Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2012/2013

Úloha č. 1: *Hokejového turnaja sa zúčastnili štyri družstvá, pričom každé odohralo s každým práve jeden zápas. Počet gólov v každom zápase delí celkový počet gólov v turnaji. V žiadnych dvoch zápasoch nepadol rovnaký počet gólov. Nájdite najmenší možný počet gólov v turnaji.*

Riešenie: (opravoval Mišo)
Hrajú 4 družstvá, každé s každým. To je dokopy 6 zápasov.
Keďže nulou nedelíme, najmenší počet gólov za zápas je 1. Každý zápas sa strelilo iný počet gólov, preto najmenší možný celkový súčet gólov je $1+2+3+4+5+6=21$. Súčet má byť navyše deliteľný počtom gólov v jednotlivých zápasoch, čo je 6 rôznych čísel. Takže hľadáme najmenšie číslo väčšie ako alebo rovné 21, ktoré má aspoň 6 deliteľov. Čísla 21 a 22 majú len 4 delitele, 23 má len 2. Ďalšie v poradí je 24, ktoré ich má až 8. Ostáva ešte overiť, či sa dá zapísať ako súčet šiestich svojich deliteľov, čo sa dá: $1+2+3+4+6+8=24$. Najmenší možný počet gólov je 24.

Úloha č. 2: *Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých ciferný súčet je 7, sú deliteľné 7 a všetky cifry majú rôzne.*

Riešenie: (opravovala Betka)
Najprv si napíšeme koľkými spôsobmi vieme dostať sedmičku ako súčet rôznych cifier. Máme tieto možnosti: 7, $6+1$, $5+2$, $4+3$ a $4+2+1$. Teraz si postupne napíšeme všetky možné prirodzené čísla, ktoré vieme vytvoriť pomocou týchto cifier. Samozrejme, ešte vieme použiť aj cifru 0 s každým z týchto súčtov a dostaneme ďalšie možnosti. Vypíšeme si ich postupne podľa počtu cifier.

- Jednociferné: 7.
- Dvojciferné: 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70.
- Trojciferné: 106, 124, 142, 160, 205, 214, 241, 250, 304, 340, 403, 412, 421, 430, 502, 520, 601, 610.
- Štvorciferné: 1024, 1042, 1204, 1240, 1402, 1420, 2014, 2041, 2104, 2140, 2401, 2410, 4012, 4021, 4102, 4120, 4201, 4210.

Už len overíme, ktoré z týchto čísel sú deliteľné 7. Sú to čísla 7, 70, 1204, 2401, 4102.

Úloha č. 3: *Vytvorte tri trojciferné čísla, pričom použijete každú z cifier* 1 *až* 9 *práve raz, tak, aby ich pomer bol* $1:3:5$. *Nájdite všetky riešenia.*

Riešenie: (opravoval Lietadlo)
Označme si hľadané čísla x, y a z v poradí od najmenšieho po najväčšie. Jednotlivé cifry čísla x si označme x_1 (stovky), x_2 (desiatky) a x_3 (jedontky). Rovnako pre ostatné čísla.
Zo zadania vieme, že $3x=y$ a $5x=z$. Vidíme, že $x_1=1$, pretože ak by bolo $x_1>1$, tak číslo z by nebolo trojciferné. Ďalej si môžeme všimnúť, že $z_3=5$, pretože číslo z je deliteľné piatimi, keďže $5x=z$.
Keďže z_3 je nepárna cifra, tak aj x_3 musí byť nepárne a teda aj y_3 musí byť nepárne. Keby $x_3=7$, tak $y_3=1$ (pretože $3x=y$) a to sa stať nemôže, pretože cifru 1 sme už použili. Pre cifru x_3 ostávajú už len dve možnosti. Buď $x_3=3$ alebo $x_3=9$.
Takže nám ostáva vyskúšať len zopár možností. Číslo x musí byť jedno spomedzi: 123, 143, 163, 173, 183, 193, 129, 139, 149, 169, 179 a 189.
Spomedzi týchto čísel môžeme ešte nejaké jednoducho vylúčiť. Číslo 123 nevyhovuje, pretože potom $y_1=3$ a cifra 3 by teda bola použitá dvakrát. Podobne čísla 193 a 139 nevyhovujú pretože by y_3 robilo problémy (vyskúšajte si sami). Taktiež môžeme vylúčiť číslo 143, pretože potom by $y_1=4$ a cifra 4 by teda bola použitá dvakrát.
Ostávajú teda tieto možnosti pre číslo x: 163, 173, 183, 129, 149, 169, 179 a 189. Ponechávame už na čitateľa, aby tieto možnosti vyskúšal.
Jediným riešením je trojica čísel $(129, 387, 645)$.

<u>Úloha č. 4:</u> *Hago hrá nasledovnú verziu hry Kameň–papier–nožnice–jašterica–Spock:*

- *Kameň poráža nožnice a jaštericu.*
- *Papier poráža kameň a jaštericu.*
- *Nožnice porážajú papier a jaštericu.*
- *Jašterica poráža Spocka.*
- *Spock poráža kameň, papier a nožnice.*

proti náhodne hrajúcemu počítaču. Ak vyhrá, dostane lentilku a ak prehrá, musí lentilku vyhodiť von oknom. Ako sa mu oplatí hrať, ak chce získať čo najviac lentiliek? Mojo si všimol ako to Haga baví a tak sa rozhodol pridať. Teraz hrá Hago proti náhodne hrajúcemu počítaču a náhodne hrajúcemu Mojovi (Mojo totiž nevie ako hrať). Teraz dostane Hago lentilku keď vyhrá s počítačom a ďalšiu keď vyhrá s Mojom. V prípade remízy nedostane žiadnu a ak prehrá musí jednu vyhodiť von oknom. Ako sa mu oplatí hrať teraz? A ak si môže vybrať, či bude hrať sto hier len s počítačom alebo aj s Mojom, čo je výhodnejšie? Koľko lentiliek pri tom pravdepodobne vyhrá, ak bude hrať ideálne?

