Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2012/2013

Úloha č. 1: *Po ceste prešlo dokopy 19 motoriek a áut. Keby prešlo o štyri autá menej, bolo by ich toľko ako dvojnásobok počtu motoriek, ktoré prešli. Koľko prešlo po ceste áut a koľko motoriek?*

Riešenie: (opravovala Betka a Aďka)
Väčšina z vás úlohu úspešne vyriešila pomocou sústavy rovníc.
Počet motoriek si označme m a počet áut a, zadanie teda môžeme prepísať do dvoch rovníc

$$\begin{aligned} a + m &= 19, \\ a - 4 &= 2m. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme $m = 19 - a$ a dosadíme do druhej rovnice: $a - 4 = 38 - 2a$. Z toho ekvivalentnými úpravami dostaneme $a = 14$, potom ho dosadíme do prvej rovnice a dopočítame, že $m = 5$.

Úloha č. 2: *Aká cifra je na 7000. mieste za desatinnou čiarkou v čísle $\frac{1}{7000}$?*

Riešenie: (opravovala Barča a Mary)
Všímavý riešiteľ po zadaní nášho čísla do kalkulačky nadobudne silné podozrenie, že číslice za desatinnou čiarkou sa opakujú. Zlomok po vydelení vyzerá asi takto: $0,000142857142857142\ldots$ Poďme si teda dokázať, že naozaj

$$\frac{1}{7000} = 0,000\overline{142857}.$$

Šlo to rôznymi spôsobmi, ale pravý matematický estét sa uchýli k nasledovnému. Označme $0,000\overline{142857} = a$. Chceme ukázať, že

$$a = \frac{1}{7000}.$$

Vieme, že

$$\begin{aligned} a &= 0,000\overline{142857}, \\ 1000000a &= 142,857\overline{142857}. \end{aligned}$$

Prvú rovnicu odčítame od druhej a vyjadríme a:

$$\begin{aligned} 999999a &= 142,857 = 142857 \cdot \frac{1}{1000}, \\ a &= \frac{142857}{999999} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{7000}. \end{aligned}$$

Tadá. A teraz, keď už vieme, ako hľadaný desatinný rozvoj vyzerá, vidíme, že číslica na 4. pozícii je rovnaká ako na 10., 16., 22., 28., … pozícii, a preto na $(4 + 1166 \cdot 6)$-tej pozícii sa nachádza číslica 1.

Úloha č. 3: *Určte počet všetkých trojciferných čísel, ktoré sú devätnásťkrát väčšie ako ich ciferný súčet.*

Riešenie: (opravovala Baša a JeFo)
Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Jedným z nich bolo vypísanie si násobkov 19 medzi 100 a $27 \cdot 19$. Stačili len po 27, lebo ciferný súčet trojciferného čísla je maximálne 27. Ďalej bolo potrebné overiť násobky, či spĺňajú podmienku zo zadania.
Ďalšia cesta, akou ste sa mohli pri riešení vybrať, je prepísať si zadanie do rovníc. Pre trojciferné číslo $\overline{abc}$ má platiť

$$100a + 10b + c = 19a + 19b + 19c.$$

Po úpravách dostaneme

$$9a = b + 2c.$$

Za a, b, c môžeme dosadiť len čísla 0 až 9, lebo sú to cifry. Najvyššia hodnota pravej strany je 27, keď $b = c = 9$. Potom $a = 3$. Z tohto vidíme, že a môže nadobúdať len hodnoty 1, 2, 3 (hodnotu 0 nemôže, pretože je to prvá cifra).
Ak $a = 1$, potom za b môžeme dosadiť len nepárne čísla (rozmyslite si), čo je 5 možností.
Ak $a = 2$, potom za b môžeme dosadiť len párne čísla, znova 5 možností.
Ak $a = 3$, tak máme len jedinú možnosť, ako dosiahnuť 27.
Dokopy máme 11 možností.

Iné riešenie:
Ďalšie zaujímavé riešenie je podľa *Jána Kurimského*. Uvedomíme si, že hľadané čísla musia byť násobky 19. Teda najnižšie možné je $6 \cdot 19 = 114$ a spĺňa podmienku, že ciferný súčet sa rovná 6 a činiteľ pri 19 je 6. Ďalšie vznikne pripočítaním 19. Jeho ciferný súčet sa (väčšinou) zväčší o 1 (jednotky sa znížia o 1 a desiatky sa zvýšia o 2) a aj činiteľ pri 19 sa zväčší o 1, čiže číslo bude znova spĺňať podmienku. Výnimka nastáva, ak číslo končí cifrou 0, alebo prechádzame pri pripočítaní cez 100. Tieto problémy sa však dajú ľahko ošetriť, rozobraním možností, kedy nastávajú. A samozrejme, nemá zmysel ísť na vyšší násobok ako 27.

