1 a 2011. Keďže sme zistili, že xy je deliteľné 2011, aspoň jedno z dvojice x, y musí byť násobkom 2011. Bez ujmy na všeobecnosti zvolíme x. (Keby sme zvolili y, ďalší postup by bol rovnaký.) Pre nejaké prirodzené číslo k vieme potom x zapísať ako súčin $2011 \cdot k$. Dosaďme do rovnice a upravujme:

$$\begin{aligned}
2011k + y &= \frac{2011ky}{2011} \\
2011k + y &= ky \\
2011k &= ky - y \\
2011k &= y(k-1).
\end{aligned}$$

Pravá strana je násobkom $k - 1$, teda ľavá strana bude tiež násobkom tohto čísla. Každé dve po sebe idúce čísla, teda aj k a $k-1$ sú nesúdeliteľné, ich najväčší spoločný deliteľ je 1. Z toho vyplýva, že $k-1$ delí 2011. Tým pádom dostávame len dve možnosti, $k - 1 = 1$ a $k - 1 = 2011$. V prvom prípade z poslednej rovnice máme $y = 4022$ a $x = 2011 \cdot 2 = 4022$. V druhom prípade $y = 2012$ a $x = 2011 \cdot 2012$. Nesmieme zabudnúť, že existuje aj symetrické riešenie, kde x a y vymeníme, teda tretie a posledné riešenie je $x = 2012$ a $y = 2011 \cdot 2012$. Na toto riešenie by sme prišli, keby sme za násobok 2011 namiesto x zvolili y.

Úloha č. 3: *Turnaja v jedení oštiepkov sa zúčastnilo jedenásť valachov. V každom kole proti sebe súťažili naraz piati valasi (každý proti každému). Po turnaji sa zistilo, že každí dvaja valasi súperili proti sebe práve dvakrát.*

a) Koľkých kôl sa zúčastnil jeden valach?

b) Koľko kôl mal celý turnaj?

c) Je možné, že sa Jano, Fero a Paľo stretli všetci traja spolu vo viacerých kolách?

Riešenie: (opravoval Natali a Jefo)

a) V jednom kole proti sebe súťažili piati valasi, každý s každým, takže každý odohral 4 zápasy. Každý z jedenástich súťažiacich odohral dokopy 20 zápasov (po 2 zápasy s desiatimi súpermi), teda každý valach sa za celý turnaj zúčastnil $20/4 = 5$ kôl.

b) Teraz potrebujeme zistiť, koľko kôl sa dokopy odohralo. Na to potrebujeme zistiť celkový počet odohraných zápasov a počet zápasov odohraných v jednom kole turnaja. Začneme jedným kolom: z piatich valachov, ktorí proti sebe súťažili, vieme vytvoriť $\binom{5}{2} = 5 \cdot 4/2 = 10$ rôznych dvojíc. Každá takáto dvojica odohrala spolu jeden zápas, takže v jednom kole sa odohralo dokopy 10 zápasov. Podobne je to aj s celým turnajom: zúčastnilo sa 11 valachov, z ktorých vieme vytvoriť $\binom{11}{2} = 11 \cdot 10/2 = 55$ dvojíc. Každá dvojica odohrala dva zápasy, takže celkovo sa odohralo 110 zápasov. Teraz už vieme, že turnaj mal $110/10 = 11$ kôl.

c) Našou úlohou je zistiť, či sa mohli Jano, Fero a Paľo stretnúť všetci traja vo viacerých kolách. Ľahko si všimneme, že určite sa nemohli stretnúť v troch alebo viacerých kolách, lebo to by každí dvaja z nich odohrali spolu najmenej tri zápasy. Otázkou zostáva, či spolu mohli odohrať dve kolá. Po chvíľke skúšania mnohí z vás usúdili, že to nie je možné, tak to skúsme nejako dokázať. Je viacero možných postupov, my sme zvolili dôkaz sporom: budeme predpokladať, že to predsa len ide, necháme Jana, Fera a Paľa hrať spolu v dvoch kolách, a po chvíli prídeme na to, že by potom muselo platiť niečo, o čom už dopredu vieme, že neplatí.

   Takže Jano, Fero aj Paľo spolu hrali v nejakých dvoch kolách. Počas týchto dvoch kôl už medzi sebou odohrali po dva zápasy, teda v žiadnom ďalšom kole sa už nemohli žiadni dvaja z nich stretnúť. Každému zostáva účasť ešte v troch ďalších kolách z celkového počtu jedenásť. Z toho vieme povedať, že v dvoch kolách hrali všetci traja a v zvyšných deviatich hral vždy práve jeden z nich.

   V kolách, kde boli všetci traja hrali ešte ďalší valasi, tak povedzme že jeden z nich sa volal Kubko, ale určite je aj taký, ktorý nehral ani v jednom z týchto kôl, povedzme, že Maťko. Poďme najprv sledovať Kubka. V jednom kole odohral zápasy s Janom, Ferom, aj Paľom, takže na zvyšok turnaja mu zostáva ešte jeden zápas s každým z nich. No my už vieme, že v každom kole turnaja hral aspoň jeden z trojice Jano, Fero, Paľo, takže Kubko sa mohol zúčastniť najviac troch ďalších kôl, čo ale znamená že neodohral 5 kôl, ale najviac štyri. Podobne je to s Maťkom, ktorý nehral ani v jednom z kôl, kde boli všetci z trojice Jano, Fero, Paľo. Na to, aby odohral dva zápasy s každým z nich by sa musel zúčastniť aspoň šiestich kôl.

Je jasné že niečo nie je v poriadku, lebo v časti a) sme zistili, že Maťko aj Kubko odohrali 5 kôl a teraz vidíme, že Maťko musel hrať aspoň šesť kôl, kým Kubko mohol hrať najviac štyri. Ak by Jano, Fero a Paľo hrali spolu viackrát, dopracujeme sa k sporu, museli by naraz platiť dve rôzne veci, preto môžme bez obáv povedať, že Jano, Fero a Paľo sa naraz stretli najviac jedenkrát.