<u>Riešenie:</u> (opravovala Katka J.)
Aby sme vedeli povedať, ktorý ťah je najvýhodnejší, musíme sa pozrieť na jeho úspešnosť voči ostatným ťahom. Najprehľadnejšie to uvidíme v tabuľke, kde si napíšeme, proti koľkým iným ťahom konkrétny ťah vyhrá, s koľkými prehrá a s koľkými remízuje.

Ťah	Výhra	Prehra	Remíza
Kameň	2	2	1
Papier	2	2	1
Nožnice	2	2	1
Jašterica	1	3	1
Spock	3	1	1

Z tabuľky by sa dalo narýchlo povedať, že najvýhodnejším ťahom pre Haga je Spock. Treba si to ešte premyslieť — keby počítač hral stále jaštericu, Spock by nebol práve dobrý nápad. Ako však vieme zo zadania, počítač hrá náhodne, takže v dlhodobom horizonte zahrá všetky ťahy rovnaký počet krát. Vtedy je Spock naozaj najlepší možný Hagov ťah, pretože vyhráva v 3/5 prípadov a prehrá len v 1/5, spolu teda dostane $(2/5) \cdot$ *počet hier* lentiliek.
Potom, ako sa pridá Mojo, treba stratégiu znova premyslieť. Mojo sa v tejto hre správa presne tak isto, ako počítač — hrá úplne náhodne. Keby Hago hral samostatne proti počítaču a samostatne proti Mojovi, nič sa nemení, Spock je stále najvýhodnejší ťah, pretože stále Hago vyhrá $(2/5) \cdot$ *počet hier* lentiliek. Hago však hrá proti počítaču a Mojovi *naraz* — a na jeden jeho ťah odpovedá najprv počítač a potom Mojo. Ak by však teraz hral Hago stále Spocka, z hľadiska vyhodnotenia je to to isté, akoby hral Spocka samostatne, raz proti Mojovi a raz proti počítaču. (To isté platí pre každý iný možný Hagov ťah.) Keďže Spock je najvýhodnejším ťahom pri samostatných hrách s Mojom a s počítačom, je najvýhodnejší aj pri jednom Hagovom ťahu proti obom súperom naraz.
No a koľko bodov Hago získa pri oboch typoch hier? Už sme si povedali, že pri hre s počítačom je to $(2/5) \cdot$ *počet hier*, na 100 ťahov teda 40 lentiliek. Pri hre proti Mojovi a počítaču naraz pripadajú na jeden Hagov ťah dve odpovede súpera. Ako už vieme, z hľadiska vyhodnotenia je jedno, či hrá Hago proti Mojovi a počítaču Spocka samostatne, alebo proti obom naraz. Preto môžeme vyhodnotiť 100 Hagových hier proti obom súperom naraz ako 200 samostatných hier. V tomto prípade vieme povedať, že pri hre proti obom súperom Hago získa $(2/5)\cdot$*počet hier*, teda 80 lentiliek. Posúdenie, čo je pre Haga výhodnejšie, necháme na lentilkový vkus čitateľa.

<u>Úloha č. 5:</u> *Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n je číslo $4^m - 4^n$ deliteľné 9 práve vtedy, keď $m - n$ je deliteľné 3.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Ondro)
Najskôr malé teoretické okienko. Majme dve celé čísla x, y. Zápis $x \equiv y \pmod 9$, znamená, že x a y majú rovnaký zvyšok po delení 9. Teda $x - y$ je deliteľné 9.
BUNV[1] nech $m \geq n$. Potom $4^m - 4^n = 4^n(4^{m-n} - 1)$. Keďže 4^n nie je deliteľné 3 pre žiadne prirodzené n, môžeme súčiniteľ 4^n ignorovať a riešiť mierne modifikovanú úlohu: Pre ktoré m, n je $(4^{m-n} - 1)$ deliteľné 9. Označme $k = m - n$. Teraz si všimnime, že $4^1 \equiv 4 \pmod 9$, $4^2 \equiv 7 \pmod 9$ a $4^3 \equiv 1 \pmod 9$. Teda ak:

- $k = 3s$, tak $4^k = (4^3)^s \equiv 1^s = 1 \pmod 9$.
- $k = 3s + 1$, tak $4^k = (4^3)^s \cdot 4 \equiv 4 \pmod 9$.
- $k = 3s + 2$, tak $4^k = (4^3)^s \cdot 4^2 \equiv 7 \pmod 9$.

[1] bez ujmy na všeobecnosti

Vieme, že $(4^k - 1)$ je deliteľné 9 práve vtedy, keď $4^k \equiv 1 \pmod 9$ a teda práve vtedy, keď k je deliteľné 3.

