Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2012/2013

Úloha č. 1: *Nájdite všetky možnosti pre 21 po sebe idúcich čísel, z ktorých je aspoň 8 prvočísel.*

Riešenie: (opravoval Mojo)

Pozrime sa na prípady, keď medzi našimi 21 číslami nie sú čísla 2, 3 ani 5.

Keďže každé druhé číslo je párne, tak medzi 21 po sebe idúcimi číslami je aspoň $\lfloor 21/2 \rfloor = 10$ párnych čísel.[1] Medzi týmito 10 číslami určite nie je prvočíslo. Takisto medzi našimi 21 číslami je aspoň $\lfloor 21/3 \rfloor = 7$ čísel deliteľných číslom tri. Z nich sú aspoň $\lfloor 7/2 \rfloor = 3$ nepárne čísla (rozmyslite si prečo). To sú ďalšie zložené čísla rôzne od desiatich, ktoré sme už našli.

Nakoniec v našej 21-tici sú aspoň $\lfloor 21/5 \rfloor = 4$ čísla deliteľné piatimi. Z nich sú práve dve nepárne. Rozdiel medzi týmito dvomi číslami je 10, čiže najviac jedno z nich je deliteľné tromi (rozmyslite si prečo). Čiže opäť sme našli ďalšie zložené číslo (to, ktoré je deliteľné 5, no nie je deliteľné 2 a 3). Dokopy sme ich už našli $10 + 3 + 1 = 14$. Prvočísel je teda najviac $21 - 14 = 7$, čo nesplňa zadanie.

Každý už poľahky overí, že 21-tice obsahujúce čísla

- 1 až 21, 2 až 22, 3 až 23 zadanie spĺňajú,
- 4 až 24, 5 až 25 nespĺňajú zadanie.

Komentár: V zadaní sme omylom zabudli napísať, že sa jedná o 21 prirodzených čísel, a preto niektorí riešitelia overovali celé čísla a našli ďalšie riešenia. Konkrétne 0 až 20 a -1 až 19. Riešiteľom, ktorí nezabudli overiť tieto možnosti udeľujeme pochvalu.

Úloha č. 2: *Nájdite prvočíslo p, pre ktoré platí, že $2013p + 1$ je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.*

Riešenie: (opravovala Katka J.)

Prvá vec, ktorú si môžeme všimnúť v zadaní je, že netreba nájsť všetky riešenia — stačí jedno. V takomto prípade niekedy stačí byť dosť trpezlivý a skúšať zaradom prvočísla, až kým nenájdeme jedno, ktoré vyhovuje. Kedže je to jednak zaznávaná praktika a jednak to môže trvať dosť dlho, užitočnejšie bude sa najprv zamyslieť nad nejakým zjednodušením hľadania riešenia.

Zo zadania platí, že $2013p + 1 = n^2$, kde n je prirodzené číslo ($n \in \mathbb{N}$). Môžeme si všimnúť, že po úprave sa táto rovnica dá zapísať ako

$$2013p = n^2 - 1,$$

$$2013p = (n + 1)(n - 1). \tag{1}$$

Tu prichádza na rad ono zjednodušenie riešenia. Na ľavej strane aj na pravej strane rovnice sú dva činitele. Nemohli by si náhodou zodpovedať? Po tom, ako vyskúšame $2013 = (n + 1)$, zistíme, že zadaniu vyhovuje ako prvočíslo 2011, zatiaľ čo pre $2013 = (n - 1)$ je $p = 2015$, čo nie je prvočíslo. Každopádne, našli sme jedno riešenie ($p = 2011$), ktoré ako odpoveď stačí.

V prípade, že sa neuspokojíme s nájdením jedného riešenia alebo by v našom zadaní nevystupovalo také pekné číslo, ako je 2013, musíme preskúmať aj ďalšie možnosti. Znovu sa vrátime k rovnici (1). Ak táto rovnica platí, potom výrazy $(n+1)$ aj $(n-1)$ musia deliť výraz $2013 \cdot p$. Koľko je deliteľov tohto výrazu? Platí, že $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ a p je prvočíslo, takže

$$3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot p = (n + 1) \cdot (n - 1).$$

Číslo 2013 má 8 rôznych deliteľov — čísla 1, 3, 11, 61, $3 \cdot 11$, $3 \cdot 61$, $11 \cdot 61$ a $3 \cdot 11 \cdot 61$. Stačí, ak budeme pre každý z týchto deliteľov uvažovať, že je rovný $(n + 1)$ alebo $(n - 1)$, pričom dopočítame p. Tento postup si ukážeme na príklade deliteľa $3 \cdot 61$.

[1] $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x (najväčšie celé číslo neprevyšujúce x).

Ak $3 \cdot 61 = (n+1)$, potom $(n-1) = 181$. Musí platiť, že 181 je súčinom zvyšných deliteľov výrazu $2013p$, takže $181 = 11 \cdot p$. V tomto prípade ale p nie je prvočíslo. Ak $3 \cdot 61 = (n-1)$, potom podobne $185 = 11 \cdot p$ a p tu znova nie je prvočíslo.
Ak by sme takýto postup vyskúšali pre všetkých osem deliteľov, prišli by sme na obidve riešenia tejto úlohy: $p = 223$ a $p = 2011$. Na záver si skúste premyslieť, či sme pri našom postupe naozaj preskúmali všetky riešenia.

Úloha č. 3: *Reálne čísla a, b spĺňajú vzťah $a - b \geq 2$. Dokážte, že $a^4 + b^4 \geq 2$.*

Riešenie: (opravovala Betka)
Prepíšme si vzťah zo zadania, ktorý a, b spĺňajú, do tvaru $a \geq b + 2$.
Všimnime si, že ak $b \leq -2$, tak $b^4 \geq (-2)^4$. Navyše vždy platí $a^4 \geq 0$ a teda určite $a^4 + b^4 \geq 2$, dokonca by sme tam namiesto dvojky mohli dať šestnástku.
Zostáva nám zistiť, čo sa deje ak $b > -2$. Vtedy sú na oboch stranách nerovnosti $a \geq 2 + b$ kladné čísla, môžeme ju teda umocniť, pričom dostaneme $a^4 \geq (b+2)^4$. Ak sa nám podarí ukázať, že $(b+2)^4 + b^4 \geq 2$, tak sme hotoví. Máme umocňovať na štvrtú dva výrazy, ktorých rozdiel je 2, takže si ich určite vieme prepísať ako $x + 1$ a $x - 1$. Ale pomôže nám to? Tak skúsme a uvidíme:

$$(x+1)^4 + (x-1)^4 = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

Tento tvar je super v tom, že sa v ňom nenachádzajú žiadne nepárne mocniny a o párnych vieme, že nikdy nie sú záporné. S kľudom teda môžeme prehlásiť, že $a^4 + b^4 \geq (b+2)^4 + b^4 = 2x^4 + 12x^2 + 2 \geq 2$.
Tým sme dokázali, že $a^4 + b^4 \geq 2$ pre všetky a, b, pre ktoré platí $a - b \geq 2$.