Úloha č. 4: *V kruhu stojí N oviec označených číslami $1, 2, \dots, N$ v smere hodinových ručičiek. Bača pre nich vymyslel hru. Začne od ovce číslo 1 a v smere hodinových ručičiek bude ovečkám postupne hovoriť písmená $A, B, C, A, B, C, \dots$. Ovce, ktoré dostanú písmeno B alebo C, okamžite odídu z kruhu. Takto do kruhu pokračuje, až kým neostane jediná ovca — tá sa stane víťazom. Nájdite všetky $N \geq 2011$, pre ktoré vyhrá ovca číslo 2011.*

Riešenie: (opravoval Lindtka, Mojo)
Máme N oviec v kruhu a chceme, aby už známym spôsobom vyraďovania vyhrala ovca na 2011-tej pozícií. Kým príde bača k ovci na 2011-tej pozícií, tak vyradí z hry 1340 oviec.
Najprv použijeme menší trik na uľahčenie riešenia. Bača je momentálne pri 2011-tej ovci a v hre je už len $N - 1340$ oviec. Preznačme si všetky ovce nasledovne: ovca na 2011-tej pozícií bude odteraz na prvej pozícii, ovca na 2012-tej pozícii bude odteraz na druhej pozícií a tak ďalej. Teraz si premyslíme, kedy vyhrá prvá ovca.
Vieme, že máme n oviec ($n = N - 1340$). Ak $n \leq 2$, tak vieme že určite vyhrá prvá ovca (prvej ovci priradíme A, druhej ovci priradíme B a ostane nám iba prvá ovca).
Ak $n \geq 3$, tak vieme, že 3 delí n, pretože ak y-tej ovci (na y-tej pozícií) priradíme napr. A, potom aj ovci na $(y+3)$-tej pozícií priradíme A, aj ovci na $(y+6)$-tej pozícií, a takto všetkým ovciam na $(y+3m)$-tej pozícií, kde m je nezáporné celé číslo a $y + 3m \leq n$. Čiže ak $n = 3x + 1$ (resp. $n = 3x + 2$), tak vieme , že ovci na $(3x+1)$-ej pozícií (resp. na $(3x+2)$-ej pozícií) priradíme rovnaké písmeno, ako ovci na prvej pozícií (resp. druhej pozícií). Preto poslednej ovci priradíme A (resp. B), a teda prvej ovci v ďalšom kole priradíme B (resp. C), takže prvá ovca vypadne a nevyhrá. (Pretože pre $n \geq 3$ je $x \geq 1$, tak prvá ovca ešte nebude jedinou víťaznou.)
Preto musí byť n deliteľné tromi. Do ďalšieho kola, keď bača priradí každej ovci práve raz jedno písmeno, postúpi $n/3$ oviec. (Jednej tretine oviec priradí bača A, a zvyšným dvom tretinám priradí buď B, alebo C.) Pokiaľ $n/3 \geq 3$, tak $n/3$ znovu predelíme tromi. Ak by $n/3$ nebolo deliteľné tromi, prvá ovca by v ďalšom kole vypadla a nevyhrala. Počet oviec sa znovu zmenší na tretinu. Čiže počet oviec budeme zmenšovať na tretinu až pokým nebude počet oviec menší ako 3. Ak vieme, že po k kolách bude počet oviec menší ako 3, tak $n/3^k \leq 2$.
Ak po k kolách $n/3^k = 1$, tak $n = 3^k$ a ak $n/3^k = 2$, tak $n = 2 \cdot 3^k$.
Keďže chceme zistiť počet oviec N a vieme, že $N - 1340 = n$ ($n = 3^k$ alebo $n = 2 \cdot 3^k$), tak $N = 3^k + 1340$ alebo $N = 2 \cdot 3^k + 1340$ pre celé číslo $k \geq 6$, pretože pre $k \leq 5$ je N menšie ako 2011.
Záver: Všetky možné riešenia sú $N = 3^k + 1340$ alebo $N = 2 \cdot 3^k + 1340$ pre ľubovoľné celé číslo $k \geq 6$.

Úloha č. 5: *Máme tri tridsať litrové sudy. Jeden je prázdny, v druhom sú tri litre vanilkového sirupu a v treťom je n litrov mlieka. So sudmi môžeme robiť nasledujúce veci:*

i) Vyliať zo suda všetok obsah.

ii) Preliať všetok obsah jedného suda do iného.

iii) Preliať časť obsahu z jedného suda do druhého tak, aby v týchto dvoch sudoch bolo rovnako veľa tekutiny.

Dá sa získať v nejakom sude 10 litrov 30-percentného vanilkového mlieka[1]*, ak*

a) $n = 20$?

b) $n = 24$?

Riešenie: (opravoval Paľo a Mary)

a) Po chvíľke skúšania sa dalo prísť na to, že sa to dá. Potrebujeme dostať 3 litre sirupu a 7 litrov mlieka do jedného suda. Postup je znázornený v tabuľke. Prvý riadok znázorňuje, ktorú operáciu sme vykonali, v ďalších troch je obsah jednotlivých sudov. V prvom a treťom sude je stále len mlieko, v druhom sude prvé číslo znázorňuje mlieko a druhé sirup.

[1] 30% vanilkového sirupu a 70% mlieka

	začiatok	iii) $1 \to 3$	i) 3	iii) $1 \to 3$	iii) $1 \to 2$
Sud 1	0	10	10	5	4
Sud 2	$3+0$	$3+0$	$3+0$	$3+0$	$3+1$
Sud 3	20	10	0	5	5
	ii) $3 \to 2$	iii) $1 \to 3$	i) 3	iii) $1 \to 3$	ii) $3 \to 2$
Sud 1	4	2	2	1	1
Sud 2	$3+6$	$3+6$	$3+6$	$3+6$	3+7
Sud 3	0	2	0	1	0

b) Tu už to bolo horšie. Po chvíľke skúšania sa dalo nadobudnúť dojem, že sa to nedá. Pokúsme sa tento náš dojem dokázať. Kľúčové bolo všimnúť si, čo sa deje s množstvami tekutiny pri jednotlivých operáciách i), ii) a iii). Mnohí ste narábali s desatinnými číslami, avšak oveľa výhodnejšie bolo pozorovať zlomkové tvary objemov. Označme si objem tekutiny v nejakých dvoch sudoch a/b a c/d.

   i) Keď vylejeme celý sud, množstvá v ostatných sudoch ostávajú nezmenené.
   ii) Ak prelejeme celý objem jedného suda do druhého, v jednom sude dostaneme $(ad+bc)/bd$ litrov tekutiny a v tom druhom nič.
   iii) Ak vyrovnáme objemy tekutín v dvoch sudoch, v oboch dostaneme $(ad+bc)/2bd$ litrov tekutiny.

   Všimnime si, že ak máme v nejakom čase vo všetkých sudoch také objemy tekutín, že majú v menovateli iba mocninu dvojky, tak nech vykonáme akúkoľvek operáciu, táto vlastnosť sa zachová, lebo bd aj $2bd$ budú tiež mocniny dvojky. Na začiatku máme v sudoch 0/1, 3/1 a 24/1 litrov tekutiny a vieme, že $1 = 2^0$, takže po ľubovoľnom počte preliatí budú mať objemy tekutín v sudoch v menovateli iba mocniny dvojky.

   Podobné pozorovanie teraz spravíme pre čitateľ. Ak je vo všetkých sudoch čitateľ objemu deliteľný tromi, tak to bude platiť aj po akejkoľvek operácii, pretože ak a aj c je deliteľné tromi, tak aj $ad + bc$ bude deliteľné tromi. Keďže v menovateli sú vždy len mocniny dvojky, teda číslo nedeliteľné tromi, zlomok sa nikdy nebude dať krátiť tromi. Čísla 0, 3 aj 24 sú násobky 3, takže nech sa akokoľvek snažíme, v sudoch vieme získať iba objemy tvaru $3m/2^n$. My by sme ale radi dostali 10 litrov vanilkového mlieka, v reči zlomkov $5 \cdot 2^k/2^{k-1}$. Čitateľ zjavne nie je deliteľný tromi, takýto objem teda získať nevieme.