Úloha č. 6: *V štvorci 10×10 je zakreslených 101 bodov. Dokážte, že existuje trojuholník s obsahom 1, ktorý obsahuje aspoň tri z týchto bodov. Body môžu byť aj na obvode trojuholníka.*

Riešenie: (opravoval Marek K.)

Rozdeľme daný štvorec na 50 obdĺžnikov 2×1. Z Dirichletovho princípu vyplýva, že aspoň jeden z týchto obdĺžnikov obsahuje aspoň tri z daných 101 bodov. Ukážeme, že trojuholník (prípadne degenerovaný), ktorého vrcholy sú tieto tri body, má obsah najviac 1, odkiaľ už priamo vyplýva dokazované tvrdenie.

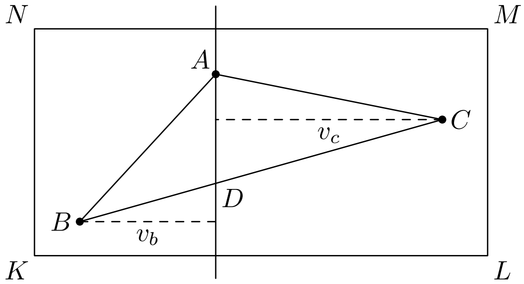
Označme si spomínaný obdĺžnik $KLMN$ a spomínaný trojuholník ABC.

Ak je aspoň jedna strana trojuholníka ABC, napr. a, rovnobežná so stranou obdĺžnika $KLMN$, tak ľahko vidno, že

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} \leq 1,$$

kde v_a je výška na stranu a, lebo platí buď $a \leq 1 \wedge v_a \leq 2$, alebo $a \leq 2 \wedge v_a \leq 1$, podľa toho, či je a rovnobežná s kratšou alebo dlhšou stranou obdĺžnika $KLMN$.

V opačnom prípade, teda keď ABC nemá žiadnu stranu rovnobežnú s niektorou stranou $KLMN$, existuje určite vrchol, napr. A, cez ktorý keď spravíme rovnobežku s kratšou stranou obdĺžnika $KLMN$, tak pretne vnútro protiľahlej strany, v tomto prípade BC — priesečník označme D (viď obrázok). Označme ešte v_b výšku z bodu B v trojuholníku ADB a v_c výšku z bodu C v trojuholníku ADC.



Opäť ľahko vidno, že $|AD| \leq 1$ a $v_b + v_c \leq 2$, preto

$$S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} = \frac{|AD| \cdot v_b}{2} + \frac{|AD| \cdot v_c}{2} = \frac{|AD| \cdot (v_b + v_c)}{2} \leq 1,$$

čo sme chceli dokázať.

Poznámka: Všimnite si, že štvorec sme nemuseli rozdeliť zrovna na obdĺžniky 2×1. Rovnako by to fungovalo aj s obdĺžnikmi napr. $10 \times 1/5$. Podstatné bolo len to, že ich obsah bol 2.

Úloha č. 7: *Sudička Morena darovala princeznej Horácii kopu čarovných kociek. Každá čarovná kocka mala každý z vrcholov očarovaný celým číslom. Navyše pre každú stenu čarovnej kocky platilo, že súčet čísel očarujúcich vrcholy tejto steny je nula. Horácia sa veľmi bála takej čarovnej kocky, na ktorej by našla štvoricu vrcholov spĺňajúcu nasledujúce dve vlastnosti:*

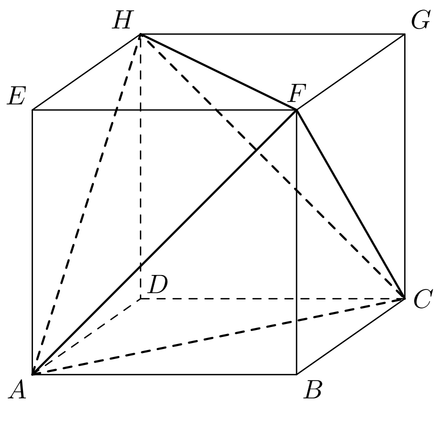
- *Vrcholy tvoria pravidelný štvorsten.*
- *Súčet čísel očarujúcich vrcholy je trinásť.*

Pre dobro princeznej dokážte, že taká čarovná kocka neexistuje.

Riešenie: (opravoval JeFo)

Pre značenie kocky ako je na obrázku existujú len dva pravidelné štvorsteny vyhovujúce podmienke zo zadania, $ACFH$ a $BDEG$. Ďalej bude označenie vrchola označovať aj číslo, ktorým je vrchol očarovaný.

Chceme ukázať, že $A + C + F + H$ nemôže byť 13. Pre $B + D + E + G$ by sme to ukázali obdobne. Budeme postupovať sporom.



