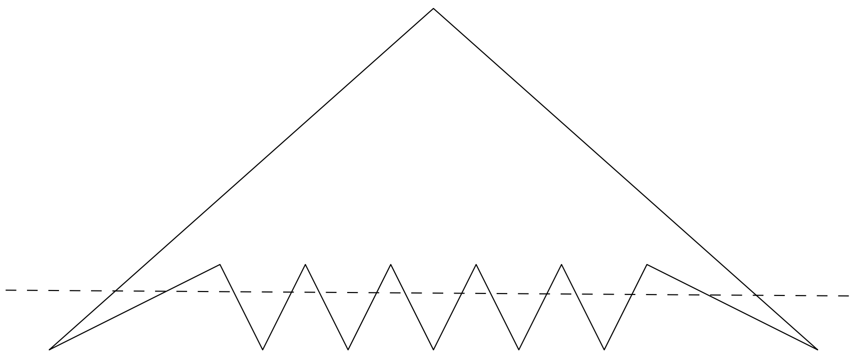
<u>Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2012/2013</u>

<u>Úloha č. 1:</u> *Marek nakreslil n-uholník, ktorý sa dá jednou priamkou rozdeliť na osem menších útvarov. Aké najmenšie mohlo byť n? Nezabudnite zdôvodniť, že pre menšie n sa to nedá rozdeliť.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Betka)
Predstavme si tortu v tvare nášho n-uholníka, ktorú režeme nožom po priamke. Nôž začína niekde ďaleko mimo torty a postupuje po priamke. Raz za čas nôž narazí na okraj torty a buď do nej vojde, alebo z nej vylezie (prípadne sa ešte môže pohybovať po okraji). Raz za čas sa dokoca stane, že rezaním vznikne nový kúsok torty. To sa stane vždy, keď nôž z torty vylezie. Ak chceme tortu rozdeliť na osem kúskov, tak sa to musí stať sedemkrát. To však znamená, že do nej aj sedemkrát musel vojsť. Vchádzanie a vyliezanie sa deje pri pretínaní nožovej priamky s nerovnobežnou stranou tortového n-uholníka. So žiadnou nerovnobežnou stranou sa nemôže preťať dvakrát, a teda n-uholník musí mať aspoň 14 strán (7-krát vojde a 7-krát vylezie).
Zistili sme, že pre $n < 14$ to nepôjde. Ak sa nám podarí nájsť 14-uholník, pre ktorý to ide, tak máme hotovo. Vďaka predošlej úvahe vieme, že hľadáme 14-uholník, ktorému nejaká priamka pretína všetky strany a po chvíľke skúšania dospejeme k útvaru ako na obrázku. (Čiarkovaná priamka je tá deliaca.)



<u>Úloha č. 2:</u> *Trojuholník ABC má strany s dĺžkami a, b, c. Označme polovicu obvodu tohto trojuholníka ako s. Dokážte nerovnosť*

$$2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq a.$$

<u>Riešenie:</u> (opravovala Baša)
Keďže sa vo výraze vyskytuje odmocnina, treba sa najskôr zamyslieť nad tým, či vôbec má dokazovaná nerovnosť zmysel. Pod odmocninou je súčin dvoch zátvoriek. Pozrime sa na to, či môžu byť záporné. V každej odčítavame dĺžku jednej strany trojuholníka od polovice obvodu. Vieme, že platí trojuholníková nerovnosť $a + c > b$. Pripočítaním b a vydelením dvomi dostaneme $s > b$, čo hovorí o kladnosti prvej zátvorky nerovnosti. Analogicky pre druhú zátvorku. Takže to zmysel má.
Máme dokázať nerovnosť

$$2\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq a,$$

kde $s = (a + b + c)/2$. Dosadíme s a upravíme na spoločného menovateľa:

$$2\sqrt{\frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} \leq a.$$

Vykrátime dvojky a máme nerovnosť

$$\sqrt{(a-b+c) \cdot (a+b-c)} \leq a.$$

Umocníme ju a v prvej zátvorke vyjmeme (-1) z výrazu $(-b+c)$. Umocniť ju môžeme, lebo aj pravá aj ľavá strana je kladná.

$$(a-(b-c))\cdot(a+(b-c))\le a^2$$

Ľavú stranu nerovnosti vieme upraviť na

$$a^2-(b-c)^2\le a^2.$$

Odčítame a^2, prenásobíme (-1) a vznikne

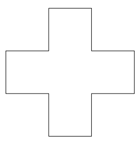
$$(b-c)^2\ge 0.$$

Druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je vždy nezáporná, teda táto nerovnosť určite platí. Všetky úpravy, ktoré sme spravili boli ekvivalentné, takže ich vieme spraviť aj spätne a z pravdivej nerovnosti dospieť k tej dokazovanej (tak ako sme to spravili pri dokazovaní $s>b$). Takže sa nám podarilo dokázať našu nerovnosť. Ak by sa však niektorá z úprav nedala spraviť aj opačným smerom, tak by sme v podstate nič nedokázali.