Iné riešenie:
Na oboch stranách nerovnosti $a - b \geq 2$ sú kladné čísla, po umocnení dostaneme $(a-b)^2 \geq 4$. Určite platí, že $(a+b)^2 \geq 0$. Po sčítaní týchto dvoch nerovností dostaneme

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 + (a+b)^2 &\geq 4, \\
(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2) &\geq 4, \\
2a^2 + 2b^2 &\geq 4, \\
a^2 + b^2 &\geq 2.
\end{aligned}$$

Túto nerovnosť môžeme zasa umocniť a sčítať s $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ a po pár úpravách dospejeme k želanej nerovnosti.
Poznámka: Obe riešenia sú založené na dvoch faktoch:

1. Výrazy $(X+Y)^n$ a $(X-Y)^n$ majú po roznásobení rovnaké členy, až na to, že druhý strieda znamienka. Po ich sčítaní (resp. odčítaní) sa teda každý druhý člen vynuluje.
2. Párne mocniny sú nezáporné.

Úloha č. 4: *Z každého vrcholu konvexného mnohostena vychádzajú presne tri hrany, z ktorých aspoň dve sú rovnako dlhé. Dokážte, že daný mnohosten má tri hrany rovnakej dĺžky.*

Riešenie: (opravovala Linda a Sopo)
Skúsme príklad vyriešiť pomocou dôkazu sporom. Dajme si za úlohu nájsť taký mnohosten, ktorý spĺňa podmienky zo zadania a zároveň nemá tri rovnako dlhé hrany.
Najskôr sa pozrime, koľko hrán má taký mnohosten. Ak má n vrcholov, tak bude mať $3n/2$ hrán. (Z každého vrcholu idú tri hrany, čím získame $3n$, nesmieme však zabudnúť na veľmi dôležitú vec, že sme každú hranu započítali dvakrát, v oboch vrcholoch, ktoré táto hrana spája.)
Teraz zamerajme našu pozornosť na to, koľko rôznych hrán potrebujeme, aby sme nemali tri a viac hrán rovnakých. Vezmime si jeden vrchol. Z neho vedú dva typy hrán. Dve rovnaké, tretia rôzna. Ako si môžeme všimnúť, ku každému vrcholu by sme mohli pripísať číslo, ktoré určuje dĺžku jeho dvoch rovnako dlhých hrán. (Napríklad ak z vrcholu A vychádzajú hrany dĺžok 4, 4, 2, tak si zapíšeme číslo 4.) Čiže ak máme n vrcholov, mali by sme dostať n čísiel. Teraz je otázne, či sa niektoré z nich môžu rovnať. To však nie je možné, lebo potom z dvoch vrcholov vychádzajú 2 rovnako dlhé hrany, čo znamená že sú aspoň 3 hrany rovnako dlhé (dva vrcholy majú nanajvýš jednu spoločnú hranu). Čiže všetkých n čísiel musí byť rôznych. Potrebujeme preto $2n$ hrán (n rôznych dvojíc hrán).
Narazili sme na spor. Náš mnohosten má $3n/2$ hrán, my ich ale potrebujeme $2n$, takže nie sme schopní vytvoriť taký mnohosten, ktorý nemá tri rovnako dlhé hrany.

Úloha č. 5: *Kubo s Mojom si zvyknú krátiť čas nasledovnou hrou. Kubo hodí dvomi hracími kockami, sčíta body, ktoré mu na nich padli a tento súčet označí a. Ak je a väčšie ako deväť, tak znovu hodí dvomi kockami a súčet bodov, ktoré mu padli označí b. Ak a je menšie ako desať, tak hodí dvanásťstenom a počet bodov, ktoré mu padli označí b. Svoje výsledné skóre vypočíta ako súčet $a + b$. Mojo na začiatku hodí dvanásťstenom (má dvanásť stien, na ktorých sú čísla od jeden do dvanásť) a počet bodov, ktoré mu padli označí a. Zvyšok jeho hry je rovnaký ako*

Kubov. Vyhráva ten, koho výsledné skóre je väčšie[2]. *Rozhodnite, kto z nich vyhráva častejšie. Svoje rozhodnutie zdôvodnite.*

Riešenie: (opravoval Lietadlo a Ondro)
Pravdepodobnosť, že padne viac ako 9 je $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ pre dve kocky a $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ pre 12-sten.
Pri hre môžu nastať štyri prípady:

1. Kubo hádže dvakrát dvomi kockami, Mojo raz 12-stenom a raz kockami.
2. Kubo hádže dvakrát dvomi kockami, Mojo dvakrát 12-stenom.
3. Kubo hádže dvomi kockami a 12-stenom, Mojo dvakrát 12-stenom.
4. Kubo hádže dvomi kockami a 12-stenom, Mojo raz 12-stenom a raz kockami.

Označme $P_K(s)$ pravdepodobnosť, že na dvoch kockách padne súčet s. Číslo $P_K(s)$ je nulové pre všetky čísla okrem celých čísel z intervalu $\langle 2, 12\rangle$.

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_K(s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Zároveň označme $P_D(s)$ pravdepodobnosť, že na 12-stene padne číslo s. Číslo $P_D(s)$ je rovné 1/12, ak s je celé číslo z intervalu $\langle 1, 12\rangle$, inak $P_D(s)$ je rovné nule.
Rozoberme teraz jednotlivé možnosti. V každej spočítame pravdepodobnosť Kubovej výhry tak, že pre každý Kubov súčet spočítame pravdepodobnosť, že Mojo hodil menej.