<u>Úloha č. 6:</u> *Označme $d_1, d_2, \dots, d_k$ všetky delitele prirodzeného čísla n tak, aby platilo $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Nájdite všetky n, pre ktoré platí $n = d_2^2 + d_3^3$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Marek)

Ukážeme si dva spôsoby, ktorými sa dala úloha riešiť. Najprv budeme skúmať paritu čísel d_2, d_3 a n. V druhom riešení si ukážeme trochu všeobecnejší prístup k úlohe.

Máme nájsť všetky n spĺňajúce vzťah $n = d_2^2 + d_3^3$. Predpokladajme, že nejaké n tento vzťah spĺňa a pozrime sa, čo všetko z toho vyplýva pre čísla d_2, d_3 a samotné n.

Sú tri možnosti:

- Jedno z čísel d_2, d_3 je párne a druhé nepárne.

  Potom zo vzťahu $n = d_2^2 + d_3^3$ vypočítame, že n je nepárne, ale to je spor s tým, že n má párneho deliteľa.

- Obe čísla d_2, d_3 sú nepárne.

  Zo vzťahu $n = d_2^2 + d_3^3$ dostaneme, že n je párne. Ale párne číslo je deliteľné dvomi, preto $d_2 = 2$, čo je spor s tým, že d_2 je nepárne.

- Obe čísla d_2, d_3 sú párne.

  Zo vzťahu $n = d_2^2 + d_3^3$ potom dostaneme nielen, že n je párne, ale aj to, že je deliteľné 4. Preto nutne $d_2 = 2$ a $d_3 = 4$. Takže jediná možnosť je $n = d_2^2 + d_3^3 = 2^2 + 4^3 = 68$. A 68 riešením je, lebo jeho delitele sú $1 < 2 < 4 < 17 < 34 < 68$, takže naozaj $d_2 = 2$ je druhým a $d_3 = 4$ tretím najmenším deliteľom 68.

<u>Iné riešenie:</u>

Tak ako v prvom riešení, predpokladajme $n = d_2^2 + d_3^3$ a odvodzujme z toho dôsledky pre d_2, d_3 a n.

Najprv si všimnime, že každý deliteľ čísla d_2 je zároveň deliteľom čísla n. Ale n nemá medzi 1 a d_2 žiadne iné delitele. Preto ani d_2 nemá medzi 1 a d_2 iné delitele, čiže d_2 je prvočíslo.

Odčítaním d_3^3 od rovnosti $n = d_2^2 + d_3^3$ dostaneme rovnosť $n - d_3^3 = d_2^2$. Keďže d_3 delí ľavú stranu tejto rovnosti, musí deliť aj pravú, čiže $d_3 | d_2^2$. Ale d_2 je prvočíslo, preto d_3 môže byť len 1, d_2 alebo d_2^2. A keďže $d_3 > d_2$, musí byť $d_3 = d_2^2$. Dosaďme to do rovnosti a upravme:

$$n = d_2^2 + d_3^3 = d_2^2 + \left(d_2^2\right)^3 = d_2^2\left(1 + d_2^4\right).$$

Ak je d_2 nepárne, tak $\left(1+d_2^4\right)$ je párne číslo, čiže aj n je párne. Z toho však vyplýva, že $d_2 = 2$, čo je spor. Preto zostáva jediná možnosť $d_2 = 2$, lebo 2 je jediné párne prvočíslo. Odtiaľ $d_3 = d_2^2 = 2^2 = 4$ a $n = 68$. Rovnako ako v prvom riešení, nesmieme zabudnúť na skúšku správnosti, lebo zatiaľ sme len dokázali, že „ak nejaké riešenie existuje, tak to môže byť jedine 68“.

Komentár: Väčšina z vás stratila bod práve kvôli vynechaniu skúšky správnosti.

Úloha č. 7: *Petržlena s CéDečkom už prestalo baviť hrať piškvorky. Preto CéDečko vymyslel novú kartovú hru. V tejto hre je $2n$ kariet položených na stole v rade za sebou. Na každej karte je zhora napísané prirodzené číslo. Jeden ťah spočíva v tom, že si hráč na ťahu zoberie kartu z kraja radu. Prvý ťahá CéDečko a ďalej sa s Petržlenom striedajú. Hra skončí, keď sa minú všetky karty na stole. Skóre hráča je súčet čísel na kartách, ktoré si potiahol. Dokážte, že CéDečko môže mať vždy aspoň také skóre ako Petržlen.*

Riešenie: (opravovala Katka J.)
(Podľa *Augustina Žídeka.*)
CéDečko je šikovný, a preto si pohotovo vyrobí *šachovnicovú stonožku.* Šachovnicová stonožka je jeden riadok šachovnice, dlhý $2n$, v ktorom sa striedajú biele a čierne políčka. Preto ak je na začiatku biele políčko, posledné musí byť čierne. Keď sa Petržlen nedíva, Cédečko položí šachovnicovú stonožku pod všetky karty.
CéDečko si všimol, že pod n kartami je biele políčko a pod n kartami je čierne políčko. Rýchlo si spočítal, aký je súčet na bielych a na čiernych políčkach. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme uvažovať, že väčší (alebo prinajmenšom rovnaký) súčet mu vyšiel na čiernych políčkach. Cieľom CéDečka bude teda pozbierať všetky karty z čiernych políčok a donútiť Petržlena, aby zbieral len karty na bielych políčkach. To sa mu podarí vždy, pretože CéDečko začína. To znamená, že keď si hneď na začiatku vezme tú krajnú kartu, ktorá leží na čiernom políčku, Petržlenovi v jeho ťahu nezostane nič iné, len si vybrať z dvoch krajných kariet, ktoré obe ležia na bielom políčku. V ďalšom ťahu sa situácia opakuje, a tak to zostane až do konca hry.
Vidíme, že CéDečkovi sa podarilo to, o čo sa snažil — na konci hry bude mať on všetky karty z čiernych políčok a Petržlen všetky karty z políčok bielych. To znamená, že CéDečko získal väčší alebo aspoň rovnaký počet bodov ako Petržlen a ten to svojimi ťahmi nemohol nijako zmeniť.