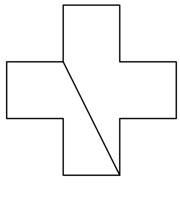
Úloha č. 3: *Body P a Q ležia na najdlhšej strane AB trojuholníka ABC tak, že $|AQ|=|AC|$ a $|BP|=|BC|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC.*

Riešenie: (opravovala Kaťa a JeFo)
Trojuholníky AQC a PBC sú rovnoramenné so základňami CQ a CP. To znamená, že os uhla CAQ, ťažnica z vrchola A a výška na základňu CQ v trojuholníku AQC ležia na tej istej priamke, označme ju p. Takisto os uhla CBP, výška na stranu CP a ťažnica z vrchola B v trojuholníku PBC ležia na tej istej priamke, označme ju q. Uvedomme si, že priamky p a q sú tiež osi úsečiek CQ a CP.
Stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom osí vnútorných uhlov v trojuholníku ABC. Body P a Q ležia na úsečke AB, takže os uhla CAB je zhodná s osou uhla CAQ a os uhla CBA je zhodná s osou uhla CBP. Takže stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečník priamok p a q.
Stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ je priesečník osí strán trojuholníka CPQ, dve z týchto osí sú práve priamky p a q. Tretiu os hľadať nemusíme, lebo všetky tri osi sa pretínajú v jednom bode.
Zistili sme, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a takisto aj stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ sú priesečníkmi priamok p a q. Keďže dve rôznobežné priamky sa pretínajú práve v jednom bode, stredy daných kružníc musia byť totožné.

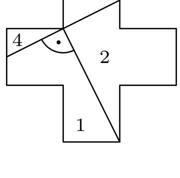
Úloha č. 4: *Betka napiekla koláč v tvare rovnostranného kríža (ako na obrázku). Andrej jej povedal, že ho dokáže rozrezať dvomi rovnými rezmi a rozrezané kúsky presunúť tak, že koláč dostane tvar štvorca. Betka nevie ako to spraviť. Poraďte jej.*



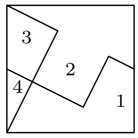
Riešenie: (opravoval Berenito a Sopo)
V prvom rade si treba uvedomiť, aký obsah má tento koláč. Povedzme, že každá rovná čiara na obrázku má dĺžku a. Koláč sa skladá z 5 častí s obsahom a^2, a teda obsah koláča je $5a^2$. To znamená, že keď koláč poskladáme do štvorca, tak aj jeho obsah bude $5a^2$ a jeho strana tým pádom $\sqrt{5}a$. Uvedomme si, že $\sqrt{5}a$ je prepona v pravouhlom trojuholníku s odvesnami a a $2a$ (viď Pytagorova veta). Zhodou okolností presne takúto dĺžku má aj nasledovný rez. Prípadne hocijaký symetrický k tomuto.



Našli sme stranu štvorca, teda druhý rez musí ísť kolmo na prvý rez (inak by to nebol štvorec) a zároveň musí prechádzať koncovým bodom pôvodného (pretože strana štvorca musí byť $\sqrt{5}a$).

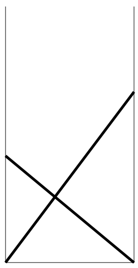


A teraz odrezané kúsky preusporiadame do tvaru štvorca nasledovne.

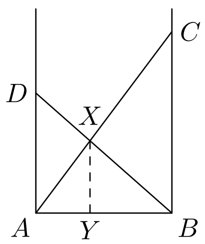


O tom, že dané kúsky do seba naozaj takto pekne zapadnú, sa vieme ľahko presvedčiť, napríklad cez podobnosť trojuholníkov. Vieme vypočítať všetky potrebné dĺžky a uhly.

Úloha č. 5: *Do „dvojrozmernej studne“ s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba* 3 *metre sme hodili dve rovné palice dĺžok* 4 *a* 5 *metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice „pretínajú“?*



Riešenie: (opravoval Peťo)
Označme si bod, v ktorom sa stretáva dno studne s jej ľavou resp. pravou stenou ako A resp. B. Miesto, v ktorom sa dotýka dlhšia resp. kratšia palica steny studne označme C resp. D. Ďalej označme X priesečník palíc a pätu kolmice na dno studne prechádzajúcu bodom X označme Y.



Použitím Pytagorovej vety vieme vypočítať dĺžky BC a AD:

$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$
$$|AD| = \sqrt{|BD|^2 - |AB|^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

Vidíme, že trojuholníky ABC a AYX majú rovnaké uhly, teda sú podobné a platí

$$\frac{|AY|}{|AB|} = \frac{|XY|}{|BC|},$$
$$|XY| = \frac{|AY| \cdot |BC|}{|AB|}. \tag{1}$$

Rovnako aj trojuholníky ABD a YBX sú podobné a platí

$$\frac{|BY|}{|AB|} = \frac{|XY|}{|BD|},$$
$$|XY| = \frac{|BY| \cdot |AD|}{|AB|}. \tag{2}$$

Porovnaním pravých strán (1) a (2) dostaneme

$$\frac{|BC| \cdot |AY|}{|AB|} = \frac{|AD| \cdot |BY|}{|AB|}.$$

Využitím rovnosti $|BY| = |AB| - |AY|$ získame vzťah pre $|AY|$, ktorý keď dosadíme do (1), budeme vedieť v akej výške (dĺžka úsečky XY) sa palice pretínajú:

$$|XY| = \frac{\frac{|AB| \cdot |AD|}{|BC| + |AD|} \cdot |BC|}{|AB|} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|BC| + |AD|} = \frac{4 \cdot \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}.$$

Palice sa teda pretínajú vo výške $\dfrac{4\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$ (čo je približne 1,59) metrov nad dnom studne.