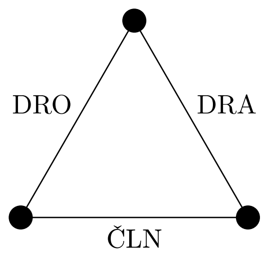
Predpokladajme, že $A + C + F + H = 13$. Potom práve jedno z dvojice čísel $A + C$, $F + H$ musí byť nepárne. Je jedno, ktoré číslo si vyberieme, tak povedzme, že $A + C$. Keďže platí $A + B + C + D = 0$, tak musí platiť $B + D = -(A + C)$, teda aj $B + D$ musí byť nepárne. Čísla B a D majú rôznu paritu, a teda aj čísla $A + B$ a $A + D$ majú rôznu paritu. Pretože $A + B + E + F = 0$ a $A + D + E + H = 0$, tak aj čísla $E + F$ a $E + H$ majú rôznu paritu, a teda čísla F a H majú rôznu paritu. Potom ale musí byť súčet $F + H$ nepárny a obe čísla $A + C$ a $F + H$ sú nepárne. Ich súčet musí byť párny a číslo 13 nie je párne, čo je spor.
Horácia môže teda pokojne spávať a nemusí sa ničoho báť.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Princezná Horácia dostala od kráľovnej Gertrúdy úlohu vymyslieť dopravný systém hodný kráľovstva. Rýchly, bezpečný a jednoduchý. Gertrúda dala Horácii nasledovné podmienky:*

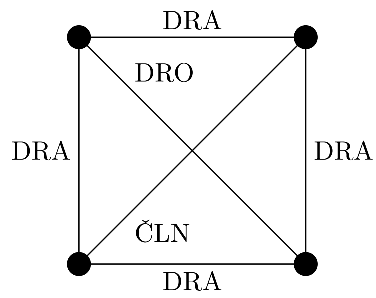
- *Medzi každými dvoma mestami bude priame spojenie buď drožkou, člnom alebo drakom. Vždy práve jedným.*
- *Budú použité všetky tri druhy dopravných prostriedkov.*
- *Zo žiadneho z miest sa nebude dať dostať všetkými troma dopravnými prostriedkami.*
- *Cez žiadne tri mestá sa nebude dať dokola prejsť na jednom dopravnom prostriedku.*

Horácia sa nadšene pustila do vymýšľania a podarilo sa jej vymyslieť systém spĺňajúci všetky kráľovnine požiadavky. Koľko miest môže mať kráľovstvo?

<u>Riešenie:</u> (opravoval Berenito)
Horácia zapojila sivé bunky mozgové a začala pekne poporiadku. Keby malo kráľovstvo iba jedno mesto, nebolo by veľmi veľké a hlavne, neboli by v ňom žiadne cesty, čo je spor s podmienkou číslo 2. To isté si povedala pre prípad, že by v kráľovstve boli dve mestá, keďže vtedy by v ňom bola práve jedna cesta. Nádej ale svitla pre kráľovstvo s tromi mestami, keďže tu existuje veľmi triviálne riešenie. Máme totiž tri cesty a vieme, že musia byť použité tri dopravné prostriedky. Môžeme si overiť, že nasledovná cestná sieť vyhovuje Gertrúde.



Pre kráľovstvo so štyrmi mestami tiež nie je ťažké nájsť vhodné riešenie, napríklad takéto:



V tomto momente si Horácia uvedomila, že kým by takýmto spôsobom prešla všetky prirodzené čísla, zabralo by jej to priam večnosť, a ona nad tým nemienila stráviť viac ako jednu noc. Zamyslela sa a toto ju napadlo. Majme mesto A(lexandria) a z neho idúce 3 cesty rovnakého druhu do miest B(abylon), C(arihrad) a D(amask), bez ujmy na všeobecnosti nech sú to drožky. Žiadne ďalšie drožky na zvyšných cestách medzi týmito mestami (cesty BC, BD a CD) už byť nemôžu, pretože by vytvorili drožkový kruhový objazd dĺžky 3, čo je zakázané. Taktiež tieto 3 cesty nemôžu byť zároveň všetky člny ani všetky draky, pretože znovu by sa vytvoril kruhový objazd rovnakého druhu dĺžky 3. To ale znamená, že z jedného z miest B, C, D ide aj drak, aj drožka, aj čln. A to je predsa zakázané, máme tu teda spor. A Horácia týmto ukázala, že v dobrom kráľovstve zo žiadneho mesta nejdú 3 cesty rovnakého druhu. To je ale dosť problém, ak má totiž mesto aspoň 6 miest, z každého mesta vedie aspoň 5 ciest a teda aspoň 3 musia byť rovnaké (pretože z jedného mesta môžu ísť najviac 2 rôzne prostriedky). Fúha, nekonečne veľa prípadov sme zamietli pod stôl, ostáva nám preveriť 5-mesté kráľovstvo. Z každého mesta idú 4 cesty a tieto musia byť v súlade s našou myšlienkou 2 a 2 rovnakého druhu. Nech z mesta A idú 2 rovnaké cesty do B a C, z každého z nich ide ešte 1 rovnaká cesta. Nemôže to byť BC kvôli kruhovému objazdu dĺžky 3, to ale znamená, že ciest každého druhu je aspoň 4 (vieme, že 0 to byť nemôže). Máme 3 dopravné prostriedky, každý na aspoň 4 cestách, to je dohromady 12 ciest. Hups, medzi 5 mestami je len $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ciest, čo je opäť spor a preto 5 miest zamietame pod koberec.
A tak Horácia Gertrúde odkázala, že kráľovstvo môže mať 3 alebo 4 mestá.

Úloha č. 9: *Princeznú Horáciu uniesol drak Gusto. Princezná Horácia začala v jeho jaskyni z nudy počítať, koľko je v celom kráľovstve melónov. Doma ich mala 9, sused ich mal 99, vo vedľajšej dedine ich bolo 9999. Horácia ale nevedela sčítavať, preto počty násobila a zisťovala ich ciferný súčet. Vyjadrite ciferný súčet čísla*

$$9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdots (10^{2^n} - 1)$$

v závislosti od n.