Komentár: Viacerým z vás sa podarilo úlohu vyriešiť podobným spôsobom, aký je uvedený vo vzoráku. Aj keď sa úloha najprv zdala zložitá, pretože existuje veľké množstvo spôsobov, akým môžu hráči ťahať, ukázalo sa užitočné nájsť niečo, čo sa ani v priebehu ťahov nemení. V našom prípade to bolo ofarbenie kariet, ktoré CéDečko urobil na začiatku. Takýto spôsob riešenia sa nazýva *hľadanie invariantu.*

Úloha č. 8: *Nech k je nepárne prirodzené číslo. Dokážte, že číslo $1+2+3+\cdots+n$ delí číslo $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ pre všetky prirodzené čísla n.*

Riešenie: (opravoval Palo, Beren)
Keď chceme dokázať, že nejaký *škaredý súčet* je deliteľný konkrétnym číslom d, najjednoduchšia vec, ktorú vieme skúsiť, je preusporiadať *škaredý súčet* tak, aby sme o jednotlivých skupinkách vedeli povedať, že sú deliteľné d. (To, že v našom prípade je deliteľ tiež súčet, si na chvíľku odmyslime.) Keďže súčet čísel deliteľných d je sám deliteľný d, vyhrali by sme. Poďme to skúsiť!
Najprv sa pozrime na deliteľa, ktorým je súčet $1+2+\cdots+n$. Skúmať deliteľnosť súčtom nie je veľmi pohodlné, preto si ho zjednodušme na $d = n(n+1)/2$. (Ak nevieš, prečo táto identita[2] funguje, skús si napísať pod seba čísla od 1 po n, raz odpredu a raz odzadu alebo použi matematickú indukciu.)
Vidíme, že vyjadrenie deliteľa obsahuje trošku škaredú vec — delenie dvomi, ktoré sa nám nepáči. Rozdeľme si teda riešenie na dve časti, v prvej rozoberieme párne n a v druhej nepárne, aby bol deliteľ krajšie vyjadrený:

1. Nech $n = 2a$, pričom $a \in \mathbb{N}$. Teda v tomto prípade chceme dokázať, že $d = 2a(2a+1)/2 = a(2a+1)$ delí súčet $\Sigma = 1^k+2^k+\cdots+(2a)^k$ pre všetky *nepárne* k. Keďže činitele d sú navzájom nesúdeliteľné[3], stačí, keď overíme, že $a|\Sigma$ a $(2a+1)|\Sigma$.

   (a) $a|\Sigma$. V tomto prípade vieme popárovať členy Σ do dvojíc tvaru i^k a $(2a-i)^k$, pre $1 \le i < a$ (dva členy — a^k a $(2a)^k$ takto zostanú samostatne, no môžeme hneď vidieť, že to nebude žiaden problém), a použitím známeho vzorca $p^k+q^k = (p+q)(\texttt{bordel})$, ktorý funguje práve pre nepárne k, dostávame

   $$i^k + (2a-i)^k = (i + (2a-i))B = 2aB.$$

   Tento výraz je zjavne deliteľný a pre všetky i. A keďže $a|a^k$ a $a|(2a)^k$, a bude deliť aj súčet všetkých týchto členov, teda sme ukázali, že $a|\Sigma$.

   (b) $(2a+1)|\Sigma$. Tento prípad je trošku jednoduchší. Popárujme opäť členy Σ, no tentoraz do dvojíc tvaru i^k a $(2a+1-i)^k$, pre $1 \le i \le a$. Ako vidíme, každý člen Σ bude v nejakej dvojici. Analogicky ako v prvom odseku dostávame

   $$i^k + (2a+1-i)^k = (i + (2a+1-i))B = (2a+1)B.$$

[2] V matematike sa všeobecne platným rovnostiam niekedy hovorí *identita.*
[3] Pokiaľ nevieš presne prečo, skús sa zamyslieť nad tým, ktoré prvočísla delia a a ktoré $2a+1$.

Keďže výsledný výraz je zjavne deliteľný $(2a+1)$ pre každé i, dokázali sme, že $(2a+1)$ delí súčet párov pre každé i, a teda $(2a+1)|\Sigma$.

Tým je dôkaz pre párne n skončený.

2. Nech $n = 2a-1$, pričom $a \in \mathbb{N}$. Ako si môžeme ľahko tipnúť, dôkaz druhej časti bude v princípe rovnaký, ako bol dôkaz prvej časti. V tomto prípade dostávame $d = a(2a-1)$ a $\Sigma = 1^k + 2^k + \cdots + (2a-1)^k$. Keďže a a $2a-1$ sú opäť nesúdeliteľné, stačí nám overiť, či $a|\Sigma$ a $(2a-1)|\Sigma$.

   (a) $a|\Sigma$. V tomto prípade vieme popárovať členy Σ do dvojíc tvaru i^k a $(2a-i)^k$, pre $1 \leq i < a$ (len a^k tým pádom nebude spárovaný), a dostávame
   $$i^k + (2a-i)^k = (i + (2a-i))B = 2aB.$$
   Tento výraz je zjavne deliteľný a pre všetky i. A keďže zjavne $a|a^k$, dokázali sme, že $a|\Sigma$.

   (b) $(2a-1)|\Sigma$. Popárujme teraz členy Σ do dvojíc tvaru i^k a $(2a-1-i)^k$, pre $1 \leq i \leq a-1$. (Tentoraz bude člen $(2a-1)^k$ nespárovaný.) Analogicky dostávame
   $$i^k + (2a-1-i)^k = (i + (2a-1-i))B = (2a-1)B.$$
   Keďže výsledný výraz je zjavne deliteľný $(2a-1)$ pre každé i, a $(2a-1)|(2a-1)^k$, dokázali sme, že $(2a-1)|\Sigma$.

Tým sme ukázali, že vlastnosť zo zadania je splnená pre každé prirodzené n a nepárne k.

Úloha č. 9: *Hago napísal na tabuľu jedno prirodzené číslo tvaru* $\underbrace{99\ldots9}_{2011}$. *Potom prišiel k tabuli Edo a opakoval svoj ťah pozostávajúci z nasledujúcich krokov:*

1. *Vybral si jedno z prirodzených čísel na tabuli a označil ho n. V prvom ťahu práve $99\ldots9$.*
2. *Zvolil si prirodzené čísla b a c také, že $n = bc$.*
3. *Od čísla b odčítal alebo pričítal 2 a získal tým číslo d a od čísla c odčítal alebo pričítal 2 a získal tým číslo e.*
4. *Z tabule zmazal pôvodné číslo n a napísal namiesto neho čísla d a e.*

Je možné, aby po niekoľkých Edových ťahoch zostali na tabuli len čísla 9?

Riešenie: (opravoval CD, Petržlen)

Po niekoľkých pokusoch sa dal nadobudnúť dojem, že to pravdepodobne nepôjde. To je aj pravda (odhalili ste to všetci) a dokázať sa to dalo rôznymi spôsobmi. Vo vzorovom riešení to dokážeme priamo.

Najväčší problém v celom postupe bol fakt, že k číslam b, c sme pričítali alebo odčítali číslo 2. Mali sme totiž na výber, a to značne komplikovalo rozoberanie možností. A preto by sme sa potrebovali pozrieť na príklad z takého smeru, aby pričítanie a odčítanie čísla 2 znamenalo to isté. Tu už by nám mohlo napadnúť, že sa pozrieme na zvyšky po delení číslom 4. Vtedy nám operácia ± 2 dá to isté číslo. (Ak vám to nie je jasné, skúste si to dokázať.)