Úloha č. 4: *Turnaja vo futbale sa zúčastnilo N družstiev. Turnaj sa hral systémom každý s každým. Najviac koľko družstiev mohlo vyhrať aspoň polovicu zápasov, ak*

a) *N je nepárne?*

b) *N je párne?*

Riešenie: (opravovala Lindtka a Kubo)
V tomto príklade máme vyriešiť dve podúlohy, tak začnime prvou.

a) Pozrime sa na menšie prípady. Ak sa turnaja zúčastnil iba jeden tím, tak hral nula zápasov. Keďže nula je polovica z nuly, tento tím vyhral aspoň polovicu zo všetkých zápasov, ktoré odohral. Všetky tímy vyhrali aspoň polovicu svojich zápasov.
Ak sa turnaja zúčastnili 3 tímy a_1, a_2, a_3 a tím a_1 porazil a_2, a_2 porazil a_3 a a_3 porazil a_1, tak opäť všetky tímy vyhrali aspoň polovicu z ich odohratých zápasov (každý tím odohral 2 zápasy a vyhral 1 z nich).
Vyzerá to, akoby vždy vedeli hrať tak, aby všetky tímy vyhrali aspoň polovicu svojich zápasov. To nám ale nestačí, poďme poriadne zistiť či to bude fungovať pre všetky nepárne čísla.
Majme $2n + 1$ tímov. Každý tím odohral $2n$ zápasov, čiže chceme uskutočniť turnaj, kde každý tím vyhrá minimálne n zápasov. Aby každý z $2n+1$ tímov vyhral aspoň n zápasov, potrebujeme minimálne $(2n+1)\cdot n$ zápasov. Hrá každý s každým, takže zápasov sa dokopy odohrá
$$\frac{(2n+1)(2n)}{2} = (2n+1)\cdot n.$$
To je presne ten správny počet. Očividne nič nebráni existencii takého turnaja, kde všetci vyhrajú aspoň polovicu zápasov, tak poďme vymyslieť ako by asi vyzeral.
Nakreslime si našich $2n + 1$ tímov do kruhu (pravidelného $(2n + 1)$-uholníka) a zostrojme zápasy tak, aby každý tím vyhral nad najbližšími n tímami po jeho ľavici a prehral s najbližšími n tímami po jeho pravici.
Ak si vyberieme dva rôzne tímy A a B v kruhu a B je medzi najbližšími n tímami napravo od A, tak A je medzi najbližšími n tímami naľavo od B. Takže podľa nášho systému A prehral s B a naopak B vyhral nad A. Jednoznačne sme teda určili víťaza každého zápasu, čo je veľmi dôležité, ak chceme tvrdiť, že tak dopadol regulárny turnaj.
Ako môžeme vidieť, každý tím vyhral n zápasov. Preto turnaj s nepárnym počtom hráčov vie vždy skončiť tak, aby každý tím vyhral aspoň polovicu svojich zápasov.

b) Majme $2n$ tímov v turnaji. Každý tím odohrá $2n - 1$ zápasov. Ak chceme aby tím vyhral aspoň polovicu svojich zápasov, musí ich vyhrať aspoň
$$\frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2}.$$
Toto číslo ale nie je celé a nedá sa vyhrať polovica zápasu. Preto, ak chce tím vyhrať aspoň polovicu zápasov, musí vyhrať aspoň n zápasov. Tentokrát na to, aby každý tím vyhral aspoň n zápasov, potrebujeme minimálne $2n \cdot n$ zápasov. Počet odohratých zápasov je však len
$$\frac{(2n)(2n-1)}{2} = (2n-1)\cdot n.$$
Nemôže teda nastať to, aby každý tím vyhral aspoň polovicu svojich zápasov (počet potrebný na to, aby každý vyhral n zápasov je ostro väčší ako počet všetkých zápasov). Ale čo ak vieme dosiahnuť to, aby iba jeden tím vyhral menej ako n zápasov.