1. Obaja hráči majú $a > 9$. Pravdepodobnosť, že Kubo hodil súčet s je $\sum_{i=10}^{12} P_K(i)P_K(s-i)$. Pre Moja je táto pravdepodobnosť $\sum_{i=10}^{12} P_D(i)P_K(s-i)$. Potom pravdepodobnosť, že Kubo vyhrá je
$$\sum_{k=12}^{24}\left[\sum_{i=10}^{12} P_K(i)P_K(k-i)\cdot\sum_{j=12}^{k-1}\sum_{i=10}^{12} P_D(i)P_K(j-i)\right].$$
2. Kubo má $a > 9$ a Mojo má $a < 10$. Pre Kuba je pravdepodobnosť súčtu s stále $\sum_{i=10}^{12} P_K(i)P_K(s-i)$. Pre Moja je teraz rovná $\sum_{i=1}^{9} P_D(i)P_D(s-i)$. Pravdepodobnosť Kubovej výhry je
$$\sum_{k=12}^{24}\left[\sum_{i=10}^{12} P_K(i)P_K(k-i)\cdot\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{9} P_D(i)P_D(j-i)\right].$$
3. Kubo aj Mojo majú $a < 10$. Kubo hodí súčet s s pravdepodobnosťou $\sum_{i=2}^{9} P_K(i)P_D(s-i)$. Mojo ho hodí s pravdepodobnosťou $\sum_{i=1}^{9} P_D(i)P_D(s-i)$. Pravdepodobnosť Kubovej výhry je
$$\sum_{k=3}^{21}\left[\sum_{i=2}^{9} P_K(i)P_D(k-i)\cdot\sum_{j=2}^{k-1}\sum_{i=1}^{9} P_D(i)P_D(j-i)\right].$$
4. Kubo má $a < 10$ a Mojo má $a > 9$. Potom Kubo hodí súčet s s pravdepodobnosťou $\sum_{i=2}^{9} P_K(i)P_D(s-i)$. A Mojo hodí súčet s s pravdepodobnosťou $\sum_{i=10}^{12} P_D(i)P_K(s-i)$. Kubo vyhrá s pravdepodobnosťou
$$\sum_{k=3}^{21}\left[\sum_{i=2}^{9} P_K(i)P_D(k-i)\cdot\sum_{j=12}^{k-1}\sum_{i=10}^{12} P_D(i)P_K(j-i)\right].$$

Teraz nám stačí sčítať jednotlivé pravdepodobnosti, keďže jednotlivé prípady sú disjunktné. Celková pravdepodobnosť Kubovej výhry je približne 49,38%. Pravdepodobnosť remízy spočítame tak, že pre každý súčet (od 2 po 24) spočítame pravdepodobnosť, že padol súčasne Kubovi aj Mojovi, a potom ich sčítame. Pravdepodobnosť remízy je približne 5,98%. Potom pravdepodobnosť Mojovej výhry je približne 44,64%. Teda Kubo vyhráva častejšie.

Iné riešenie:
Zistime najprv, či sú lepšie kocky alebo dvanásťsten. Ukážeme si fintu, ako spočítať pravdepodobnosť, že na kockách padne viac ako na dvanásťstene, bez toho, aby sme veľa počítali.
Predstavme si, že sme hodili kocky a dvanásťsten, na kockách padol súčet k a na dvanásťstene padlo d. Keď teraz otočíme obe kocky aj dvanásťsten na opačnú stranu, tak (za predpokladu, že sú správne očíslované) súčet na

[2] Ak majú rovnaké výsledné skóre, tak je remíza a nevyhráva ani jeden.

kockách bude $14-k$ (premyslite si) a na dvanásťstene bude $13-d$. Keby sme ich znovu otočili na opačnú stranu, dostaneme pôvodný hod. Môžeme teda všetky možné hody rozdeliť do dvojíc „(hod, opačný hod)“. A na čo je to dobré? Keďže k, d sú celé čísla, platí

$$k \leq d \iff k < d+1 \iff 14-k > 13-d.$$

To znamená, že z každej takejto dvojice hodov v jednom vyhrajú kocky (a v druhom je buď remíza, alebo vyhrá dvanásťsten). Pravdepodobnosť, že na kockách padne viac, je preto presne 50%. Z toho už hneď vieme, že kocky vyhrávajú častejšie ako dvanásťsten (pravdepodobnosť remízy je nenulová), takže zistili sme, že kocky sú lepšie.
Teraz si už len stačí uvedomiť, že nech sa deje čo sa deje, Kubo hádže raz kockami a raz dvanásťstenom v najhoršom prípade (v lepšom hádže 2-krát kockami), zatiaľ čo Mojo v najlepšom (v horšom hádže 2-krát dvanásťstenom). Kubo teda vyhráva častejšie.

Úloha č. 6: *Dominik Žltý mal vypočítať príklad $X \cdot Y/Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y je trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Dominik ale prehliadol bodku a súčin $X \cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal Dominik počítať?*

Riešenie: (opravoval Miki)
Najprv si uvedomíme, čo nám vraví zadanie. Zostrojíme rovnicu, ktorá popisuje to, čo chceme:

$$\frac{7 \cdot X \cdot Y}{Z} = \frac{X \cdot 1000 + Y}{Z},$$

kde $X \cdot 1000 + Y$ je číslo, ktoré vznikne zapísaním dvojciferného čísla X a trojciferného čísla Y za seba, ako 5-ciferné číslo.
Teraz vieme rovnicu upravovať. Vynásobíme Z:

$$7 \cdot X \cdot Y = X \cdot 1000 + Y.$$

Po predelení $X \cdot Y$ dostaneme:

$$7 = \frac{1000}{Y} + \frac{1}{X}.$$

Všimnime si, že keď zoberieme najväčšie X, tak rovnica bude splnená pre nejaké Y. Keď postupne X budeme zmenšovať, tak aby stále platila rovnosť, bude sa Y zväčšovať. Dosaďme najmenšie a najväčšie X a pozrime sa aké môže byť Y.
Najmenšie X je 10. Dopočítame

$$Y = \frac{1000}{7 - \frac{1}{10}} = 144{,}9275\ldots < 145.$$

Najväčšie X je 99. Dopočítame

$$Y = \frac{1000}{7 - \frac{1}{99}} = 143{,}06\ldots > 143.$$

Vieme, že Y musí byť menšie než 145 a väčšie než 143 a zároveň musí byť celé. Takže $Y = 144$. Tentoraz dopočítame