Úloha č. 6: *Je možné niekoľkými priamkami rozdeliť konvexný sedemnásťuholník na štrnásť trojuholníkov?*

Riešenie: (opravoval Matúš)

Súčet vnútorných uhlov 17-uholníka je 2700°. (Dá sa na to prísť napríklad tak, že si ho rozdelíme na 15 trojuholníkov, ktorých vrcholy sú len vo vrcholoch 17-uholníka a spočítame súčet uhlov v týchto trojuholníkoch.) Ak by sme chceli tento 17-uholník rozdeliť na 14 trojuholníkov, každý jeho vnútorný uhol by bol vnútorným uhlom niektorého z trojuholníkov, prípadne by bol rozdelený medzi viacero trojuholníkov. Preto by súčet vnútorných uhlov týchto 14 trojuholníkov musel byť aspoň 2700°. To však nemôže byť, lebo 14 trojuholníkov má súčet vnútorných uhlov presne $14 \cdot 180° = 2520°$, čo je menej ako potrebujeme.

Iné riešenie:

Pomocou matematickej indukcie dokážeme všeobecnejšie tvrdenie: Žiadny konvexný mnohouhlolník s aspoň n vrcholmi ($n \geq 3$) nevieme priamkami rozdeliť na menej ako $n-2$ trojuholníkov.

1° Pre $n = 3$ tvrdenie platí triviálne.

2° Nech $n > 3$ a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky menšie n. Ak by sme chceli nejako deliť náš mnohouholník, ktorý má aspoň n vrcholov, tak nejakú priamku musíme použiť. Tá ho rozdelí na 2 časti: k-uholník a l-uholník, kde $k + l \geq n + 2$ a $k, l \geq 3$ (rozmyslite si prečo). Teraz budeme chcieť použiť indukčný predpoklad, najprv však treba rozobrať špeciálne prípady.

- V prípade, že je $k \geq n$, je určite $k \geq n-1$ a podľa indukčného predpokladu sa k-uholník nedá rozdeliť na menej ako $n-3$ trojuholníkov. Vieme aj, že l-uholník sa nedá rozdeliť na menej ako jeden, takže náš mnohouholnik sa nedá rozdeliť na menej ako $n-3+1 = n-2$ trojuholníkov. Obdobne by sme postupovali aj v prípade, že $l \geq n$.
- Už zostáva len prípad, že $k, l < n$. Na oba útvary použijeme indučný predpoklad a dozvieme sa, že ich nevieme rozdeliť na menej ako $k-2$ a $l-2$ trojuholníkov. Takže náš mnohouholník nevieme rozdeliť na menej ako $k-2+l-2 = k+l-4 \geq n-2$ trojuholníkov.

Zadané tvrdenie je potom len špeciálnym prípadom pre $n = 17$.

Komentár: Veľa riešiteľom sa podarilo prísť na aspoň jedno z týchto riešení. Nebolo veľmi úspešné hľadať nejaký efektívny spôsob ako to spraviť na čo najmenej trojuholníkov, lebo je veľmi ťažké ukázať, že práve ten nejaký spôsob musí byť najlepší. A práve tam stroskotalo veľa riešení.

Úloha č. 7: *Máme daný trojuholník ABC. Body M a N ležia postupne na osiach uhlov pri vrcholoch C a B, pričom platí $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BNC| = 90°$. Dokážte, že priamka MN pretína strany AB a AC v bodoch dotyku vpísanej kružnice trojuhoníka ABC.*

Riešenie: (opravoval Mišo)

Najprv si dooznačme veci, ktoré v zadaní neboli. Uhly pri ABC si tradične označme ako α, β, γ a nech D a E sú body dotyku vpísanej kružnice so stranami AB a AC a bod I je jej stredom. Úlohu budeme dokazovať tak, že ukážeme, že body M, N ležia na priamke DE. Ak na nej ležia, body M, N, D, E ležia na jednej priamke, teda aj body D, E ležia na priamke MN. Úloha je navyše symetrická vzhľadom na M, N, takže nám to stačí ukázať pre jeden bod a pre druhý to vyplýva analogicky.

Poďme ukázať, že M leží na DE. Aby to nebolo také jednoduché, môže tu nastať viacero prípadov (ktoré väčšina riešiteľov „zabudla“ rozobrať). Bod M môže ležať vo vnútri trojuholníka ABC, na strane AB aj mimo neho.