Podľa posledných dvoch cifier počiatočného čísla $n = 99\ldots9$ vieme, že je tvaru $4k+3$. Zoberme čísla b, c a všeobecné m tvaru $4k+3$ tak, aby platilo $m = bc$. Akého tvaru budú čísla b a c? Číslo m je nepárne, a teda môže vzniknúť len zo súčinu dvoch nepárnych čísel. Máme preto štyri možnosti:

(1) $b = 4k+1$, $c = 4l+1$,

(2) $b = 4k+1$, $c = 4l+3$,

(3) $b = 4k+3$, $c = 4l+1$,

(4) $b = 4k+3$, $c = 4l+3$.

Ľahko overíme, že len v prípadoch (2) a (3) dáva ich súčin číslo tvaru $4k+3$. To znamená, že aspoň jedno z čísel b, c je tvaru $4k+1$, BUNV nech je to b. Zo zadania vieme, že $d = b \pm 2$ a z pohľadu zvyškov po delení číslom 4 je teda d tvaru $4k+3$.

Z toho vyplýva, že ak rozkladáme n, ktoré dáva zvyšok 3 po delení číslom 4 (to bol jediný použitý predpoklad pre číslo n), tak jedno z čísel d a e bude tiež dávať zvyšok 3 po delení štyrmi. Na konci chceme mať na tabuli len čísla 9, pričom $9 = 2 \cdot 4 + 1$. My ale vieme, že na tabuli vždy zostane aspoň jedno číslo tvaru $4k+3$ a teda aspoň jedno z čísel na tabuli určite nebude 9.

Úloha č. 10: *Je možné rozdeliť množinu prirodzených čísel $\mathbb{N}$ na dve disjunktné*[4] *množiny A a B tak, aby naraz platilo:*

[4] Dve množiny sú *disjunktné* práve vtedy, keď nemajú spoločný prvok.

- *V množine A neexistuje nekonečná, nekonštantná aritmetická postupnosť*
- *a v množine B neexistuje nekonečná, nekonštantná geometrická postupnosť?*

Riešenie: (opravovali Edo, Kubo S.)
(Podľa *Martina Vodičku.*)
Rozdeľme si množinu prirodzených čísel na dve množiny A a B takýmto spôsobom:

- do množiny A dáme čísla: $1!$, $2!+1$, $2!+2$, $2!+3$, $3!$, $4!+1$, $4!+2$, $\ldots$, $5!$, $\ldots$, $(2n)!+1$, $(2n)!+2$, $\ldots$, $(2n+1)!$, $\ldots$
- do množiny B dáme ostatné čísla, a teda: $2!$, $3!+1$, $3!+2$, $3!+3$, $\ldots$, $4!-1$, $4!$, $5!+1$, $5!+2$, $\ldots$, $6!$, $\ldots$, $(2n+1)!+1$, $(2n+1)!+2$, $\ldots$, $(2(n+1))!$, $\ldots$

Ukážeme, že v množine A nie je žiadna nekonečná nekonštantná aritmetická postupnosť a v množine B nie je nekonečná nekonštantná geometrická postupnosť.
Prvú časť ukážeme sporom. Nech v množine A existuje nejaká nekonečná nekonštantná aritmetická postupnosť $\{a_n\}$ s prvým členom a a diferenciou d. Potom vieme nájsť také k, pre ktoré platí, že $k!$ patrí do A, $k! \geq a$ a $k! \geq d$. Nech $a + l \cdot d$ je najväčší taký člen danej aritmetickej postupnosti $\{a_n\}$, že $k! \geq a + l \cdot d$. (Určite taký existuje, keďže $k! \geq a$.) Potom pre nasledujúci člen $a + (l+1) \cdot d$ platí:

$$k! < a + (l+1) \cdot d \leq k! + d \leq 2 \cdot k! \leq (k+1)!.$$

Keďže čísla $k!+1, \ldots, (k+1)!$ patria do množiny B, tak tam patrí aj $a + (l+1) \cdot d$. A to je spor s tým, že celá postupnosť $\{a_n\}$ patrí do množiny A.
Podobne ukážeme druhú časť. Nech v množine B existuje nekonečná nekonštantná geometrická postupnosť $\{b_n\}$ s prvým členom p a kvocientom q. Vezmime teraz najmenšie prirodzené číslo k také, že $k! \geq p$, $k \geq q$ a $k!$ je prvkom množiny B. Potom nech $p \cdot q^l$ je najväčší taký člen postupnosti $\{b_n\}$, že $p \cdot q^l \leq k!$. Pre nasledujúci člen postupnosti $\{b_n\}$ potom platí:

$$k! < p \cdot q^{l+1} \leq q \cdot k! \leq k \cdot k! < (k+1)!.$$

Keďže čísla $k!+1$, $k!+2$, $\ldots$, $(k+1)!$ patria do množiny A, tak aj $p \cdot q^{l+1}$ patrí do množiny A. To je spor s tým, že celá postupnosť $\{b_n\}$ patrí do B.
Vhodné rozdelenie sme našli a ešte poznámka na záver. My sme dokázali vlastne trochu viac, a to:

V množinách A, B nie sú žiadne nekonečné nekonštantné aritmetické postupnosti a ani nekonečné nekonštantné geometrické postupnosti.

Iné riešenie:
(Podľa *Adely Abaffyovej.*)
Chceme rozdeliť množinu prirodzených čísel na dve disjunktné množiny A a B tak, že v množine A nebude žiadna nekonečná nekonštantná aritmetická postupnosť (ďalej označovaná ako AP) a v B nebude žiadna nekonečná nekonštantná geometrická postupnosť (ďalej označovaná ako GP). Inak povedané, chceme aby v množine A bolo z každej GP aspoň jedno číslo a podobne aby v množine B bolo z každej AP aspoň jedno číslo. (Premyslite si, prečo.) Keď už vieme toto, potrebujeme len nejakým spôsobom množiny A a B zostrojiť.
Zoberme si všetky AP. Chceme z každej vybrať nejaké číslo a dať ho do množiny B. Problém je v tom, že tých AP je nekonečne veľa. My si ich však vieme zoradiť do postupnosti. Každá AP je jednoznačne určená prvým členom a diferenciou, čo sú prirodzené čísla. A teda stačí usporiadať všetky dvojice prirodzených čísel. To vieme urobiť napríklad takýmto spôsobom:

$$(1,1) < (1,2) < (2,1) < (1,3) < (2,2) < (3,1) < (1,4) < (2,3) < (3,2) < (4,1) < (1,5) < \ldots$$

Každá AP má svoje miesto v tejto postupnosti, t. j. každej AP vieme priradiť nejaké poradové číslo.[5] A teda vieme všetky AP zoradiť do postupnosti:

$$AP_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},\ AP_2 = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\},\ AP_3 = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\},\ \ldots$$

Všetky GP sú určené prvým členom a kvocientom (dvomi prirodzenými číslami), takže vieme zoradiť do postupnosti aj všetky GP:

$$GP_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\},\ GP_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\},\ GP_3 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\},\ \ldots$$

Množiny A a B skonštruujeme takto:

$$B = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\},\ A = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\},$$

pričom:

[5] Inými slovami: množina dvojíc prirodzených čísel je spočítateľná množina.