Predstavme si to tak, akoby jeden tím meškal na turnaj. Na turnaji sú všetky tímy okrem jedného (nepárny počet tímov). Tí odohrajú všetky zápasy medzi sebou tak, ako sme to opísali v možnosti a), keďže máme $2n-1$ tímov, každý práve vyhral $n-1$ zápasov.
Teraz príde meškajúci tím a všetky zápasy prehrá. Čiže všetky ostatné tímy vyhrajú $(n-1)+1=n$ zápasov, čo je viac ako polovica zápasov, ktoré odohrali.
Pre $2n$ tímov vieme dosiahnuť to, aby $2n-1$ tímov vyhralo aspoň polovicu svojich zápasov.

Úloha č. 5: *Alibabova žena našla v zbojníckej jaskyni vrece s diamantmi. Diamantov bolo vo vnútri n, pričom prvý z nich vážil 1 g, druhý 2 g, ďalší 3 g, ..., posledný n gramov. Alibaba chcel, aby si diamanty rozdelili na dve časti, pričom tieto dve časti majú mať rovnakú hmotnosť. Pre aké n sa dá korisť rozdeliť?*

Riešenie: (opravoval Kozzy)
Skúsme sa najskôr zamyslieť nad tým, pre ktoré n sa diamanty rozdeliť určite nebudú dať. V každom prípade to nepôjde pre tie n, kde by celkový súčet hmotností diamantov bol nepárne číslo. Jeho polovica by potom nebola celým číslom a teda by sme ju nemohli dostať ako súčet celých čísel. Zaujímať nás budú teda také n, že súčet $1+2+\cdots+n$ je párny (volajme ich párnosúčtové). Inými slovami môžeme povedať, že polovica tohoto súčtu je celé číslo.
Keď však také n nájdeme, ešte nemáme vyhraté. Vieme zaručiť, že pre nepárnosúčtové n sa diamanty rozdeliť nedajú, nikto nám ale nesľúbil, že pre párnosúčtové to dokážeme, stále môže byť problém aj v niečom inom ako nepárnosti. V našom prípade, našťastie, nebol, ale to sa patrí dokázať. Najjednoduchšie to urobíme, keď rozdeľovanie priamo skonštruujeme, teda všeobecne rozhodneme, ktoré diamanty dáme komu.
Začnime tak, že Alibaba má všetky diamanty u seba a polovicu z nich chce dať žene. Tak si ich všetky pekne zoradí, od najväčšieho po najmenší a začne jej ich zaradom dávať (najprv jej dá najväčší, potom druhý, atď.). Toto robí, až v nejakom okamihu sa mu musí prvýkrát stať, že keby žene odovzdal v poradí ďalší diamant, už by mu ostala menšia časť. Ak majú v tejto chvíli obaja rovnako, podarilo sa. Ak nie, vieme, že existuje celé číslo k také, že Alibaba má presne o k gramov viac ako je polovica koristi, jeho žena presne o k gramov menej. Prečo je toto číslo celé? Vraveli sme, že nutnou podmienkou je, aby polovica súčtu bola celé číslo, hmotnosť diamantov, ktoré má Alibaba práve u seba musí byť samozrejme tiež celočíselná, no a rozdiel týchto dvoch celých čísel je opäť celé číslo. Okrem toho k je určite menšie ako hmotnosť najväčšieho diamantu, ktorý Alibaba má. To nám už stačí na to, aby sme mohli povedať, že medzi Alibabovými diamantami sa taký, ktorý má hmotnosť k gramov, určite nachádza (to si dobre premyslite). Ten môže dať žene a v tejto chvíli majú zaručene obaja rovnako. Tým sme ukázali, že pre párnosúčtové n sa diamanty vždy rozdeliť dajú.
Už nám zostáva iba rozhodnúť, ktoré n sú párnosúčtové. Skúsme si súčet upraviť tak, aby sme sa vedeli ľahšie rozhodnúť. Nič nepokazíme, ak súčet zdvojnásobíme a následne zase vydelíme dvoma.

$$S = 1+2+\cdots+n = \frac{(1+2+\cdots+n)+(1+2+\cdots+n)}{2}.$$

Teraz prichádza na rad jednoduchá finta. Čísla v čitateli si preusporiadame takým spôsobom, aby mali po dvojiciach rovnaké súčty. To dosiahneme, ak k prvému napíšeme posledné, k druhému predposledné, atď.

$$S = \frac{(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-1+2)+(n+1)}{2}.$$

V tejto chvíli je hodnota každej zátvorky $n+1$ a takýchto zátvoriek máme presne n, z toho teda

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hľadáme n, pre ktoré S je párne číslo, resp. polovica S celé číslo. Čísla n a $n+1$ sú nesúdeliteľné, teda

$$\frac{S}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

je celé číslo vtedy a len vtedy, keď je jedno z čísel n, $n+1$ deliteľné štyrmi.