- Ak M leží na AB, tak úsečka MI je kolmá na AB (I leží na BM). M je potom totožné s bodom D a tým pádom leží na DE.
- Nech teraz M leží mimo trojuhlníka ABC. Chceme ukázať, že $|\sphericalangle MDE| = 180°$. Štvoruholník $BIDM$ je tetivový, lebo $|\sphericalangle BMI| = |\sphericalangle BDI| = 90°$ sú dva zhodné obvodové uhly. MDI a MBI sú protiľahlé uhly, takže ich súčet je 180°. Ďalej $|\sphericalangle MBI|$ vieme vyjadriť ako $|\sphericalangle MBC| - |\sphericalangle IBC|$ a dopočítaním v trojuhoníku MBC dostaneme, že $|\sphericalangle MBC| = 90° - |\sphericalangle BCM|$. Keď to všetko dáme dokopy:

  $$|\sphericalangle MDI| = 180° - |\sphericalangle MBI| = 180° - (|\sphericalangle MBC| - |\sphericalangle IBC|) = 180° - (90° - |\sphericalangle BCM| - |\sphericalangle IBC|) = 90° + \gamma/2 + \beta/2.$$

  Do uhla MDE nám ešte chýba dopočítať uhol IDE. Ten je pri základni rovnoramenného trojuholníka IDE (ID a IE sú polomery vpísanej kružnice) a preto $|\sphericalangle IDE| = 90° - |\sphericalangle EID|/2$. Uhol EID zase vieme spočítať zo štvoruholníka $ADIE$ a dostaneme, že $|\sphericalangle IDE| = \alpha/2$. Keďže $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ich polovice budú dokopy 90°. Už máme teda všetko, aby sme dopočítali $|\sphericalangle MDE|$:

  $$|\sphericalangle MDE| = |\sphericalangle MDI| + |\sphericalangle IDE| = 90° + \gamma/2 + \beta/2 + \alpha/2 = 180°.$$

  Bod M leží na DE.

- Keď M leží vnútri trojuholníka ABC, situácia je veľmi podobná. Dôkaz je rovnaký ako v predošlom prípade, len s tým rozdielom, že bod M leží medzi bodmi D, E, takže uhol MDE bude nulový, a vo štvoruholníku $BIMD$ sú body D a B vedľa seba a nie oproti, takže $|\sphericalangle MDI| = |\sphericalangle MBI|$. Preto

$$|\sphericalangle MDI| = |\sphericalangle MBI| = |\sphericalangle MBC| - |\sphericalangle IBC| = 90^\circ - |\sphericalangle MCB| - |\sphericalangle IBC| = 90^\circ - \beta/2 - \gamma/2.$$

Keďže bod M leží medzi bodmi D, E, už neplatí, že $|\sphericalangle MDE| = |\sphericalangle MDI| + |\sphericalangle IDE|$, ale platí niečo podobné: $|\sphericalangle MDE| = |\sphericalangle MDI| - |\sphericalangle IDE|$. Dostávame, že

$$|\sphericalangle MDE| = |\sphericalangle MDI| - |\sphericalangle IDE| = 90^\circ - \beta/2 - \gamma/2 - \alpha/2 = 0^\circ.$$

Aj v tomto prípade M leží na priamke DE.

Týmto je dôkaz hotový.

Úloha č. 8: *Bod O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Kružnica k opísaná trojuholníku BCO pretína priamky AB, AC postupne v bodoch D, E (rôznych od B, C). Úsečka OG je priemerom kružnice k. Dokážte, že $ADGE$ je rovnobežník.*

Riešenie: (opravovala Lindtka)
Narysujme si na začiatok všetko, čo je potrebné. Označme si $|\sphericalangle BAC| = \alpha$. Z pravidla o obvodovom a stredovom uhle vieme, že $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$. Úsečka OG spája stredy oboch kružníc a je kolmá na úsečku BC, ktorá je tetivou oboch kružníc. Preto $|\sphericalangle BOG| = |\sphericalangle GOC| = \alpha$ (trojuholník OC je rovnoramenný a preto mu úsečka SG rozdeľuje uhol $|\sphericalangle BOG|$ na polovicu).
Z pravidla o obvodových uhloch vieme, že $|\sphericalangle BOG| = |\sphericalangle BEG| = \alpha$ a tiež $|\sphericalangle GOC| = |\sphericalangle GDC| = \alpha$.
Štvoruholníky $BOCD$ a $BOCE$ sú tetivové pre kružnicu k, preto súčet protiľahlých uhlov je 180° (rozoberáme prípad že vrcholy D a E ležia na úsečkách trojuholníka ABC).

$$|\sphericalangle BOC| + |\sphericalangle BDC| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle BOC| = 180^\circ - 2\alpha$$

Rovnakým spôsobom vieme zistiť, že $|\sphericalangle BEC| = 180^\circ - 2\alpha$.
Ako vieme,

$$|\sphericalangle ADG| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CDG| = (180^\circ - 2\alpha) + \alpha = 180^\circ - \alpha$$

a takisto

$$|\sphericalangle AEG| = |\sphericalangle AEB| + |\sphericalangle BEG| = (180^\circ - 2\alpha) + \alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Máme štvoruholník $ADGE$ a vieme že $|\sphericalangle AEG| = |\sphericalangle ADG| = 180^\circ - \alpha$ a $|\sphericalangle DGE| = |\sphericalangle DAE| = \alpha$, čo už je dostatok informácií na to, aby sme mohli konečne prehlásiť, že štvoruholník $ADGE$ je rovnobežník.
Treba si však uvedomiť, že vrcholy D a E môžu ležať na úsečkách trojuholníka ABC. Postup dôkazu je rovnaký, ale nesmieme zabúdať aj na takéto prípady (dôkaz prenechávame čitateľovi).