$$X = \frac{1}{7 - \frac{1000}{144}} = 18.$$

Teraz nám stačí nájsť vyhovujúce Z. Vieme, že $X \cdot Y/Z$ je celé číslo. Preto Z delí $18 \cdot 144 = 2592$. Zároveň vieme, že Z je trojciferné a končí dvojkou. Pretože sa pozeráme na deliteľov 2592, napíšme si jeho rozklad na prvočísla: $2592 = 2^5 \cdot 3^4$.
Keby Z nebolo deliteľné 9, tak Z je maximálne $2^5 \cdot 3 < 100$, čiže by nebolo trojciferné. Takže Z je deliteľné 9. Taktiež vieme, že Z je deliteľné 2, lebo končí na cifru 2. Preto Z je deliteľné 18. Teda $Z = 18 \cdot k$, kde k je deliteľom $2^4 \cdot 3^2$. Vieme, že posledná cifra Z je 2, preto $18 \cdot k$ musí končiť na 2. Keď sa pozrieme aká cifra je na konci, keď 18 násobíme nejakým číslom, zistíme, že k musí končiť na 4 alebo 9. Rozoberme teda dva prípady:

1. Posledná cifra k je 4: Vyhovujú možnosti $k = 24$, $Z = 432$, alebo $k = 4$, $Z = 72$, čo nie je trojciferné číslo, alebo $k = 144$, $Z = 2592$, čo opäť nie je trojciferné.
2. Posledná cifra k je 9: Vyhovuje jediná možnosť $k = 9$, $Z = 162$.

Vyhovujú teda dve trojice: $X_1 = 18$, $Y_1 = 144$, $Z_1 = 432$ a $X_2 = 18$, $Y_2 = 144$, $Z_2 = 162$.

Úloha č. 7: *Dokážte, že pre každé iracionálne číslo a existujú iracionálne čísla b, c také, že čísla $a + b$ a ac sú racionálne, a zároveň čísla $a + c$ a ab sú iracionálne.*

Riešenie: (opravoval JeFo a Murko)
Máme dokázať, že nejaké čísla existujú, tak ich skúsme nájsť. Ukážeme najprv, že pre $k \in \mathbb{Z}$ sú čísla $k - a$ a k/a ($a \neq 0$, keďže uvažujeme iracionálne a) iracionálne.[3] Urobíme to sporom, pričom využijeme fakt, že každé racionálne číslo vieme zapísať ako p/q, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$:

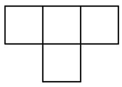
- $k - a = \frac{p}{q} \implies a = \frac{qk - p}{q}$, čo je racionálne — spor.
- $\frac{k}{a} = \frac{p}{q} \implies a = \frac{qk}{p}$, čo je tiež racionálne — spor.

Ešte sa oplatí vedieť nasledovné: Ak je rozdiel dvoch čísel iracionálny, tak aspoň jedno z tých dvoch čísel je iracionálne. Dôkaz opäť sporom: Keby boli obe tie čísla racionálne, tak ich rozdiel

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

je tiež racionálny.
Vezmime si čísla $-a$ a $1 - a$. Obe sú podľa predošlého iracionálne. Po pripočítaní a dávajú zjavne racionálne číslo. Po vynásobení a dávajú $-a^2$ a $a - a^2$. Rozdiel týchto čísel je a, teda iracionálny, takže aspoň jedno z nich je iracionálne. Preto aspoň jedno z čísel $-a$ a $1 - a$ spĺňa podmienky zo zadania pre b.
Teraz si vezmime iracionálne čísla $1/a$ a $2/a$. Po vynásobení a dávajú zjavne racionálne číslo. Po pripočítaní a dávajú $a + 1/a$ a $a + 2/a$. Rozdiel týchto čísel je $1/a$, o čom sme už povedali, že je iracionálne, takže aspoň jedno z týchto čísel je iracionálne. Aspoň jedno z dvojice $1/a$, $2/a$ teda vyhovuje podmienkam pre číslo c zo zadania.
Tým sme dokázali, že čísla b a c existujú pre každé iracionálne a.

Úloha č. 8: *Vieme uložiť čísla* 1 *až* 100 *do štvorčekovej siete* 10×10 *tak, aby v ľubovoľnom T-čku, zloženom zo štyroch políčok, bol súčet čísel párny? T-čko môže byť aj otočené.*



Riešenie: (opravoval Hagito a Berenito)
Podľa zadania máme zistiť, či vieme nejako špeciálne uložiť čísla do štvorčekovej siete. Zatiaľ netušíme, či to ide alebo nie, a tak sa môžeme skúsiť pozrieť, ako by takáto štvorčeková sieť mala vyzerať. Buď sa nám ju podarí vytvoriť, alebo prídeme k nejakému sporu, ktorý bude znamenať, že sa to nedá.[4]
Jediné, čo má pre tie čísla platiť je, že súčet nejakých štvoríc bude párny. Parita súčtu závisí len od parity sčítancov, takže si tie čísla nemusíme predstavovať ako čísla od 1 do 100, ale bude nám stačiť vedieť, že je medzi nimi 50 párnych a 50 nepárnych.
Teraz sa zamerajme na ľubovoľný štvorec 3×3 nachádzajúci sa v našej štvorčekovej sieti. Tri políčka označené ⧫ sa dajú doplniť do T-čka dvoma spôsobmi. Políčkom A a políčkom B. Obe tieto T-čka majú mať párny súčet a tri políčka majú spoločné. To znamená, že políčka A a B musia mať rovnakú paritu.

	⧫	
A	⧫	⧫
	B	

Keď túto fintu ešte párkrát zopakujeme (ale trochu otočenú), tak zistíme, že všetky políčka označené ■ musia mať rovnakú paritu. Ľubovoľná trojica políčok ■ spoločne s políčkom □ tvoria T-čko, čiže ich súčet má byť párny. Z toho vyplýva, že aj políčko □ má mať rovnakú paritu ako políčka ■. Platí totiž, že ak má byť súčet čísel párny, tak musí byť medzi sčítancami párny počet nepárnych čísel (rozmyslite si prečo) — čiže buď 0, 2 alebo 4.

	■	
■	□	■
	■	

Práve sme zistili, že ľubovoľné dve nerohové hranou susediace políčka majú rovnakú paritu (ak zvolíme správny štvorec 3×3, tak jedno z nich bude na pozícii □ a druhé na jednej z pozícií ■). To však znamená, že všetky políčka okrem rohových musia mať rovnakú paritu a my nemáme 96 čísel s rovnakou paritou, máme iba 50 takých a 50 onakých. Dospeli sme k tomu sporu. Odpoveď teda znie, že to nevieme spraviť.