Úloha č. 6: *Snehulienka má obdĺžnikovú záhradku s celočíselnými rozmermi x a y. Rozhodla sa zväčšiť si ju na rozmery $x+5$ a $y+6$. Týmto počinom sa jej záhradke trikrát zväčší obsah. Aké rozmery mohla záhradka pôvodne mať?*

Riešenie: (opravoval Beren)
Keďže si Snehulienka nevedela rady, zavolala si na pomoc trpaslíkov. Päť z nich sa len zamyslene škrabalo na čele, ale Dudroš a Kýblik vymysleli celkom dobré riešenia.
Dudroš si povedal, že keď nám tu vystupujú celé čísla, čo tak to vyskúšať riešiť cez deliteľnosť. Totiž máme tu vyriešiť 1 rovnicu o 2 neznámych, čiže explicitne sa to vyriešiť dať nebude. Ale môžeme dúfať, že si obor riešení

brutálne zúžime a potom tých zopár možností vyskúšame. Čiže chceme upraviť našu rovnicu tak, aby na jednej strane bol súčin niekoľkých zátvoriek a na druhej strane nejaké číslo, ideálne také, čo má málo deliteľov. Ako vyzerá naša rovnica? Pôvodný obsah záhradky sa dá vyjadriť ako $x \cdot y$, nový obsah ako $(x+5) \cdot (y+6)$ a naša rovnica tým pádom bude $(x+5)(y+6) = 3xy$. A teraz upravujme:

$$\begin{aligned} xy + 6x + 5y + 30 &= 3xy, \\ 2xy - 6x - 5y - 30 &= 0, \\ 2xy - 6x - 5y + 15 - 45 &= 0, \\ (2x-5)(y-3) &= 45. \end{aligned}$$

Presne toto sme chceli dosiahnuť, 45 má totiž iba 6 celočíselných deliteľov, a to 1, 3, 5, 9, 15, 45. Lenže takisto aj v zápornom prevedení, my však vieme, že rozmery sú kladné a teda, ak sú obidve zátvorky záporné, tak $(2x-5) \geq -3$ a $(y-3) \geq -2$, čiže $(2x-5)(y-3) \leq 6$, čím sme možnosť, že obidve zátvorky sú záporné odhalili ako falošnú. Keby bola len jedna zátvorka záporná, tak sa ich súčin isto nemôže rovnať 45. Ostalo nám teda 6 možností, zapíšeme si ich do prehľadnej tabuľky aj s dorátanými x a y.

$2x-5$	$y-3$	x	y
1	45	3	48
3	15	4	18
5	9	5	12
9	5	7	8
15	3	10	6
45	1	25	4

A tieto dvojice $[x, y]$ sú teda všetky možné riešenia Snehulienkinho problému.

Iné riešenie:
Kýblik sa pozrel na rovnicu $xy + 6x + 5y + 30 = 3xy$ a vyjadril si z nej, že

$$y = \frac{6x+30}{2x-5}.$$

Toto je predpis lineárne lomenej funkcie, ktorej grafom je hyperbola a o ktorej vieme, že keď bude x stúpať, tak y bude klesať (ak $2x-5>0$). Čiže začneme skúšať možnosti od najmenšieho možného x, čo je 3, pretože y musí byť kladné. Pre $x = 8$ je $y = 78/11$ a teda už platí, že $x \geq y$. Čiže vo všetkých prípadoch mi platí buď, že $x \leq 8$ alebo $y \leq 7$, čiže nám stačí odskúšať si zopár možností a dôjdeme samozrejme k tomu istému výsledku ako Dudroš. Vybavené.