Úloha č. 9: *Kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch X, Y. Kružnica k sa zvnútra dotýka kružníc k_1, k_2 postupne v bodoch P, Q. Úsečka XY pretína k v bodoch M, N. Polpriamky PM a PN pretínajú k_1 postupne v bodoch A a D, polpriamky QM a QN pretínajú k_2 postupne v bodoch B a C. Dokážte, že $|AB| = |CD|$.*

Riešenie: (opravoval CD)
Chceme dokázať, že $|AB| = |CD|$. Väčšina z vás ukázala čosi viac, že $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník. Spôsobov dôkazu bolo veľa, uvedieme najsympatickejší z nich.
Rovnoľahlosť zobrazujúca kružnicu k na k_1 má stred v P. Zobrazuje teda úsečku MN na AD, z čoho vyplýva, že $AD \parallel MN \parallel XY$. Analogicky použijeme rovnoľahlosť zobrazujúcu kružnicu k na k_2 a dostaneme $BC \parallel MN \parallel XY$. Dokopy dostávame $AD \parallel BC$ a teda $ABCD$ je lichobežník. Chýba nám ešte rovnoramennosť.
Označme si S_1 stred kružnice k_1 a S_2 stred kružnice k_2. Priamka, ktorá ide cez body S_1, S_2, je osou úsečiek AD, XY a BC (ak vám tento krok nie je jasný, poriadne si ho premyslite). Lichobežník $ABCD$ je symetrický cez túto os, teda $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 10: *Máme dané štyri body A, B, C, D. Ľubovoľné dve kružnice také, že jedna prechádza bodmi A, B a druhá prechádza bodmi C, D, sa pretínajú. Ak sa tieto kružnice pretínajú práve v dvoch bodoch, označíme tieto body E a F. Dokážte, že existuje bod G taký, aby pre všetky možné dvojice bodov E a F ležia body E, F, G na priamke.*

Riešenie: (opravoval Viktor a Murko)
(Podľa *Štěpána Šimsu.*)
Najprv si povieme niečo o *mocnosti* bodu ku kružnici. Ak máme danú kružnicu k a bod X, tak hodnota $|XO|^2 - r^2$ (kde O je stred kružnice k a r jej polomer) sa nazýva mocnosť bodu X ku kružnici k. Využitie spočíva v tom,

že keď vedieme ľubovoľnú priamku cez bod X, ktorá má neprázdny prienik s kružnicou, tak platí, že mocnosť je rovná $|XA| \cdot |XB|$, kde A a B sú priesečníky priamky s touto kružnicou (v prípade, že je to dotyčnica, $A = B$ je dotykový bod). Tieto veľkosti úsečiek berieme ako orientované, t. j. pre vnútorný bod je táto hodnota záporná. *Chordála* dvoch kružníc je množina bodov, pre ktoré platí, že majú rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Vieme o nej, že je to priamka kolmá na spojnicu stredov týchto dvoch kružníc a v prípade, že sa tieto kružnice pretínajú v dvoch bodoch, chordála týmito bodmi prechádza.
A teraz späť k riešeniu: Najprv uvažujme, že priamky AB a CD sú rôznobežné. Označme ich prienik G.
Ak neplatí $|GA| \cdot |GB| = |GC| \cdot |GD|$, pričom úsečky berieme ako orientované, tak dokážeme, že body A, B, C, D nevyhovujú zadaniu. Označme O priesečník osí strán AB a CD (ten existuje). Zostrojme kružnice $k_1(O, |OA|)$ a $k_2(O, |OC|)$. Zjavne k_1 prechádza bodmi A, B a k_2 bodmi C, D. Označme m_1 resp. m_2 mocnosť bodu G ku kružnici k_1 resp. k_2. Keďže $|GA| \cdot |GB| \neq |GC| \cdot |GD|$ (body A, B, G resp. C, D, G ležia na jednej primake), z mocnosti máme $m_1 \neq m_2$, čiže $|GO|^2 - |OA|^2 \neq |GO|^2 - |OC|^2$. To znamená, že tieto dve kružnice majú rozdielny polomer, pričom majú rovnaký stred, čiže sa nepretínajú. To znamená, že tieto štyri body nevyhovujú zadaniu.
Ak platí $|GA| \cdot |GB| = |GC| \cdot |GD|$, tak si stačí uvedomiť vlastnosti chordály. Ak máme ľubovoľné kružnice prechádajúce bodmi A, B resp. C, D, ktoré sa pretínajú v dvoch bodoch E, F, tak chordála týchto kružníc je priamka EF. A keďže $|GA| \cdot |GB| = |GC| \cdot |GD|$, tak bod G má rovnakú mocnosť k obom kružniciam, čiže leží na chordále, čiže na priamke EF.
Ak priamky AB a CD sú rovnobežné a netotožné, ľahko možno nahliadnuť, že existujú také dve kružnice, ktoré sa nepretínajú, čiže nevyhovujú zadaniu (rozmyslite si). Ak sú totožné, tak tú priamku označme p. Zostrojme dve ľubovoľné kružnice k_1 a k_2 prechádzajúce cez body A, B resp. C, D. Zo zadania majú prienik, body E a F. Označme G prienik priamok EF a p. Keďže G leží na chordále kružníc k_1 a k_2, priamke EF, bod G má rovnakú mocnosť k obom kružniciam, čiže $|GA| \cdot |GB| = |GC| \cdot |GD|$ (body A, B, C, D, G ležia na p). Záver je analogický ako v prípade keď boli rôznobežné.