Úloha č. 9: *Máme kladné celé čísla* a, b. *Posledná cifra výrazu* $a^2 + ab + b^2$ *je* 0. *Ukážte, že aj predposledná cifra musí byť* 0.

[3] Toto platí aj pre $k \in \mathbb{Q}$, ale nám teraz bude stačiť táto slabšia verzia.
[4] Ešte je tu aj možnosť, že na nič neprídeme, ale to sa snáď nestane.

Riešenie: (opravovali Kubo a Mišo T.)
(Podľa *Michala Bui Truc Lam.*)
Ak $a^2 + ab + b^2$ je deliteľné 10, potom je aj $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. Skúmajme teraz zvyšky čísel tvaru $(10k + l)^3$ po delení 10.

$$
\begin{aligned}
(10k+0)^3 &\equiv 0 \pmod{10} & (10k+1)^3 &\equiv 1 \pmod{10}\\
(10k+2)^3 &\equiv 8 \pmod{10} & (10k+3)^3 &\equiv 7 \pmod{10}\\
(10k+4)^3 &\equiv 4 \pmod{10} & (10k+5)^3 &\equiv 5 \pmod{10}\\
(10k+6)^3 &\equiv 6 \pmod{10} & (10k+7)^3 &\equiv 3 \pmod{10}\\
(10k+8)^3 &\equiv 2 \pmod{10} & (10k+9)^3 &\equiv 9 \pmod{10}
\end{aligned}
$$

Z toho vidíme, že aby $a^3 - b^3$ bolo deliteľné 10, musí platiť $a \equiv b \pmod{10}$. Potom

$$0 \equiv a^2 + ab + b^2 \equiv 3a^2 \pmod{10}.$$

Takže máme $10 \mid 3a^2$, a keďže 3 a 10 sú nesúdeliteľné, platí aj $10 \mid a^2$. Keďže 10 nemá v prvočíselnom rozklade žiadne prvočíslo 2-krát, platí aj $10 \mid a$. A rovnako $10 \mid b$. Potom už $100 \mid a^2$, $100 \mid b^2$ a $100 \mid ab$. Odtiaľ $100 \mid (a^2 + ab + b^2)$, teda aj predposlená cifra je 0.

Iné riešenie:
Bez prvého kroku v prvom riešení sa nepohneme, tak sa pozrime ako sa to dá dokázať priamo z pôvodnej formulácie. $10 \mid a^2+ab+b^2 \implies \big(2 \mid a^2 + ab + b^2\big) \wedge \big(5 \mid a^2 + ab + b^2\big)$. Ak by sme ukázali, že $(2 \mid a) \wedge (2 \mid b)$ (resp. $(5 \mid a) \wedge (5 \mid b)$), platilo by aj $2^2 \mid a^2 + ab + b^2$ (resp. $5^2 \mid a^2 + ab + b^2$), čo spolu vraví, že celý výraz je deliteľný 100.
Začnime dvojkou. Ak by boli aj a aj b nepárne, celý výraz by bol nepárny, a teda by nemal na konci 0. Ak by bolo jedno z a alebo b párne, takisto by bol celý výraz nepárny. Teda aj a aj b musia byť párne.
Ak by bolo jedno z čísel, povedzme a, deliteľné 5, musí byť aj b, lebo $\big(5 \mid a^2 + ab + b^2\big) \wedge \big(5 \mid a^2 + ab\big)$. Ak by $a \equiv b \pmod{10}$, tak $5 \mid 3a^2$, čo platí jedine ak $5 \mid a$. Ostalo nám 6 možností, aké by mohli byť zvyšky po delení 5: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) a (3, 4), ktoré už ľahko overíme, že zadaniu nevyhovujú. Jediná možnosť teda je aby a aj b boli deliteľné 5, čo sme chceli ukázať.

Úloha č. 10: *Kuna, ako iste viete, je svetoznáma športovkyňa, ktorá sa preslávila hlavne poskakovaním po číslach. Najnovšie trénuje svoje zostavy poskakovania na spartakiádu. Správna zostava musí spĺňať:*

- *kuna na začiatku zostavy sedí na racionálnom čísle,*
- *ak sa nachádza na čísle a, tak nabudúce skočí na číslo $2a^2 - 1$,*
- *aspoň raz sa objaví na čísle, na ktorom už počas zostavy bola.*

Aké zostavy má kuna v repertoári?

Riešenie: (opravoval CD)
Na začiatku takéhoto príkladu je najlepšie odskúšať si, ako kuna skáče pre nejaké začiatočné hodnoty:

- $0, -1, 1, 1, \dots$
- $2, 7, 97, \dots$
- $1/2, -1/2, -1/2, \dots$
- $1/3, -7/9, 17/81, -5983/6561, \dots$
- $1/4, -7/8, 17/32, -223/512, \dots$

Prvé, čo sme si mohli všimnúť je, že pre 2 začala kuna skákať po stále väčších a väčších číslach. Radi by sme teda zistili, pre ktoré a platí: $2a^2 - 1 > a$. Po krátkych úpravách zistíme, že pre $|a| > 1$ bude kuna skákať na väčšie číslo. Teda sa už nikdy nevráti naspäť.
Ostáva nám teda preveriť interval $[-1, 1]$. Čo sme si pre tieto čísla všimli pri skúšaní? Pre čísla 0, 1/2 sa nám kuna ustálila na niektorom čísle. Čísla 1/3 a 1/4 naopak vyzerajú, že sa nikdy nevrátia naspäť, pretože ich menovateľ sa stále zväčšuje. Ak by sme vedeli ukázať, že menovateľ sa v základnom tvare pre takéto čísla bude stále zväčšovať, tak tieto čísla kuna vo svojom repertoári určite nebude mať. Skúsme to teda dokázať.
Na začiatku máme racionálne číslo, označíme si ho p/q, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ a p, q sú nesúdeliteľné. Ďalšie číslo, na ktoré kuna skočí bude

$$2 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2}.$$

Menovateľ sa teda zväčšil na q^2 z q. Môže sa ale stať, že tento zlomok nie je v základnom tvare. Aký je najväčší spoločný deliteľ čitateľa a menovateľa? S použitím Euklidovho algoritmu vieme, že $\mathrm{NSD}(q^2, 2p^2 - q^2) = \mathrm{NSD}(q^2, 2p^2)$.