- $f_1 = a_1$ (prvý člen postupnosti AP_1)
- g_1 je najmenšie číslo z GP_1, ktoré je rôzne od f_1
- f_2 je najmenšie číslo z AP_2, ktoré je rôzne od f_1, g_1
- g_2 je najmenšie číslo z GP_2, ktoré je rôzne od f_1, f_2, g_1
- f_3 je najmenšie číslo z AP_3, ktoré je rôzne od f_1, f_2, g_1, g_2
- g_3 je najmenšie číslo z GP_3, ktoré je rôzne od f_1, f_2, f_3, g_1, g_2

$\vdots$

- f_n je najmenšie číslo z AP_n, ktoré je rôzne od f_1, f_2, $\ldots$, f_{n-1}, g_1, g_2, $\ldots$, g_{n-1}
- g_n je najmenšie číslo z GP_n, ktoré je rôzne od f_1, f_2, $\ldots$, f_n, g_1, g_2, $\ldots$, g_{n-1}

$\vdots$

Takýmto spôsobom vyrobíme množiny A a B. Na konci vložíme ešte nezaradené prirodzené čísla do množiny A. (Skúste si premyslieť, či musia byť nutne v množine A.) Tým sme vyrobili množiny A a B, pre ktoré platí:

- A a B sú disjunktné, lebo každé g_i je rôzne od všetkých f_1, f_2, $\ldots$, f_i a každé f_i je rôzne od všetkých g_1, g_2, $\ldots$, g_{i-1}.
- Zjednotením A a B je množina prirodzených čísel.
- V množine A neexistuje žiadna AP a v množine B neexistuje žiadna GP.

Vyhrali sme!

Úloha č. 11: *Nech n je prirodzené číslo. Rozložme množinu $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ na tri rovnako veľké disjunktné*[4] *množiny A, B a C. Dokážte, že existujú a z A, b z B, c z C také, že jedno z čísel a, b, c je súčtom zvyšných dvoch.*

Riešenie: (opravoval Hago, Matúš)

Na začiatku riešenia každého matematického problému sa otvára otázka, ako vôbec začať. V úlohách ako je táto sa často postupuje sporom, teda pozrieme sa na to, čo by sa stalo, ak by taká trojica a, b, c neexistovala. Poďme teda čísla 1, 2, $\ldots$, $3n$ umiestňovať do množín A, B, C tak, aby nám nevznikla taká trojica.

Najprv umiestnime číslo, o ktorom je reč pre všetky n a nachádza sa aj v najväčšom počte nesprávnych trojíc, teda číslo 1. Je úplne jedno, do ktorej množiny ho dáme, tak ho šupnime napríklad do množiny A. Ďalšie číslo, ktoré umiestníme, má na výber A alebo niečo iné. Rozoberať prípady sa nám nechce, tak sa na to pozrime inak. Určite existuje číslo, ktoré nebude v množine A. Pre konkrétnosť (a iné vhodné vlastnosti, ktoré hneď uvidíme) si zoberme najmenšie také, označme si ho k a nech je napríklad v množine B. Navyše z jeho minimality vieme, že čísla 1, 2, $\ldots$, $k-1$ sa nachádzajú v A. Teraz chvíľu netušíme ako pokračovať, ale s určitosťou vieme povedať, že aj množina C musí niečo obsahovať. Po dobrých skúsenostiach si vezmime zasa najmenšie také a označme ho l. Po chvíľke čachrovania si môžeme všimnúť nasledovné vlastnosti, ktoré na seba nadväzujú.

(1) Čísla $l-1$, $l-2$, $\ldots$, $l-(k-1)$ sa nemôžu nachádzať v množine B, pretože čísla 1, 2, $\ldots$, $k-1$ sú v množine A, číslo l je v množine C a to nám už dáva zlú trojicu. Kvôli minimalite l sa nemôžu nachádzať ani v množine C, čiže musia byť v množine A.

(2) Čísla $l+1$, $l+2$, $\ldots$, $l+(k-1)$ sa nemôžu nachádzať v množine C, pretože tvoria zlé trojice s číslami $l-(k-1)$, $l-(k-2)$, $\ldots$, $l-1$ z množiny A a číslom k z množiny B.

Tieto kroky nám pridali nejaké čísla do množiny A a spôsobili, že nejaké čísla nie sú v množine C. Dokonca pre nejaké veľké k by to mohol byť aj kritický problém. Ale poďme sa baviť exaktnejšie. Bez rozoberania možností toho teraz už veľa nepovieme. Je načase pridať nové číslo. Označme ho m a pridajme ho do množiny C. Stále myslíme minimalisticky, tak nech je druhým najmenším v množine C. Zasa chvíľku počachrujeme a uvedomíme si, že môžeme spraviť obdobné pozorovania ako minule.

(I) Čísla $m-1$, $m-2$, $\ldots$, $m-(k-1)$ sa nemôžu nachádzať v množine B. Podľa pozorovania (2) sa $k-1$ čísel idúcich po l nenachádza v množine C, čiže $k-1$ čísel idúcich pred m sa nemôže nachádzať v množine C. Musia teda byť v množine A.

(II) Čísla $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+(k-1)$ sa nemôžu nachádzať v množine C lebo tvoria zlé trojice s číslami $m-(k-1)$, $m-(k-2)$, $\ldots$, $m-1$ z množiny A a číslom k z množiny B.

Teraz to ale už naozaj začína byť podozrivé. V množine A stále pribúda veľa čísel a množine C ich veľa odopierame, a pritom robíme stále to isté. Čo tak na tom postaviť indukciu? Poďme ňou ukázať, že $k-1$ čísel idúcich pred každým číslom z množiny C patrí do množiny A. Pri indukcii je ešte dôležité, cez čo ju budeme budovať[6]. Zoraďme si čísla z množiny C od najmenšieho po najväčšie, označme si ich $c_1, c_2, \dots, c_n$. Dokazovať budeme postupne podľa veľkosti.

1° Pre číslo $c_1 = l$ sme pravdivosť tvrdenia ukázali v pozorovaní (1).