Úloha č. 11: *Máme danú priamku p a na nej tri body T, U, V. Nájdite množinu všetkých možných stredov vpísanej kružnice trojuholníka ABC takého, že body A, B ležia na priamke p a body T, U, V sú postupne priesečníky priamky p s ťažnicou, výškou a osou uhla trojuholníka ABC.*

Riešenie: (opravoval Miki)
Po chvíľke kreslenia si uvedomíme, že množina stredov vpísaných kružníc trojuholníka ABC musí byť kolmica na priamku p. Triviálne vieme, že bod V musí ležať na úsečke TU (inak trojuholník ABC neexistuje). Ďalším známym faktom je, že os uhla, os protiľahlej strany a kružnica opísaná sa pretínajú v jednom bode (Švrčkov bod), označme ho S. Navyše body A a stred kružnice vpísanej ABC (ďalej už len I) ležia na kružnici so stredom S.
Ďalej nech BUNV $BC \leq AC$.
Všimnime si podobné trojuholníky:

1. $\triangle_{SBC} \approx \triangle_{SVB}$, pretože $|\sphericalangle SBV| = |\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SCB|$ a uhol pri vrchole S je spoločný.
2. $\triangle_{STV} \approx \triangle_{CUV}$, pretože $|\sphericalangle CVU| = |\sphericalangle SVT|$ a $|\sphericalangle VUC| = |\sphericalangle VTS| = 90°$.

Z 1. vieme, že
$$\frac{|SB|}{|SV|} = \frac{|SC|}{|SB|}.$$
Z 2. vieme, že
$$\frac{|SV|}{|SC|} = \frac{|TV|}{|TU|}.$$
Keď to spolu vynásobíme, dostaneme
$$\frac{|SB|}{|SC|} = \frac{|SC|}{|SB|} \cdot \frac{|TV|}{|TU|},$$
odkiaľ po úprave
$$\frac{|SB|}{|SC|} = \sqrt{\frac{|TV|}{|TU|}}.$$
Odtiaľ vidno, že $|SB|/|SC|$ je pevné, pretože bodmi T, U a V nehýbeme (máme ich pevne dané). Keďže $|SB| = |SI|$ (kvôli tvrdeniu nazačiatku), je aj $|SI|/|SC|$ pevné.
Označme X kolmý priemet bodu I na priamku p. Potom vieme, že
$$\frac{|SI|}{|SC|} = \frac{|TX|}{|TU|}.$$
Preto je aj $|TX|/|TU|$ pevné, čiže existuje iba jeden taký bod X. Takže množina všetkých bodov I leží na kolmici k p v bode X. Bod X nepatrí do tejto množiny, lebo potom ABC nie je trojuholník.