Z predpokladu $\mathrm{NSD}(p,q)=1$ vyplýva $\mathrm{NSD}(q^2,2p^2)=\mathrm{NSD}(q^2,2)$. Aby nám nestúpal menovateľ, najväčší spoločný deliteľ čitateľa a menovateľa musí byť viac ako jedna, alebo menovateľ musí byť rovný jednej. Ak by $\mathrm{NSD}(q^2,2)>1$, tak $q=2^k, k\in\mathbb{N}$. Pre takéto q sa menovateľ zväčší na 2^{2k} a vykráti sa 2 s čitateľom. Dostaneme teda 2^{2k-1}. Aby sa menovateľ nezväčšil, potrebujeme aby $2^{2k-1}\le 2^k$, čo platí len pre $k=1$. Menovateľ je teda buď $2^1=2$ alebo 1. Ostáva nám teda preskúšať čísla takéhoto tvaru v intervale $[-1,1]$. To sú čísla -1, $-1/2$, 0, $1/2$ a 1, ktoré po preskúšaní spĺňajú všetko, čo od nich kuna žiada, pretože sa zacyklia na jednom čísle (čitateľ si zo zvedavosti môže vyskúšať :)).
Zostavy, ktoré má kuna v repertoári, sa začínajú číslami -1, $-1/2$, 0, $1/2$ a 1.

Úloha č. 11: *Edo si vyznačil na tabuli k rôznych bodov. O k vieme, že je to prirodzené číslo, ktoré je rovné nanajvýš* 2013. *Edo si z geometrie pamätá, že ľubovoľné dva rôzne body určujú priamku. Koľko rôznych priamok môže určovať Edova množina bodov?*

Riešenie: (opravoval Maťo Bachratý)
Úlohou bolo zistiť, aké rôzne počty priamok vieme dosiahnuť, ak máme k dispozícii k bodov, pričom $1\le k\le 2013$. Najskôr skúsime zistiť, ktoré čísla určite nevieme dosiahnuť. Máme k dispozícií najviac 2013 bodov, takže vieme určiť najviac $\binom{2013}{2}$ priamok. Určite nevieme určiť 2 priamky. Buď máme všetky body na jednej priamke, a teda iba jednu priamku, alebo máme aspoň tri body neležiace na jednej priamke, potom však máme najmenej tri priamky. Taktiež nevieme dosiahnuť $\binom{2013}{2}-1$ priamok. Nastane jeden z nasledujúcich prípadov:

- žiadna trojica bodov nie je kolineárna (takéto rozloženie bodov budeme nazývať *nekolineárne*), potom však máme až $\binom{2013}{2}$ priamok,
- nejaké tri body ležia na jednej priamke. Oproti nekolineárnemu rozloženiu týmto stratíme aspoň dve priamky (v našom rozložení tieto tri body určujú iba jednu priamku, zatiaľ čo v nekolineárnom rozložení určujú až tri priamky), teda máme najviac $\binom{2013}{2}-2$ priamok, a to je málo.

Podobnými úvahami vieme vyradiť aj číslo $\binom{2013}{2}-3$ (skúste si premyslieť ako).
Ukážeme, že všetky ostatné hodnoty vieme dosiahnuť. Najskôr sa postarajme o malé čísla. Nula priamok dostaneme tak, že si vezmeme iba jeden bod. Jednotku dostaneme napríklad tak, že dáme do roviny dva body. Pre ľubovoľné $m\in 3,4,\dots,2013$ dostaneme m priamok tak, že $m-1$ bodov umiestnime na jednu priamku a zvyšný bod niekde mimo nej.
Teraz nájdeme spôsob, akým dostať m priamok, kde $\binom{n}{2}\le m\le\binom{n+1}{2}$, pomocou $n+2$ bodov. Stačí nám uvažovať $63\le n$, pretože $\binom{63}{2}<2013$ a prípady $m\le 2013$ sme už rozobrali. Položme $t=\binom{n+2}{2}-m$. Vieme, že t leží medzi $\binom{n+2}{2}-\binom{n+1}{2}$ a $\binom{n+2}{2}-\binom{n}{2}$, teda $n+1\le t\le 2n+1$. Ak rozložíme všetkých $n+2$ bodov nekolineárne, tak dostaneme $\binom{n+2}{2}$ priamok, my ich však chceme dostať $m=\binom{n+2}{2}-t$. Na to treba niektoré body dať na jednu priamku. Ak dáme na jednu priamku 7 bodov, tak nám ubudne $\binom{7}{2}-1=20$ priamok. Podobne, ak dáme na jednu priamku 6, 5, 4 respektíve 3 body, tak nám ubudnú 14, 9, 5 respektíve 2 priamky.
Každé t vieme napísať v tvare $t=20l+z$, kde $0\le z<20$. Ak sa nám podarí z napísať ako súčet čísel z množiny $\{14,9,5,2\}$, tak už dokážeme uložiť $n+2$ bodov do roviny tak, aby určovali m priamok. Napríklad pre $z=12$ máme $t=20l+5+5+2$. Chceme, aby nám ubudlo $20l+5+5+2$ priamok. Preto dáme na jednu priamku jednu trojicu bodov (ubudnú nám tak dve priamky), dve štvorice bodov (ubudne nám tak dva krát päť priamok) a l sedmíc bodov (ubudne nám tak l krát 20 priamok). Ak navyše umiestnime body tak, že žiadna iná trojica vrcholov neleží na priamke, tak to budú všetky priamky, čo nám ubudnú oproti nekolineárnemu rozloženiu $n+2$ vrcholov. Dostaneme tak $\binom{n+2}{2}-t=m$ priamok. Otázka je, či nepotrebujeme niekedy využiť viac vrcholov než máme k dispozícii a či vieme každé číslo z napísať ako súčet čísel z množiny $\{14,9,5,2\}$. Pozrime sa najskôr na druhú otázku:

$$
\begin{aligned}
20l+0&=20l & 20l+10&=20l+5+5\\
20l+1&=20(l-1)+14+5+2 & 20l+11&=20l+9+2\\
20l+2&=20l+2 & 20l+12&=20l+5+5+2\\
20l+3&=20(l-1)+14+9 & 20l+13&=20l+9+2+2\\
20l+4&=20l+2+2 & 20l+14&=20l+14\\
20l+5&=20l+5 & 20l+15&=20l+5+5+5\\
20l+6&=20l+2+2+2 & 20l+16&=20l+14+2\\
20l+7&=20l+5+2 & 20l+17&=20l+5+5+5+2\\
20l+8&=20l+2+2+2+2 & 20l+18&=20l+9+9\\
20l+9&=20l+9 & 20l+19&=20l+14+5
\end{aligned}
$$