Úloha č. 7: *Cédečko má fóbiu z reálnych čísel a, b, c, x, y. Jeho strach je spôsobený tým, že platí $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$, $c^3 + cx + y = 0$ a navyše sú čísla a, b, c rôzne. Upokojí sa, iba ak sa dozvie, že súčet čísel a, b, c je nula. Dokážte, že sa nemá čoho báť.*

Riešenie: (opravoval Maťo Bachratý)
Úloha sa dá riešiť dvoma rôznymi spôsobmi. Prvý využíva iba úpravy rovníc, druhý vyžaduje základné znalosti o polynómoch. Uvedieme si oba spôsoby v horeuvedenom poradí.
Odčítajme od seba prvé dve rovnice (zbavíme sa tak neznámej y), dostaneme

$$\begin{aligned} a^3 + ax + y - (b^3 + bx + y) &= 0 - 0, \\ a^3 - b^3 + ax - bx &= 0, \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)x &= 0, \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2 + x) &= 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnica nám hovorí, že jeden z výrazov $(a-b)$ a $(a^2 + ab + b^2 + x)$ musí byť rovný nule. Keďže nám zadanie vraví, že $a \neq b$, tak nunte platí $a^2 + ab + b^2 + x = 0$.
Odčítaním prvej a tretej rovnice dostaneme rovnicu $a^3 + ax + y - (c^3 + cx + y) = 0 - 0$, ktorá nás analogicky dovedie k rovnici $(a-c)(a^2 + ac + c^2 + x) = 0$. Keďže $a \neq c$, tak nutne platí $a^2 + ac + c^2 + x = 0$. Takto sme dostali dve nové rovnice, skúsme ich znova odčítať.

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 + x - (a^2 + ac + c^2 + x) &= 0 - 0, \\ ab - ac + b^2 - c^2 &= 0, \\ a(b-c) + (b+c)(b-c) &= 0, \\ (a+b+c)(b-c) &= 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnica nám vraví, že jeden z výrazov $(a+b+c)$ a $(b-c)$ musí byť rovný nule. Keďže $b \neq c$, tak nutne $a+b+c=0$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie:
Teraz si uveďme druhý spôsob riešenia, ktorý vyžaduje niektoré základné znalosti o polynómoch. Tie budeme využívať bez toho, že by sme si ich dokázali (nemusíte ich dokazovať ani v riešeniach). Ak však neviete, prečo platia, tak si ich určite skúste dokázať :).
Tri rovnice zo zadania nám hovoria, že a, b aj c sú koreňmi polynómu $P(z) = z^3 + zx + y$. Ďalej vieme, že polynóm $P(z)$ je kubický, a teda má najviac tri reálne korene (berieme do úvahy aj násobnosti koreňov). My však poznáme tri *rôzne* korene tohto polynómu (zo zadania vieme, že a, b, c sú navzájom rôzne), teda sú to nutne všetky korene a navyše každý z nich musí byť jednonásobný (ináč by sme mali vrámci násobnosti viac než tri korene).
Teraz už poznáme všetky korene polynómu $P(z)$ aj s ich násobnosťami, konkrétne sú to a, b, c a násobnosť každého z nich je jedna, takže platí rovnosť $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$, braná ako rovnosť polynómov s neznámou z (to znamená, že rovnosť platí pre každé $z \in \mathbb{R}$). Táto rovnosť nám vlastne hovorí, že koeficienty pri každom z^n, kde $n \in \mathbb{N}_0$, musia byť na oboch stranách rovnaké. Porovnaním koeficientov pri člene z^2 dostávame $0 = -a-b-c$, z čoho hneď vyplýva $a+b+c=0$, čo sme chceli dokázať.

Komentár: Najčastejšou chybou druhého typu riešenia bolo nevyužitie faktu, že čísla a, b, c sú rôzne. Napríklad kubický polynóm (s koeficientom 1 pri z^3), ktorý má korene $a=1$, $b=1$, $c=-2$ nemusí mať nutne tvar $P(z) = (z-1)(z-1)(z+2)$. Vyhovuje napríklad aj polynóm $P(z) = (z-1)(z+2)(z-42)$. Teda podmienka rôznosti a, b, c je veľmi dôležitá.