Ešte sa musíme presvedčiť, že vieme pre každý bod I zostrojiť vyhovujúci trojuholník ABC. Pre ľubovoľný bod I vieme nájsť bod C ako priesečník kolmice k p v bode U a priamky VI. Bod S zostrojíme ako priesečník CV a kolmice k priamke p v bode T. Teraz vieme nájsť stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC ako priesečník osi úsečky CS a kolmice k p v bode T. Napokon zostrojíme kružnicu k so stredom v O prechádzajúcu cez bod C a jej priesečníky s p budú body A a B.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	4.	GAlej KE	11	13			9	9	9	9	9		45	90
2.	Kossaczká Marta	4.	Gamča BA	11	9			9	9	9	8	9		44	89
3.	Krajčiová Katarína	2.	GAlej KE	5	2		9	8	9	9		9		44	85
3.	Šafin Jakub	4.	GPH MI	9	7			9	6	9	9	8		41	85
5.	Psota Miroslav	3.	GHlin ZA	8	3			9	7	9	6	9		40	84
6.	Puza Marko	3.	GPoš KE	6	2		9	6	6	9	8	8		40	82
7.	Stankovič Miroslav	3.	GPoš KE	8	8			6	9	9	9	8		41	77
8.	Hanzely Filip	4.	GAP SB	11	8			6	6	9	7	9		37	75
9.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	Gamča BA	6	4			7	9	9	7			32	72
10.	Pokrývka Filip	3.	G Bánovce	8	3			9	9	9	8			35	71
11.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3	0	9	9	5	7	8				38	70
12.	Bui Truc Lam Michal	2.	Gamča BA	5	4			6	1	9		9		25	68
12.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	2	0	9	8	6	6		9			38	68
14.	Horváth Samuel	3.	GPár NR	7	2		9	6	6					21	66
15.	Dargaj Jakub	3.	GPoš KE	4	0	8	9	6	6					29	65
16.	Buráň Michal	4.	G JAK CR	5	3			6	6	9	6			27	64
17.	Magyarová Zuzana	3.	GBST LC	7	2		9	9	9	9				36	61
17.	Szalay Erik	3.	ŠPMNDG BA	4	0	8	3			9				20	61
17.	Šimsa Štěpán	4.	Litoměřice ČR	9	10			9	9	9	7			34	61
20.	Ječmenová Andrea	3.	GVO ZA	7	2		2	6	7	9				24	60
21.	Šimková Ľudmila	3.	GPár NR	8	3			5	6	9	8	2		30	58
22.	Jurina Šimon	3.	Gamča BA	7	3			4	6	9	7	9		35	57
23.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	4	1		8	6	6					20	56
24.	Ďuratná Petra	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9		9					27	53
25.	Hrivová Ivona	3.	GVO ZA	8	3				9	9	4			22	52
25.	Pieš Adrián	3.	ŠPMNDG BA	4	0	9	9							18	52
27.	Hlaváčik Matúš	4.	GAlej KE	9	4			6	6	9	9			30	51
27.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	4	0	9	2		4	1				16	51
29.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	3	0	9	9							18	50
30.	Daniel Mark	3.	GPár NR	7	2			6	9	9	4			28	49
30.	Murin Martin	2.	GJH BA	5	0	9	9			1		2		21	49
32.	Magurová Lucia	4.	GPoš KE	7	1		9	6	6					21	47
32.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	4	0	9	2		6					17	47
32.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	2	0	9	7		3					19	47
32.	Sučík Samuel	2.	GJH BA	5	3			6	6	9	8			29	47
36.	Dráček František	2.	GŠkol PB	5	1		3	4	6	7	0			20	46
36.	Kobák Michal	3.	Gamča BA	5	2		9		9	9				27	46
36.	Trembecký Richard	4.	GAlej KE	6	2		9	6	6					21	46
39.	Batmendijn Eduard	2.	CGsvM SL	6	4					9	9			18	45
40.	Bohdal Ondrej	2.	GJH BA	5	1		9		6					15	44
40.	Macko Vladimír	4.	GĽŠ ZV	9	7			6	9			2		17	44
40.	Nepšinská Silvia	2.	GJCh BR	5	1		9	4	6					19	44
40.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2	1		9	5	8	9	9	9		44	44
44.	Králik Matej	2.	GJH BA	5	0	9	9		6					24	42
45.	Lâm Tuân Dûng	2.	GJH BA	5	1			6	6					12	41

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
46.	Krakovská Hana	3.	Gamča BA	6	1		9	4	0					13	40
47.	Hronkovičová Nina	2.	GKom PE	3	0	9	9							18	39
48.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2	0	9	3	0	2					14	38
48.	Lipovský Mário	3.	GJH BA	6	2				6		1			7	38
48.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3	0									0	38
51.	Kňaze Adam	2.	GJCh BR	5	1		3		6	2				11	37
51.	Prešinská Kristína	2.	GPár NR	5	1		3	0	5					8	37
53.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3	0						9	9		18	36
53.	Korbela Michal	3.	G Bánovce	8	3									0	36
53.	Muravský Jakub	3.	Gamča BA	3	0	9	9							18	36
53.	Prívozník Matej	3.	GJH BA	8	3						7			7	36
53.	Santrová Michaela	2.	GMH Trstená	5	1		3		6					9	36
53.	Svoboda Jakub	3.	G Hav CR	3	0		9	8	9	9	1			36	36
59.	Kováčová Barbora	3.	ŠPMNDG BA	6	1									0	35
59.	Tomašec Samuel	3.	GVar ZA	6	1		3		2	5				10	35
61.	Benešová Katarína	4.	ŠPMNDG BA	9	3			6	6		1			13	34
61.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3	0	9	3	4	3					19	34
63.	Mikulec Jaromír	2.	GsvJ NM	4	0	9	3							12	33
63.	Smolík Milan	4.	GJH BA	7	1									0	33
65.	Svoboda Josef	4.	Frýdlant ČR	8	6			6	9	9	8			32	32
66.	Iždinská Dominika	3.	GJH BA	5	0	9	3							12	31
66.	Matejovičová Tatiana	3.	GJH BA	7	4			6	6					12	31
68.	Bačinská Irena	3.	ŠPMNDG BA	5	2			4	6					10	28
68.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	2	0		9	6						15	28
68.	Mores Martin	3.	GVar ZA	6	1		3							3	28
71.	Svitková Patricia	3.	GLN BA	5	0	9	7							16	27
72.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3	0		8	6	6	5				25	25
73.	Santer Martin	4.	GMH Trstená	7	0									0	24
73.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3	0	9								9	24
75.	Polovka Maroš	3.	GKuk PP	4	0	9	9							18	18
76.	Bieliková Michaela	3.	GVM SE	5	0									0	16
77.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2	0									0	13
78.	Lampášová Denisa	3.	GŠkol PB	4	1		2					0		2	11
79.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	4	0									0	10
80.	Gafurov Askar	4.	Gamča BA	7	3									0	9
80.	Leličová Lucia	2.	GPoš KE	2	0									0	9
80.	Šandalová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	5	0									0	9
83.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3	0									0	3
83.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	0									0	3
85.	Adamove Miroslav	1.	GBST LC	1	0									0	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bodík Juro	1.	Gamča BA	2		8	9	7	9	9			82
2.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9	3	0		75
3.	Choma Matej	1.	Gamča BA	2		8	9	7	9	9			74
3.	Petráš Peter Pavel Arthur	1.	ŠPMNDG BA	2		9	1	7	9	9			74
5.	Murín Marek	1.	GJH BA	2		8	9	9	9	9			71
6.	Halabrin Juraj	1.	GJH BA	2	9	8	9	7	9	2			69
6.	Oravkin Eduard	1.	1SG BA	2		8	9	3	9	9			69
8.	Sučíková Katarína	1.	GJH BA	1	9		9	7	9				60
9.	Hollý Dominik	2.	ŠPMNDG BA	2		8		4	9	9			51
9.	Škrlec Adam	1.	GJH BA	1	7	8	9	3		9			51
11.	Gazdíková Ema Mária	1.	ŠPMNDG BA	1		6	4	7		3			50
12.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3					9	9	5		37