Vidíme, že pri $z\in\{1,3\}$ si musíme „požičať“ jednu dvadsiatku, to nám však nevadí, lebo $t\ge n+1>63$, a teda $l>2$. Vďaka tomu nie je $(l-1)$ záporné. Otázka je, či máme dostatok bodov na našu konštrukciu. Najviac bodov potrebujeme ak $z = 17$ (vieme si to ručne overiť) a to $7l + 15$. Vieme, že

$$20l \leq 20l + z = t \leq 2n + 1,$$

čiže $l \leq \frac{2n+1}{20}$. Z toho dostávame

$$7l + 15 \leq 7 \cdot \frac{2n+1}{20} + 15 = \frac{14n + 307}{20}.$$

Chceme, aby platilo

$$\frac{14n + 307}{20} \leq n + 2.$$

Ľahko overíme, že to je ekvivalentné s nerovnosťou $n \geq 44{,}5$, ktorá pre $n \geq 63$ zjavne platí.
Týmto sme vybavili počty priamok od $\binom{63}{2}$ do $\binom{2012}{2}$. Pre počty od $\binom{2012}{2}$ po $\binom{2013}{2}$ využijeme podobný postup, teraz však používame len $n + 1 = 2013$ bodov, teda $0 \leq t \leq n + 1 = 2013$. Dôkaz zlyhá iba pre $m = \binom{2013}{2} - 1$ a $m = \binom{2013}{2} - 3$, ináč bude fungovať (premyslite si prečo).
Ukázali sme teda, že počty priamok, ktoré vieme dostať, sú všetky celé čísla od nula po $\binom{2013}{2}$ okrem čísel 2, $\binom{2013}{2} - 3$ a $\binom{2013}{2} - 1$.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Horváth Samuel	3.	GPár NR	7	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Kossaczká Marta	4.	Gamča BA	11	9			9	9	9	9	9		45	45
1.	Vodička Martin	4.	GAlej KE	11	13			9	9	9	9	9		45	45
4.	Psota Miroslav	3.	GHlin ZA	8	3			9	9	9	9	8		44	44
4.	Šafin Jakub	4.	GPH MI	9	7			9	9	8	9	9		44	44
6.	Bui Truc Lam Michal	2.	Gamča BA	5	4			8	9	9	9	8		43	43
7.	Puza Marko	3.	GPoš KE	6	2		6	9	9	9	9			42	42
8.	Krajčiová Katarína	2.	GAlej KE	5	2		9	5	9	9	9			41	41
8.	Szalay Erik	3.	ŠPMNDG BA	4	0	5	9	9	9	9				41	41
10.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	Gamča BA	6	4			9	9	9	9	4		40	40
11.	Hanzely Filip	4.	GAP SB	11	8			9	9	9	8	3		38	38
11.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3	0	5	9	9	8	7				38	38
13.	Buráň Michal	4.	G JAK CR	5	3			9	9	9	9	1		37	37
14.	Dargaj Jakub	3.	GPoš KE	4	0		9		9	9	9			36	36
14.	Ječmenová Andrea	3.	GVO ZA	7	2		9		9	9	9			36	36
14.	Korbela Michal	3.	G Bánovce	8	3		6	9	9	9	9			36	36
14.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	4	1		9	9	8	7	3			36	36
14.	Pokrývka Filip	3.	G Bánovce	8	3		9	9	9	9	9			36	36
14.	Stankovič Miroslav	3.	GPoš KE	8	8			9	9	9	9			36	36
20.	Kováčová Barbora	3.	ŠPMNDG BA	6	1		9	9	9	8				35	35
21.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	4	0	5	9	6	7	7		1		34	34
21.	Pieš Adrián	3.	ŠPMNDG BA	4	0	5	9		9	9	2			34	34
23.	Smolík Milan	4.	GJH BA	7	1		9	9	6	9				33	33
24.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3	0	5	9		9	9				32	32
24.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	3	0			9	9	9	4	1		32	32
26.	Lipovský Mário	3.	GJH BA	6	2			5	8	9	9			31	31
27.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	2	0		9	4	9	6	2			30	30
27.	Hrivová Ivona	3.	GVO ZA	8	3			9	9	9		3		30	30
27.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	4	0	2	9		9	9	0	1		30	30
30.	Bohdal Ondrej	2.	GJH BA	5	1		9	2	9	6	3			29	29
30.	Lâm Tuân Dûng	2.	GJH BA	5	1		9	5	6	9				29	29
30.	Prešinská Kristína	2.	GPár NR	5	1		9	2	9	8		1		29	29
30.	Prívozník Matej	3.	GJH BA	8	3			9	6	9	2	3		29	29
34.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	2	0	8	6	2	1	9	2	3		28	28