Riešenie: (opravovala Lindtka)
Vzorák od *Maťa Vodičku.* Príjemné čítanie prajem.

Z denníčka princeznej Horácie
pondelok, 15:50 Jupí! Vozím sa na drakovi!
pondelok, 15:47 Cholera! Ten drak letí úplne zlým smerom. Nedá sa ovládať.
pondelok, 17:42 Doleteli sme do jaskyne. Vyzerá to tak, že sme v úplnej paži.
pondelok, 20:47 To je nuda... Idem počítať melóny. $9 = 9$, $CS_0 = 9$.
pondelok, 22:48 $9 \cdot 99 = 891$, $CS_1 = 18$.
utorok, 01:24 $9 \ldots$ a komu sa chce. Idem spať. A možno to bude $2^n \cdot 9$.

Z denníčka princa Kleofáša
pondelok, 22:42 Konečne som došiel do jaskyne. Všetko vyšlo. Princezná urazená.
pondelok, 22:54 Vidím, že princezná sa trápi rátaním melónov. Skúsim to aj ja aspoň naspäť na hrad.
pondelok, 23:28 Chcem ukázať že $9 \cdot 99 \cdots (10^{2^n} - 1)$ má $CS_n = 9 \cdot 2^n$.
pondelok, 23:47 $C = 9 \cdot 99 \cdots (10^{2^{n-1}} - 1) < 10 \cdot 100 \cdots 10^{2^{n-1}} = 10^{1+2+4+\cdots+2^{n-1}} = 10^{2^n-1}$.
Čiže číslo C má menej ako 2^n cifier.
pondelok, 23:56 Idem si odskočiť do kríčkov.
utorok, 00:07 Nech $C = \overline{A_k A_{k-1} \ldots A_1 A_0}$ (ciferný zápis nášho čísla),
kde $k = 2^n - 1$. (Áno, prvé cifry môžu byť 0. To nám nevadí.)
Teda $C = 10^k \cdot A_k + 10^{k-1} \cdot A_{k-1} + \cdots + 10^0 \cdot A_0$.
utorok, 00:08 Chcem zrátať $C \cdot (10^{2^n} - 1) = C \cdot (10^{k+1} - 1) = C \cdot 10^{k+1} - C$.
utorok, 00:12 Čo ale s tým $-C$? A už viem, odpočítame to ako na základnej škole.
Zrátam $10^{k+1} - C = \overline{B_k B_{k-1} \ldots B_0}$. Triviálne platí $B_i = 9 - A_i$ pre $1 \leq i \leq k$, $B_0 = 10 - A_0$ (B_0 je tiež cifra, lebo $A_0 \neq 0$, lebo $9 \cdot 99 \cdots (99 \ldots 9)$ nie je deliteľné 10).
utorok, 00:18 Teda
$C \cdot 10^{k+1} - C = (C-1) \cdot 10^{k+1} + (10^{k+1} - C) = \overline{A_k \ldots A_1 (A_0 - 1) \underbrace{0 \ldots 0}_{k+1}} + \overline{B_k \ldots B_0} = \overline{A_k \ldots A_1 (A_0 - 1) B_k \ldots B_0}$.

Teraz ľahko zrátam CS_n:
$CS_n = (A_k + B_k) + (A_{k-1} + B_{k-1}) + \cdots + (A_1 + B_1) + (A_0 - 1 + B_0) = 9 \cdot (k+1) = 9 \cdot 2^n$.

Úloha č. 10: *Princ Kleofáš sa vydal hľadať princeznú. Dvorania podľa vzoru princa začali hľadať tiež. Pomôžte im. Nájdite všetky usporiadané trojice (x, y, z) racionálnych čísel, ktoré spĺňajú rovnicu*

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1.$$

Riešenie: (opravoval CD)
Prvý krok riešenia bola správna úprava zadania do lepšieho tvaru. Dalo sa to spraviť viacerými spôsobmi. My si ukážeme úpravu na štvorec, čitateľovi prenecháme postup cez substitúciu $x^2 + x = a$, $y^2 + y = b$, $z^2 + z = c$.
Rovnicu zo zadania si prenásobime štyrmi a následne si ju upravíme nasledovne:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x + 4y + 4z = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 - 3 = 4.$$

Spravíme substitúciu $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$, $c = 2z + 1$. Dostaneme:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7.$$

Keďže x, y, z sú racionálne čísla, aj a, b, c sú racionálne čísla.
Rovnica už vyzerá lepšie, ale stále nevidíme riešenie. Skúsime teda využiť, že a, b, c sú racionálne čísla. Prenásobíme rovnicu spoločným menovateľom a^2, b^2, c^2 a po ďalšej substitúcii dostaneme:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 7D^2.$$

Veríme, že si pozorný čitateľ overí, že skutočne dostaneme rovnicu takéhoto tvaru pre celočíselné A, B, C, D.
Dostávame sa do posledného štádia nášho príkladu. Keďže sme sa konečne dostali k celým číslam, môžme sa začať pozerať na zvyšky po delení rôznymi číslami. Rozoberieme si najprv prípad, že všetky čísla sú párne. Ak existuje

riešenie A, B, C, D takéhoto tvaru, tak je riešením aj $A/2, B/2, C/2, D/2$. A takto môžeme pokračovať až kým aspoň jedno z našich čísel nebude nepárne.
Teraz uvažujme, že aspoň jedno z čísel A, B, C je nepárne. Pozrime sa na zvyšky druhých mocnín po delení ôsmimi. Môžeme si všimnúť, že všetky zvyšky, ktoré vieme dostať, sú 0, 1 a 4. Zvyšky $7D^2$ po delení ôsmimi sú teda 0, 4 a 7. Ak vyskúšame všetky kombinácie zvyškov po delení ôsmimi, prídeme k výsledku, že ak aspoň jedno z čísel A, B, C je nepárne, nemôže platiť $A^2 + B^2 + C^2 = 7D^2$. Preto táto úloha nemá riešenie.