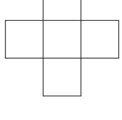
Úloha č. 8: *Nech q je kladné racionálne číslo. Dieťaťom čísla q nazvime čísla $q+1$ a $\frac{q}{q+1}$. Potomkami čísla q nazvime deti q a deti všetkých potomkov q. Ondro napísal na tabuľu všetkých potomkov čísla 1. Dokážte, že každé kladné racionálne číslo sa nachádza na tabuli práve raz.*

Riešenie: (opravoval Ondro a Ondro)
Existuje niekoľko spôsobov ako riešiť túto úlohu. My si ukážeme jeden z nich. Číslo p nazveme *rodičom* q, ak q je dieťaťom p. *Predkami* čísla q nazvime rodiča q a rodičov všetkých predkov q. Najskôr ukážeme, že každé číslo je na tabuli najviac raz.
Označme p rodiča kladného racionálneho čísla b, kde b je rôzne od 1. Môže nastať jedna z dvoch možností:

- $b = p + 1$, potom $p = b - 1$.
- $b = \dfrac{p}{p+1}$, potom $p = \dfrac{b}{1-b}$.

Číslo b má jednoznačne určeného rodiča, keďže práve jedno z čísel $b-1$ a $\dfrac{b}{1-b}$ je kladné (rozmyslite si prečo).
Teda každé číslo sa na tabuli nachádza najviac raz.
Teraz chceme ukázať, že 1 je predkom každého kladného racionálneho čísla okrem seba (inak povedané, každé racionálne číslo je na tabuli aspoň raz, keďže je potomkom 1). Nech $b = \dfrac{c}{d}$ kde $c, d \in \mathbb{N}$, a najväčší spoločný deliteľ čísel c a d je 1. Potom $p = \dfrac{c-d}{d}$ ak $c > d$ a $p = \dfrac{c}{d-c}$ ak $c < d$. Vidíme že súčet čitateľa a menovateľa sa pri prechode k rodičovi (predkovi) vždy zmenší. A naviac predok čísla b je tiež kladné racionálne číslo. Preto sa vždy dostaneme k súčtu čitateľa a menovateľa 2 (1+1), teda k číslu 1. Ukázali sme, že každý kladný zlomok má predka 1, takže každé kladné racionálne číslo je potomkom 1. Preto je na tabuli napísané každé kladné racionálne číslo práve raz.

Úloha č. 9: *Edo si pod vankúšom schováva nekonečný štvorčekový papier. Jednej noci ho navštívila zubná víla Stanka a zafarbila každý štvorček na tomto papieri jednou z jej piatich obľúbených farieb*[1]*. Edo si ráno všimol, že každý kríž z piatich štvorčekov (ako na obrázku) obsahuje každú farbu práve raz. Vzápätí si uvedomil, že potom aj každý obdĺžnik 5×1 musí obsahovať každú farbu práve raz. Prečo je to tak?*



Riešenie: (opravoval Hago a Lietadlo)
V zadaní sa spomína nekonečný štvorčekový papier a to nám napovedá, že príklad nepôjde vyriešiť bez nejakého všeobecného prístupu, resp. postupu. Čo by nám pri takomto príklade mohlo napadnúť je, že ho budeme dokazovať sporom. Predpokladajme teda, že na štvorčekovom papieri existuje obdĺžnik 5×1, ktorého nejaké dve políčka sú rovnakej farby.

[1] cyklaménová, lososová, fuchsiová, búrková modrá, biela

Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme zvoliť nejaké označenie tohto obdĺžnika, ktorý má dve políčka rovnakej farby. Nech je to obdĺžnik $A2$–$E2$ (viď obrázok). Farby v kríži so stredom v $C2$ označíme 1, 2, 3, 4 a 5. O týchto farbách vieme, že sú rôzne. Pole $A2$ nemôže mať farbu 2 ani 3, kvôli krížu so stredom $B2$. Symetricky pre políčko $E2$ platí, že nie je farby 3 ani 4.

	A	B	C	D	E
1			1		
2		2	3	4	
3			5		

Na tomto mieste musíme v našom ďalšom postupe rozlíšiť dva prípady.

a) Aspoň jedno z políčok $A2$, $E2$ má jednu z farieb 1 alebo 5.

Vďaka symetrickosti môžeme bez ujmy na všeobecnosti povedať, že políčko $A2$ bude farby 1. V kríži so stredom $B2$ chýbajú farby 4 a 5. Farba 5 nemôže byť na poli $B3$, pretože pole $C3$ je farby 5 a kríž so stredom v $C3$ by obsahoval dvakrát farbu 5. Políčko $B3$ bude teda farby 4 a políčko $B1$ bude farby 5.