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
13.	Fabšíková Nina	1.	1SG BA	2		7	9		2				36
14.	Pilňan Branislav	2.	GJH BA	3			9	2	9				28
15.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	3					9	9			27
16.	Muravský Jakub	3.	Gamča BA	3					9	9			21
17.	Trenčanská Tereza	1.	Gamča BA	2									19
18.	Stowasserová Kristína	3.	1SG BA	3									14
18.	Suchý Daniel	2.	Gamča BA	2									14
20.	Tóthová Andrea	1.	ŠPMNDG BA	1									10
21.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3									3
22.	Hučková Valentína	1.	ŠPMNDG BA	1									0

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Tódová Lucia	1.	GPár NR	2		8	8	7	9	2			65
2.	Hronkovičová Nina	2.	GKom PE	3			9	8	9	9			64
3.	Krajmerová Barbora	1.	G Šurany	1	9	8	9	3	9	9			61
4.	Konček Marián	2.	G1.máj MA	3			9	7	9	9			58
5.	Kašša Ladislav	1.	G Šamorín	2		8		6	8	2			38
6.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3									23
7.	Szabo Michal	1.	GAM TT	1	7	7	2	3	3	2			22
8.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2									9

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kulla Filip	1.	BiG Sučany	2		8	9	9	9	8			82
2.	Súkeník Peter	1.	GVar ZA	1	9	9		2	9	9			73
3.	Sládeček Michal	1.	GVar ZA	1	9	9		3	9				71
4.	Tesař Emanuel	1.	GBST LC	2		8	9	1	9	9			60
5.	Chabanová Barbora	1.	GJGT BB	1	9	8	9	5	9				56
6.	Pavlus Matúš	1.	GBST LC	1	9	2	9	5	9	9			41
7.	Pecko Marcel	1.	GBST LC	2		8		1	9	6			32
8.	Kudelčíková Martina	1.	GVO ZA	2		4			7				23
9.	Včelková Veronika	2.	GPOH DK	2									18
10.	Sanigová Lucia	2.	GVar ZA	2									9
10.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3					9				9
12.	Adamove Miroslav	1.	GBST LC	1									7
13.	Roch Oliver	2.	G Bytca	2		2	1	1					4
14.	Bátrna Jozef	2.	G Bytca	2			1	1					3
15.	Michálek Tomáš	2.	G Bytca	2				1		0			1
16.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3									0
16.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Semanišinová Žaneta	1.	GAlej KE	2		9	9	9	9	9			86
2.	Mišlanová Kristína	1.	GAlej KE	2		8	9	9	9	9			84
3.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	2		8	9	9	9	7			82
4.	Molčan Samuel	1.	GJAR PO	1	9	8	9	9		3			78
5.	Onduš Daniel	1.	GAlej KE	1		9	9	9	9	9			77
6.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	2		8	9	7	9	8	6		76
7.	Kurimský Ján	1.	GsvMo	2		9	9	7	9	9	1		52
8.	Jankovičová Natália	2.	GKon SP	2	6	8	9	2	8		0		27

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
9.	Lenárt Patrik	1.	GPM KE	2									23
10.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3					9	3	4		19
11.	Leličová Lucia	2.	GPoš KE	2									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Žídek Matěj	1.	Frýdlant ČR	2		9	9	9	9	9	9		84
2.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	2		8	9	3		9	6		49
3.	Krchňák Václav	1.	Brno ČR	1	8	8	9	9	9				43
4.	Steinhauser Václav	-1.	G Dacice	-1		8	9	1	1				19
5.	Svoboda Jakub	3.	G Hav CR	3						9	8		17
6.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3						8	6		14
6.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2						9	5		14