Úloha č. 11: *Princ Kleofáš musel drakovi Gustovi odseknúť až šestnásť z jeho sto hláv, kým to Gusta prestalo baviť a vrátil princeznú. Po návrate do mesta daroval Kleofáš tieto hlavy a polovicu princeznej vedeckému inštitútu Golem a Syn. Tí teraz chcú nájsť štyri hlavy, ktoré by tvorili vyrovnané tímy v zápase plážového hokejbalu. Dokážte, že medzi ľubovoľnými* 16*-timi rôznymi kladnými celými číslami neprevyšujúcimi* 100*, sa dajú nájsť štyri rôzne čísla* a, b, c, d, *pre ktoré platí* $a + b = c + d$.

Riešenie: (opravoval Viktor)
Označme si týchto 16 čísel podľa veľkosti $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{16} \le 100$. Chceme dokázať, že existujú 4 rôzne čísla i, j, k, l, také že $a_j - a_i = a_l - a_k$ (odtiaľ potom $a_j + a_k = a_l + a_i$). Keď sa pozrieme na všetky usporiadané dvojice (i, j), kde $1 \le i < j \le 16$, tak vieme, že ich je $\binom{16}{2} = 120$, pričom zjavne $1 \le a_j - a_i \le 99$, čo znamená, že exisujú také dve rôzne usporiadané dvojice (i, j), (k, l) také, že $a_j - a_i = a_l - a_k$ (pričom $i < j$ a $k < l$). Ak $i = k$, tak $a_j = a_l$ a teda $j = l$, čiže to nie sú rôzne dvojice, čo je spor. Podobne nemôže platiť $j = l$. Problém môže byť len ak $i = l$ resp. $j = k$. Teraz namiesto všetkých 120 dvojíc (i, j), zoberme len také dvojice, aby táto problémová situácia nemohla nastať a budeme dúfať, že ich počet bude väčší ako 99 (problémové sú tie, kde $a_b - a_x = a_x - a_c$ pre $c < x < b$).
Pozrime sa na všetky a_x také, že $2 \le x \le 15$. Najprv predpokladajme, že k nejakému x existujú také dve rôzne usporiadané dvojice (b, c), (d, e), že $a_b - a_x = a_x - a_c$ a $a_d - a_x = a_x - a_e$, pričom $b, d > x > c, e$. Potom ak $b = d$, tak $a_c = a_e$ a teda $c = e$, čiže to nie sú rôzne dvojice, čo je spor. Čiže $b \ne d$ a podobne $c \ne e$, čiže možno písať $a_b + a_c = 2a_x = a_d + a_e$, pričom b, c, d, e sú 4 rôzne čísla, čiže sme vyhrali. Ostal nám prípad, ak pre každé x existuje maximálne jedna dvojica (b, c) taká, že $a_b - a_x = a_x - a_c$, označme si túto rovnosť (1). Ak teraz zo všetkých 120 dvojíc (i, j) odstránime tie, ktoré sú tvaru (b, x) pre každé x a pre príslušné b spĺňajúce (1) k tomuto x (ak k nejakému x nenájdeme dvojicu (b, c) spĺňajúcu (1), tak nič odstraňovať nemusíme), tak sme odstránili maximálne 14 dvojíc, čiže ich ostalo aspoň 106. Teraz môžeme pokračovať v úvahe rovnako ako v prvom odstavci s tým, že kvôli odsráneným dvojiciam už vieme, že problémová situácia nemôže nastať (premyslite si prečo), čím je dôkaz hotový.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Vodička Martin	4.	GAlej KE	11	13			9	9	9	9	9		45	135
2.	Kossaczká Marta	4.	Gamča BA	11	9			9	9	9	9			36	125
3.	Puza Marko	3.	GPoš KE	6	2		8	9	9	7		9		42	124
4.	Psota Miroslav	3.	GHlin ZA	8	3			9	9	9		9		36	120
5.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	Gamča BA	6	4			9	9	9	9	8		44	116
6.	Krajčiová Katarína	2.	GAlej KE	5	2		9	9	9					27	112
7.	Hanzely Filip	4.	GAP SB	11	8			9	9	9	4	0		31	106
7.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	2	0	6	5	9	9			9		38	106
9.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3	0	9	1	9	7	6				32	102
10.	Dargaj Jakub	3.	GPoš KE	4	0	9	9	9	8			1		36	101
10.	Horváth Samuel	3.	GPár NR	7	2		9	9	8	9				35	101
12.	Pokrývka Filip	3.	G Bánovce	8	3			9	9	9				27	98
13.	Stankovič Miroslav	3.	GPoš KE	8	8			9	9					18	95
14.	Bui Truc Lam Michal	2.	Gamča BA	5	4				7		9	9		25	93
14.	Jurina Šimon	3.	Gamča BA	7	3			9	9	9		9		36	93
16.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2	1		9	9		9	9	9		45	89
17.	Pieš Adrián	3.	ŠPMNDG BA	4	0	9	0	9	9	9				36	88
18.	Šimsa Štěpán	4.	Litoměřice ČR	9	10			9	8	9				26	87
19.	Ječmenová Andrea	3.	GVO ZA	7	2		1	9	9	5		1		25	85
19.	Šafin Jakub	4.	GPH MI	9	7									0	85
21.	Magyarová Zuzana	3.	GBST LC	7	2		5	9	9					23	84