	A	B	C	D	E
1		5	1		
2	1	2	3	4	
3		4	5		

Krížu so stredom v $D2$ chýba farba 5. Tá ale nemôže byť na políčku $D1$ (nevyhovuje pre kríž so stredom v $C1$) ani na políčku $D3$ (nevyhovuje pre kríž so stredom v $C3$) ostáva už len políčko $E2$, ale to nemôže mať farbu 5 preto, že potom by obdĺžnik $A2$–$E2$ mal päť rôznych farieb. V kríži so stredom v $D4$ teda nemá kde byť farba 5, čo je spor.

b) Žiadne z polí $A2$, $E2$ nemá farbu 1 ani 5

Takže $A2$ nemôže byť farby 1, 5 a ani 2, 3 kvôli krížu so stredom v $B2$. Musí byť farby 4. Symetricky $E2$ je farby 2.

	A	B	C	D	E
1			1		
2	4	2	3	4	2
3			5		

V kríži so stredom v $B2$ môže byť chýbajúca farba 5 jedine na políčku $B1$. Rovnako ako v prípade a) nie je v kríži so stredom v $D2$ miesto pre farbu 5. A to je spor.

V oboch prípadoch sme prišli k sporu so zadaním, takže náš predpoklad, že na štvorčekovom papieri existuje obdĺžnik 5×1, ktorého nejaké dve políčka sú rovnakej farby, musí byť mylný. Tým pádom je pravdivé tvrdenie, ktoré sme mali dokázať.

Úloha č. 10: *Filip písal na tabuľu pod seba čísla. Prvé a druhé číslo bolo* 1*. Každé ďalšie si vyrátal sčítaním dvoch predošlých a pripočítaním čísla* 1*. Prizerajúci sa Matúš sa zamyslel nad nasledujúcou otázkou: aké sú všetky dvojice prirodzených čísel* (n, m) *také, že* n*-té číslo na tabuli je tvaru* $2^m - 1$*?*

Riešenie: (opravoval Matúš a Miki)

Nebudeme leniví a vypíšeme si prvých zopár členov:

$$(1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 25,\ 41,\ 67,\ 109,\ \dots).$$

Zisťovať, či čísla sú v takom zvláštnom tvare, že $2^m - 1$, sa môže zdať trošku zvrhlé, tak čo keby sme spravili takú malú kozmetickú úpravu a všade pripočítali 1? Potom budeme zisťovať, či sú čísla mocninami dvojky, čo znie už trošku krajšie. Postupnosť sa zmení na

$$(2,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 26,\ 42,\ 68,\ 110,\ \dots).$$

Ďalej sa budeme baviť len o tejto postupnosti. Už medzi prvými členmi vidíme nejaké riešenia (konkrétne $2, 4$ aj 16 sú mocninami 2). To nás motivuje vypísať si ešte viac členov, veď možno si všimneme nejaké pravidlo, podľa ktorého sa nám v postupnosti objavujú mocniny dvojky. Ale opak je pravdou. V najbližších veľa členoch, ktoré sme s nadšením vypísali, už nevidno žiadne mocniny 2. Navyše ďalej už nás čakajú fakt veľké čísla. Skúsme si to nejako zjednodušiť. Čo keby sme miesto členov postupnosti písali len zvyšky po delení nejakým číslom? S dvojkou by to nebolo veľmi zaujímavé, tak skúsme zvyšky po delení tromi. Dostaneme

$$(2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ \dots).$$

Ďalej už sa to musí opakovať, pretože každý člen je jednoznačne určený dvoma predošlými. Zopakovala sa rovnaká dvojica a od nej to musí pokračovať tak ako predtým. Ľahko vidno, že perióda je $2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0$. Takže každé štvrté číslo v postupnosti je deliteľné tromi. Pričom mocniny 2 nie sú deliteľné tromi. Preto členy s poradovým číslom $4l$ pre $l \in \mathbb{N}$ nás už nemusia zaujímať.
Ak je nejaké ďalšie číslo (väčšie ako 32) v postupnosti mocninou 2, tak musí byť deliteľné $32 = 2^5$. Pozrime sa teraz na zvyšky po delení 32:

$$(2,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 26,\ 10,\ 4,\ 14,\ 18,\ 0,\ 18,\ 18,\ 4,\ 22,\ 26,\ 16,\ 10,\ 26,\ 4,\ 30,\ 2,\ 0,\ \dots).$$