2° Indukčný predpoklad hovorí, že čísla $c_i - 1, c_i - 2, \dots, c_i - (k-1)$ patria do množiny A. Chceme ukázať, že tvrdenie platí aj pre c_{i+1}. Obdobne ako v pozorovaní (II) vieme povedať, že čísla $c_i + 1, c_i + 2, \dots, c_i + (k-1)$ sa nenachádzajú v množine C. Následne, podobne ako v pozorovaní (I), odvodíme, že čísla $c_{i+1} - 1, c_{i+1} - 2, \dots, c_{i+1} - (k-1)$ musia byť v množine A. Čo sme chceli ukázať.

Pred každým číslom z množiny C je aspoň $k-1$ čísel v množine A. O čísle k vieme, že je aspoň 2, čiže pred každým z C je aspoň jedno v A. Tu už sa nám črtá spor. Ak by tento odhad sedel presne, tak môžu mať rovnako veľa prvkov. Tu sa však ukáže ďalšia dobrá vlastnosť čísla 1, alebo skôr minimality ka to tá, že číslo 2 nie je prvkom množiny C, čiže číslo 1 je v množine A akoby navyše. Množiny A a C nemôžu mať rovnako veľa prvkov, čo je spor so zadaním.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	3.	GAlej KE	7	8			9	9	9	9	9		45	134
2.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	2	0			9	9	9	9	9		45	122
3.	Lukáček Viktor	4.	GsvM PO	4	1		9	9	9	9		9		45	117
4.	Horňák Marián	4.	GPár NR	10	9			9	9	9	9			36	108
4.	Šimsa Štěpán	3.	Litoměřice ČR	5	5			9	9	9	9			36	108
6.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	1	0	9	5	9	8	9				40	99
7.	Kopf Michal	4.	Opava ČR	10	5			9	4	9	9	3		34	94
7.	Žídek Augustin	4.	Frýdlant ČR	10	4			9	9	9				27	94
9.	Šimková Ľudmila	2.	GPár NR	4	0	8	8	9	8	9				42	93
10.	Tóth Michal	4.	GJH BA	10	6			9	9		9			27	91
11.	Korbela Michal	2.	G Bánovce	4	0	9	8	9	8		0			34	90
12.	Hlaváčik Matúš	3.	GAlej KE	6	2		9	9	6	9				33	84
13.	Kossaczká Marta	3.	Gamča BA	7	4			9	9	9				27	82
14.	Šafin Jakub	3.	GPH MI	6	3			8	9		4			21	77
15.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	3	0	3	9		9					21	75
16.	Koprda Pavol	4.	GAM TT	9	3			9	8	9				26	73
17.	Galovičová Soňa	4.	GJH BA	10	7			9	8					17	72
18.	Stankovič Miroslav	2.	GPoš KE	4	3			9	7					16	70
19.	Psota Miroslav	2.	GHlin ZA	4	0	3	8		9					20	67
19.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	1	0		8	9						17	67
21.	Prívozník Matej	2.	GJH BA	4	0	8	8	9						25	64
22.	Hledík Michal	3.	GJH BA	6	2									0	62
23.	Zhen Ning Dávid Liu	2.	Gamča BA	2	0	3	9	9	9					30	61
24.	Lipovský Mário	2.	GJH BA	4	0		7		2					9	60
25.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3	0									0	59
26.	Matejovičová Tatiana	3.	Gamča BA	4	0		8	9	6					23	58
27.	Gonda Tomáš	3.	Gamča BA	4	1		8	9	2					19	57
27.	Hofierka Jaroslav	2.	GJAR PO	4	0	3	8		9					20	57
29.	Svoboda Josef	3.	Frýdlant ČR	4	1		8	9	8	2				27	55
30.	Vlachynská Petra	4.	GJH BA	7	0		8	9						17	54
31.	Halajová Barbora	4.	GVO ZA	9	3			9	1	0		0		10	51
31.	Hrivová Ivona	2.	GVO ZA	4	0	3	6	2	2					13	51
31.	Jasenčáková Katarína	4.	GVO ZA	10	4			9		2				11	51
31.	Magyarová Zuzana	2.	GBST LC	4	0	3	8							11	51
35.	Marečáková Barbora	4.	GKuk PP	10	4			2	9	9				20	50
36.	Belanová Michaela	4.	ŠPMNDG BA	9	3			9			8			17	49

[6]Často sa tvrdenia dokazujú pre prirodzené čísla a tam je poradie a niečo ako nasledovník jasné. V našom prípade to až také jasné nie je.