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
22.	Bohdal Ondrej	2.	GJH BA	5	1		9	9	9	9				36	80
23.	Ďuratná Petra	2.	ŠPMNDG BA	4	0	9		9	8					26	79
23.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	4	0	1	0	9	6	3		9		28	79
23.	Szalay Erik	3.	ŠPMNDG BA	4	0	3			9	6				18	79
26.	Hrivová Ivona	3.	GVO ZA	8	3			9	9	8		1		27	78
27.	Šimková Ľudmila	3.	GPár NR	8	3			9	9					18	76
28.	Batmendijn Eduard	2.	CGsvM SL	6	4			9		9		9		27	72
29.	Trembecký Richard	4.	GAlej KE	6	2		9	9	7					25	71
30.	Svoboda Jakub	3.	G Hav CR	3	0		8	9	8	7		1		33	69
31.	Hlaváčik Matúš	4.	GAlej KE	9	4			9	8					17	68
32.	Kobák Michal	3.	Gamča BA	5	2		5	9	7					21	67
32.	Krakovská Hana	3.	Gamča BA	6	1		5	9	8			5		27	67
32.	Králik Matej	2.	GJH BA	5	0	5	1	1	9	9				25	67
35.	Buráň Michal	4.	G JAK CR	5	3									0	64
35.	Magurová Lucia	4.	GPoš KE	7	1			9	8					17	64
37.	Daniel Mark	3.	GPár NR	7	2		5	9						14	63
38.	Bačinská Irena	3.	ŠPMNDG BA	5	2		5	7	9	9	4			34	62
38.	Korbela Michal	3.	G Bánovce	8	3			9	9	8				26	62
38.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	2	0	5	5					5		15	62
38.	Santrová Michaela	2.	GMH Trstená	5	1			9	9	8				26	62
42.	Macko Vladimír	4.	GĽŠ ZV	9	7			9	6	2				17	61
42.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	4	0	9	0	2	2	1				14	61
42.	Murin Martin	2.	GJH BA	5	0	4	5			2		1		12	61
45.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	3	0	1	9							10	60
46.	Svoboda Josef	4.	Frýdlant ČR	8	6			9	1	8	9			27	59
46.	Tomašec Samuel	3.	GVar ZA	6	1		0	9	8	5		2		24	59
48.	Dráček František	2.	GŠkol PB	5	1		1	1	8	1		1		12	58
49.	Nepšinská Silvia	2.	GJCh BR	5	1		0	3	9	0		1		13	57
49.	Prívozník Matej	3.	GJH BA	8	3			9	9		2	1		21	57
51.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	4	1									0	56
52.	Hronkovičová Nina	2.	GKom PE	3	0	4	3	9						16	55
53.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3	0						9	9		18	54
54.	Prešinská Kristína	2.	GPár NR	5	1		0	9	1	2		1		13	50
55.	Kňaze Adam	2.	GJCh BR	5	1		6	2	2	0	2			12	49
55.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2	0	4	5	2		0				11	49
57.	Sučík Samuel	2.	GJH BA	5	3									0	47
58.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	2	0	7	9							16	44
59.	Benešová Katarína	4.	ŠPMNDG BA	9	3			1	5	2				8	42
59.	Lâm Tuân Dũng	2.	GJH BA	5	1							1		1	42
61.	Lipovský Mário	3.	GJH BA	6	2									0	38
61.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3	0									0	38
63.	Iždinská Dominika	3.	GJH BA	5	0	6								6	37
63.	Muravský Jakub	3.	Gamča BA	3	0	1								1	37
65.	Polovka Maroš	3.	GKuk PP	4	0	9	0	9						18	36
65.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3	0		5	4		2				11	36
67.	Kováčová Barbora	3.	ŠPMNDG BA	6	1									0	35
68.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3	0									0	34
69.	Mikulec Jaromír	2.	GsvJ NM	4	0									0	33
69.	Smolík Milan	4.	GJH BA	7	1									0	33
69.	Svitková Patricia	3.	GLN BA	5	0	6								6	33
72.	Matejovičová Tatiana	3.	GJH BA	7	4									0	31
73.	Ženčuchová Andrea	2.	GJAR PO	3	0	5	5	9	5	5	2	1		29	29
74.	Mores Martin	3.	GVar ZA	6	1									0	28
75.	Santer Martin	4.	GMH Trstená	7	0									0	24
75.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3	0									0	24