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
34.	Murin Martin	2.	GJH BA	5	0		9	2	5	9		3		28	28
34.	Šimková Ľudmila	3.	GPár NR	8	3			4	8	9	3	4		28	28
37.	Batmendijn Eduard	2.	CGsvM SL	6	4			9	9		9			27	27
37.	Krakovská Hana	3.	Gamča BA	6	1		9	2	9	7				27	27
37.	Macko Vladimír	4.	GĽŠ ZV	9	7			9	9	9				27	27
37.	Santrová Michaela	2.	GMH Trstená	5	1			9	6	9	3			27	27
37.	Šimsa Štěpán	4.	Litoměřice ČR	9	10			9	9	9				27	27
42.	Dráček František	2.	GŠkol PB	5	1		9	2	7	0	8			26	26
42.	Ďuratná Petra	2.	ŠPMNDG BA	4	0	5	0		9	9	3			26	26
42.	Kňaze Adam	2.	GJCh BR	5	1		6	2	9	7	2	2		26	26
42.	Magurová Lucia	4.	GPoš KE	7	1		9		8	9				26	26
46.	Magyarová Zuzana	3.	GBST LC	7	2		6		8	9	2			25	25
46.	Mores Martin	3.	GVar ZA	6	1		9	2	9	5				25	25
46.	Nepšinská Silvia	2.	GJCh BR	5	1		4	2	8	9	2			25	25
46.	Tomašec Samuel	3.	GVar ZA	6	1		9		7	9				25	25
46.	Trembecký Richard	4.	GAlej KE	6	2			9	9	7				25	25
51.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2	0	4	9		4	7				24	24
51.	Santer Martin	4.	GMH Trstená	7	0	5			9	9		1		24	24
53.	Jurina Šimon	3.	Gamča BA	7	3			4	9	9				22	22
54.	Benešová Katarína	4.	ŠPMNDG BA	9	3			9	9		3			21	21
54.	Daniel Mark	3.	GPár NR	7	2		4		9	8				21	21
54.	Hlaváčik Matúš	4.	GAlej KE	9	4			9	8	4				21	21
54.	Hronkovičová Nina	2.	GKom PE	3	0	9	9	2				1		21	21
54.	Mikulec Jaromír	2.	GsvJ NM	4	0	5	9			7				21	21
59.	Iždinská Dominika	3.	GJH BA	5	0				9	8	2			19	19
59.	Kobák Michal	3.	Gamča BA	5	2		6	2	9		2			19	19
59.	Matejovičová Tatiana	3.	GJH BA	7	4			2	8	7	2			19	19
62.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3	0						9	9		18	18
62.	Bačinská Irena	3.	ŠPMNDG BA	5	2		9		9					18	18
62.	Králik Matej	2.	GJH BA	5	0	5	2			8		3		18	18
62.	Muravský Jakub	3.	Gamča BA	3	0	1		2	6	9	0			18	18
62.	Sučík Samuel	2.	GJH BA	5	3				9	9				18	18
67.	Bieliková Michaela	3.	GVM SE	5	0	2		1	8		2	3		16	16
68.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3	0	3			1	9		2		15	15
68.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3	0				8	7				15	15
70.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2	0	0	9		0	2	1	1		13	13
70.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	2	0	5				8				13	13
72.	Svitková Patricia	3.	GLN BA	5	0	2				8		1		11	11
73.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	4	0		9		0			1		10	10
74.	Gafurov Askar	4.	Gamča BA	7	3			9						9	9
74.	Lampášová Denisa	3.	GŠkol PB	4	1		6		3					9	9
74.	Leličová Lucia	2.	GPoš KE	2	0					9				9	9
74.	Šandalová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	5	0					9				9	9
78.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3	0	0					3	0		3	3
78.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	0	3				0		0		3	3
80.	Adamove Miroslav	1.	GBST LC	1	0							1		1	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Bodík Juro	1.	Gamča BA	2	9	9	6	4	7	9	9		40
2.	Petráš Peter Pavel Arthur	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	7	5	9	2		39
3.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2		9	5	9	4	9			36
4.	Halabrin Juraj	1.	GJH BA	2	6	9	1	9	5	9	2		34
5.	Choma Matej	1.	Gamča BA	2		9	8	4	2	9			32
6.	Oravkin Eduard	1.	1SG BA	2		9	4	9	9				31

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
7.	Gazdíková Ema Mária	1.	ŠPMNDG BA	1		9	9	7	5	0			30
8.	Murín Marek	1.	GJH BA	2		9	9		3	4	2		27
9.	Sučíková Katarína	1.	GJH BA	1	9	9		8					26
10.	Hollý Dominik	2.	ŠPMNDG BA	2		7	4		5	4	1		21
11.	Trenčanská Tereza	1.	Gamča BA	2			6	4		9			19
12.	Fabšíková Nina	1.	1SG BA	2		9		5	4				18
13.	Škrlec Adam	1.	GJH BA	1	3	9	1	0	2				15
14.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3					5	9			14
14.	Stowasserová Kristína	3.	1SG BA	3			6	5	1		2		14
14.	Suchý Daniel	2.	Gamča BA	2			4		1	9			14
14.	Tóthová Andrea	1.	ŠPMNDG BA	1			5		9				14
18.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	3							9		9
19.	Pilňan Branislav	2.	GJH BA	3					8				8
20.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3					3				3
20.	Muravský Jakub	3.	Gamča BA	3					1		2		3

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Tódová Lucia	1.	GPár NR	2		9	6		5	9	2		31
2.	Hronkovičová Nina	2.	GKom PE	3			1	8	9	9	2		29
3.	Konček Marián	2.	G1.máj MA	3			5		9	9	1		24
4.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3					5	9	9		23
5.	Krajmerová Barbora	1.	G Šurany	1	3	5	3	4	2				17
6.	Kašša Ladislav	1.	G Šamorín	2		7	2		5				14
7.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2					0	9			9

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Sládeček Michal	1.	GVar ZA	1	9	9	9		5	9			41
2.	Kulla Filip	1.	BiG Sučany	2		9	7	9	5	9			39
3.	Súkeník Peter	1.	GVar ZA	1	9	9	7		5	5			35
4.	Tesař Emanuel	1.	GBST LC	2		9	6		6	3			24
5.	Včelková Veronika	2.	GPOH DK	2		9	5	4	0				18
6.	Chabanová Barbora	1.	GJGT BB	1		9	1		5	1			16
7.	Kudelčíková Martina	1.	GVO ZA	2		7	2		3				12
8.	Sanigová Lucia	2.	GVar ZA	2			4		5				9
9.	Pecko Marcel	1.	GBST LC	2		7	0		1				8
10.	Adamove Miroslav	1.	GBST LC	1		6	1						7
11.	Bátrna Jozef	2.	G Bytca	2			0		1	0			1
12.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3									0
12.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3					0				0
12.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Semanišinová Žaneta	1.	GAlej KE	2		9	9	9	5	9			41
2.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	2		9	8	9	8	6	2		40
2.	Mišlanová Kristína	1.	GAlej KE	2		9	7	9	6	9			40
2.	Molčan Samuel	1.	GJAR PO	1	6	9	9	7		9			40
5.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	2		9	4	9		9	4		35
6.	Onduš Daniel	1.	GAlej KE	1	6	7	8		2	9			32
7.	Lenárt Patrik	1.	GPM KE	2		8	6			9			23

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
8.	Kurimský Ján	1.	GsvMo	2		9							9
9.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3					3				3
10.	Leličová Lucia	2.	GPoš KE	2									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Žídek Matěj	1.	Frýdlant ČR	2		9	7	9	5	9	1		39
2.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	2		9			5				14