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
36.	Pokrývka Filip	2.	G Bánovce	4	0		5	9		2	1			17	49
36.	Surovčík Juraj	3.	GPOH DK	6	1		8	9						17	49
39.	Ječmenová Andrea	2.	GVO ZA	4	0	3	6							9	46
40.	Kavický Dušan	3.	GJH BA	5	2									0	45
41.	Vlček Andrej	4.	EvSŠ LM	7	2		8							8	44
42.	Bock Michal	3.	Gamča BA	5	1		8	9	3					20	43
42.	Zemková Kristýna	4.	Prachatice ČR	5	1		8	9	9					26	43
44.	Krakovská Hana	2.	Gamča BA	4	0	3	6	2		2				13	40
45.	Komanová Kristína	3.	GAS BB	6	2		8	9	1			0		18	39
46.	Hraška Peter	3.	Gamča BA	4	0	8		1						9	38
47.	Hanzely Filip	3.	GAP SB	7	3			9		9				18	37
47.	Mojžišová Karolína	2.	Gamča BA	4	0	3	8	2						13	37
49.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	2	0									0	36
49.	Nociarová Jela	3.	GBST LC	6	1		8							8	36
51.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	3	0		9							9	34
52.	Červeňák Michal	3.	G Púchov	4	0									0	33
52.	Pellerová Daniela	3.	Gamča BA	7	3			0	1	9				10	33
54.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	1	0									0	31
55.	Ficková Klára	4.	GPoš KE	6	3									0	30
55.	Greššák Jerguš	3.	ŠPMNDG BA	4	0		8							8	30
57.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2	0						9			9	27
57.	Kello Tomáš	3.	GJAR PO	3	0									0	27
59.	Petrucha Jaroslav	3.	GMet BA	7	2									0	26
60.	Puza Marko	2.	GPoš KE	2	0	3								3	25
61.	Teiml Dominik	3.	AG Praha	5	3									0	24
62.	Gafurov Askar	3.	Gamča BA	5	1									0	23
62.	Kováčová Barbora	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	23
64.	Rako Matúš	1.	Gamča BA	1	0	0	9							9	20
65.	Macko Vladimír	3.	GĽŠ ZV	6	3									0	18
65.	Magurová Lucia	3.	GPoš KE	5	0									0	18
65.	Smolík Martin	3.	Gamča BA	5	0									0	18
68.	Faguľová Kristína	4.	GPoš KE	9	3									0	15
68.	Klembarová Barbora	4.	GKuk PP	10	4									0	15
70.	Mikloš Martin	4.	EvLýc BA	4	0	3								3	14
71.	Kurdelová Alžbeta	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	13
72.	Galanová Miriam	2.	GJH BA	2	0									0	12
72.	Vozárová Viktória	2.	GJH BA	3	0									0	12
74.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3	0		3							3	10
75.	Semanišinová Denisa	3.	GAlej KE	5	0									0	7
75.	Šandalová Michaela	2.	ŠPMNDG BA	4	0									0	7
77.	Šromeková Karolína	2.	GDT PP	4	0		1							1	6
78.	Santer Martin	3.	GMH Trstená	5	0									0	5
79.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3	0									0	4
80.	Melošová Veronika	3.	GJCh BR	4	0	0		1						1	2
80.	Polovka Maroš	2.	GKuk PP	3	0									0	2
82.	Fiľová Lucia	4.	HA BR	4	0									0	1
82.	Pivovarník Roman	2.	GJAR PO	4	0									0	1
84.	Vozárová Zuzana	4.	GJH BA	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bui Truc Lam Michal	1.	Gamča BA	1	9	9			9	5	9		128
1.	Sučík Samuel	1.	GJH BA	1	7	9	9			8	9		128
3.	Longa Marián	1.	ŠPMNDG BA	1	6	7	9	3		9			113
4.	Lâm Tuân Dûng	1.	GJH BA	1	9	9	4	8	0	7			104
5.	Bohdal Ondrej	1.	GJH BA	1	9	9	2	6	3	8			101
6.	Rako Matúš	1.	Gamča BA	1	9	3		6	0	9			78
7.	Králik Matej	1.	GJH BA	1	8	9	4	2	3				74
8.	Šteňová Júlia	1.	GJH BA	1	8	9	0	1	3				69
9.	Palko Maximilián	2.	1SG BA	2		1	5		3		9		68
10.	Ďuratná Petra	1.	ŠPMNDG BA	1	2	3			3	8	1		64
10.	Ivan Lukáš	2.	GJH BA	2		9	6	2	3	3	1		64
12.	Murin Martin	1.	GJH BA	1	6	9	2		0		9		61
13.	Ďurajková Hana	1.	GJH BA	1	8	9	0		3				58
14.	Jurina Šimon	2.	Gamča BA	3					3	9			48
15.	Zhen Ning Dávid Liu	2.	Gamča BA	2					3	9	9		45
16.	Veselá Simona	1.	GJH BA	1									44
17.	Martinková Sandra	1.	GJH BA	1		6				8			40
18.	Svitková Patricia	2.	GLN BA	2		6							34
19.	Pilňan Branislav	1.	GJH BA	1									33
20.	Roštár Marek	3.	1SG BA	3			4		0		9		28
21.	Híveš Zdenko	2.	1SG BA	2		1	5						22
22.	Vozárová Viktória	2.	GJH BA	3									19
23.	Galanová Miriam	2.	GJH BA	2									11
24.	Ivanov Marián	3.	GJH BA	3						3			8
25.	Ošková Eva	2.	GJH BA	2									7
26.	Vajner Elisabeth	1.	GLS BA	1									6
27.	Klimkovič Anna-Mária	2.	ŠPMNDG BA	3									4

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Daniel Mark	2.	GPár NR	3			9	2	6	7	9		81
2.	Horváth Samuel	2.	GPár NR	3			9	4	0	0	9		79
3.	Mikulec Jaromír	1.	GsvJ NM	1	1	7			3	9			65
4.	Prešinská Kristína	1.	GPár NR	1	3	9	9	2	3	7	0		64
5.	Tóth Andrej	2.	GPár NR	2		9	4		0	0	9		60
6.	Marčeková Katarína	1.	GPár NR	1	3	9		1	0	6	0		56
7.	Kluvanec Roman	1.	GPár NR	1	1	9							54
8.	Kováčová Mária	1.	GsvCM NR	1	6	3							51
9.	Hladká Barbora	1.	GPár NR	1	3	9			0	6	0		44
10.	Bieliková Michaela	2.	GVMS	2									33
11.	Straková Valentína	2.	GVMS	2	2	0							32
12.	Balážová Michaela	2.	G Bánovce	3			7	2					29
13.	Kuťka Daniel	2.	GPár NR	2									22
14.	Matiaško Dušan	2.	GVBN PD	2									3
15.	Šuppa Marek	3.	GsvCM NR	3									2

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Nepšinská Silvia	1.	GJCh BR	1	9	3	9		3	8			104
2.	Kňaze Adam	1.	GJCh BR	1	6	1	5			9	2		76
3.	Dráček František	1.	GŠkol PB	1	8	6	4	4	3	6			73
3.	Tomašec Samuel	2.	GVar ZA	2		7	4	4	3		7		73
5.	Mores Martin	2.	GVar ZA	2		9	0		3		2		63
6.	Rizman Daniel	2.	GVar ZA	2		9	0		3				48
7.	Santrová Michaela	1.	GMH Trstená	1		7							46
8.	Labjaková Gabriela	1.	GMH Trstená	1									45
9.	Halamová Mária	1.	GVO ZA	1	4	6				0			44
10.	Cimerman Jakub	3.	GJGT BB	3									39
11.	Hradňanská Petra	1.	GVar ZA	1									21
12.	Šeligová Kristína	1.	GsvFA ZA	1									15
13.	Abaffyová Adela	2.	G Tvrdošín	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Krajčiová Katarína	1.	GAlej KE	1									83
2.	Rapavý Martin	2.	GAlej KE	3			4		6	8			68
3.	Pešta Milan	3.	GK2 PO	3			6			9			66
4.	Jarošová Dorota	1.	GAlej KE	1									65
5.	Puza Marko	2.	GPoš KE	2		6	2		3				64
6.	Kočiščák Samuel	1.	GPoš KE	1	9	3	2			3			62
7.	Jursa Ján	2.	GPoš KE	2		6	9	0	3				50
8.	Oravcová Martina	2.	GPoš KE	2									44
9.	Flóriánová Lucia	2.	GPoš KE	2		1	7		3				41
10.	Galajda Marek	3.	GsvTA KE	3									32
11.	Ženčuchová Andrea	1.	GJAR PO	1									31
12.	Dudič Ján	3.	GPoš KE	3									24
12.	Kello Tomáš	3.	GJAR PO	3									24
14.	Lukáč Jakub	2.	GKuk PP	2									20
15.	Fedák Marek	1.	CGsvM SL	1									18
16.	Batmendijn Eduard	1.	ZŠsvCM SL	2									9
17.	Országh Marián	2.	GJAR PO	3									7
17.	Stehlík Mojmír	1.	GTreb KE	1									7
19.	Bašista Adam	2.	GKuk PP	2									6
20.	Polovka Maroš	2.	GKuk PP	3									1

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Žárský Jan	1.	Kopřivnice ČR	1	3	6	4		3				84
2.	Štěpánek Martin	1.	Příbor ČR	1	9	7				4	1		74
3.	Zlocha Martin	1.	Kirchberg LU	1	1	1		3	3				55
4.	Le Anh Dung	2.	Tachov ČR	2							9		25