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
77.	Bieliková Michaela	3.	GVM SE	5	0									0	16
78.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2	0									0	13
78.	Lampášová Denisa	3.	GŠkol PB	4	1			1		1				2	13
80.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	4	0									0	10
81.	Gafurov Askar	4.	Gamča BA	7	3									0	9
81.	Gajdošová Natália	1.	ŠPMNDG BA	1	0	5	0	1	1	0	2	0		9	9
81.	Leličová Lucia	2.	GPoš KE	2	0									0	9
81.	Šandalová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	5	0									0	9
85.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	0	1	0	1						2	5
86.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3	0									0	3
87.	Macháčová Laura	1.	ŠPMNDG BA	1	0	0		1	1	0		0		2	2
88.	Adamove Miroslav	1.	GBST LC	1	0									0	1
88.	Hučková Valentína	1.	ŠPMNDG BA	1	0				1					1	1
88.	Kušíková Zuzana	1.	ŠPMNDG BA	1	0				1					1	1

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Bodík Juro	1.	Gamča BA	2		9	9	9	2	2			113
2.	Petráš Peter Pavel Arthur	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9				110
3.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	2		7	9	6	4	5	2		106
4.	Choma Matej	1.	Gamča BA	2		9	9	9	3	1			105
5.	Oravkin Eduard	1.	1SG BA	2		9	9	7	9	1			104
6.	Halabrin Juraj	1.	GJH BA	2		9	9	7	8	0			102
7.	Murín Marek	1.	GJH BA	2			9	8	3	4	1		96
8.	Hollý Dominik	2.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	8		9		95
9.	Sučíková Katarína	1.	GJH BA	1	9	9	9		4				91
10.	Škrlec Adam	1.	GJH BA	1	8		9	7			5		80
11.	Gazdíková Ema Mária	1.	ŠPMNDG BA	1			9	3		5			67
12.	Fabšíková Nina	1.	1SG BA	2		9	9	2					56
12.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3					9	1	9		56
14.	Pilňan Branislav	2.	GJH BA	3			9						37
14.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	3					1	9			37
16.	Suchý Daniel	2.	Gamča BA	2		9	9		2				34
17.	Gajdošová Natália	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	7	0	5	0	1		31
18.	Muravský Jakub	3.	Gamča BA	3					1				22
19.	Kušíková Zuzana	1.	ŠPMNDG BA	1	6	9	6	0					21
20.	Trenčanská Tereza	1.	Gamča BA	2									19
21.	Stowasserová Kristína	3.	1SG BA	3									14
22.	Macháčová Laura	1.	ŠPMNDG BA	1	6	5			0		1		12
23.	Tóthová Andrea	1.	ŠPMNDG BA	1									10
24.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3			1	3	1	0	1		9
25.	Hučková Valentína	1.	ŠPMNDG BA	1									0

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Tódová Lucia	1.	GPár NR	2		9	9	8	4	5			100
2.	Hronkovičová Nina	2.	GKom PE	3			9	9	4	3	9		98
3.	Krajmerová Barbora	1.	G Šurany	1	9	9	9	4			1		93
4.	Konček Marián	2.	G1.máj MA	3			9	8	4		9		88
5.	Kašša Ladislav	1.	G Šamorín	2		2	9	9	2				60
6.	Szabo Michal	1.	GAM TT	1	6	9	7		3	5	9		58
7.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3									23
8.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2									9

kategória ALFA, stred

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Kulla Filip	1.	BiG Sučany	2		9	9	7	5	3			115
2.	Súkeník Peter	1.	GVar ZA	1	9	9	9	9	5	1			114
3.	Sládeček Michal	1.	GVar ZA	1	8	9	9	3	5				105
4.	Tesař Emanuel	1.	GBST LC	2		9	9	5	0				83
5.	Chabanová Barbora	1.	GJGT BB	2	9	9	9		5				70
5.	Pavlus Matúš	1.	GBST LC	2	8	9	5	9	4		9		70
7.	Pecko Marcel	1.	GBST LC	2		9	9	3		1	1		55
8.	Kudelčíková Martina	1.	GVO ZA	2		1	9	0			1		34
9.	Roch Oliver	2.	G Bytca	2		9	8	9					30
10.	Včelková Veronika	2.	GPOH DK	2									18
11.	Bátrna Jozef	2.	G Bytca	2		9	0						12
12.	Sanigová Lucia	2.	GVar ZA	2									9
12.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3									9
14.	Adamove Miroslav	1.	GBST LC	1									7
15.	Michálek Tomáš	2.	G Bytca	2									1
16.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3									0
16.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Semanišinová Žaneta	1.	GAlej KE	2		9	9		9	9	9		131
2.	Mišlanová Kristína	1.	GAlej KE	2		9	9		5	5	9		121
3.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	2		9	9	9	5	5			119
4.	Onduš Daniel	1.	GAlej KE	1	7	9	9	9	6				117
5.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	2		9	9	7	6	5	9		116
5.	Molčan Samuel	1.	GJAR PO	1	9	9	9	6	5				116
7.	Kurimský Ján	1.	GsvMo	2									52
8.	Jankovičová Natália	2.	GKon SP	2									27
9.	Lenárt Patrik	1.	GPM KE	2									23
10.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3									19
10.	Ženčuchová Andrea	2.	GJAR PO	3					5	5	9		19
12.	Leličová Lucia	2.	GPoš KE	2									0

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Žídek Matěj	1.	Frýdlant ČR	2		9	9	6	9	8	8		127
2.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	2		9	9	9	7	9			92
3.	Krchňák Václav	1.	Brno ČR	1					6	5			54
4.	Svoboda Jakub	3.	G Hav CR	3						8	9		34
5.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2						9	9		32
6.	Steinhauser Václav	-1.	G Dacice	-1									28
7.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3						5	4		23