Po tejto sekvencii nasleduje opäť $2, 2$, čo z rovnakého dôvodu ako predtým značí, že sa táto sekvencia bude stále cyklicky opakovať. Všimnime si, ktoré členy sú deliteľné 32. Z horeuvedenej postupnosti vidno, že to bude každý dvanásty (tie s poradovým číslom $12k$ pre $k \in \mathbb{N}$). O týchto členoch však už vieme, že sú deliteľné 3, teda určite nebudú mocninami 2. Jediní kandidáti sú teda čísla v postupnosti menšie ako 32. Vidno, že postupnosť je neklesajúca. Preto stačí skontrolovať postupnosť len po prvý člen väčší ako 32, čo sme urobili už na začiatku. Jediné riešenia sú dvojice $(1,1),\ (2,1),\ (3,2),\ (6,4)$.

Komentár: Viacerí ste prišli na to, že zadaná postupnosť má niečo spoločné s Fibonacciho postupnosťou a problém sa dá previesť na zisťovanie, kedy je Fibonacciho číslo mocninou 2. Oceňujeme Váš zápal pre túto postupnosť a využívanie rôznych vzťahov, viet, či identít pre túto postupnosť, najmä Carmichaelovu vetu, ktorá hovorí, že od dvanásteho je každý ďalší člen Fibonacciho postupnosti deliteľný nejakým „novým“ prvočíslom. Pričom „novým“ myslíme, že žiaden predošlý člen ním deliteľný nebol. Na počudovanie však nebolo potrebné vyťahovať príliš silné zbrane.

Úloha č. 11: *Podmnožina prirodzených čísel S sa nazýva* čarovná, *ak pre každé dva rôzne prvky i, j z tejto podmnožiny platí, že do množiny S patrí aj číslo*

$$\frac{i+j}{\mathrm{NSD}(i,j)}.$$

Nájdite všetky čarovné množiny. Poznámka: $\mathrm{NSD}(i,j)$ *označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel i, j.*

Riešenie: (opravoval CD)
Pre jednoduchosť budeme značiť $\mathrm{NSD}(a,b)$ ako (a,b). Pozrime sa najskôr na niekoľko okrajových prípadov. Očividne sú riešením množiny $S = \emptyset$ a $S = \{a\}\ \forall a \in \mathbb{N}$, pretože podmienka zo zadania platí pre každé dva rôzne prvky. Odteraz môžeme predpokladať, že v S sú aspoň 2 prvky. Nasledujúci krok je trocha trikový. Bolo treba rozobrať nasledujúce dve možnosti podľa súdeliteľnosti čísel v množine S:

- $\forall a, b \in S : a \neq b \Rightarrow (a,b) > 1$. Tento prípad rozoberieme ešte ďalej, podľa počtu prvkov množiny S.
  1. S má aspoň dva prvky. Dva najmenšie prvky v množine S si označíme a, b. Predpokladajme BUNV $a < b$. Z podmienky zo zadania vieme, že $\frac{a+b}{(a,b)} \in S$. Keďže $(a,b) \geq 2$, tak $\frac{a+b}{(a,b)} \leq \frac{a+b}{2} < b$. Jediné číslo menšie ako b v množine S je a. Z toho dostávame $\frac{a+b}{(a,b)} = a \Rightarrow a+b = a(a,b)$. Z deliteľnosti v tejto rovnici ďalej vyplýva $a|a \wedge a|a\cdot(a,b) \Rightarrow a|b \Rightarrow (a,b) = a$. Vyjadrime si teraz b pomocou a: $a + b = a\cdot(a,b) = a^2 \Rightarrow b = a^2 - a$. Mali sme ale podmienku, že $b > a$, čo platí pre $a \geq 3$. Dvojprvkové množiny vyhovujúce zadaniu teda budú mať tvar $S = \{a, a^2 - a\}\ \forall a \geq 3$ a ľahko sa dá overiť, že všetky skutočne vyhovujú.
  2. S má aspoň tri prvky. Tri najmenšie prvky v tejto množine si označíme a, b, c a BUNV $a < b < c$. Z predchádzajúcej časti už vieme, že $b = a^2 - a = a\cdot(a-1)$. Zo zadania vieme, že $\frac{a+c}{(a,c)} \in S$ a z rovnakej úpravy ako v predchádzajúcej časti dostaneme, že $\frac{a+c}{(a,c)} < c \Rightarrow \frac{a+c}{(a,c)} = a \vee \frac{a+c}{(a,c)} = b$. Ak $\frac{a+c}{(a,c)} = a$, tak pomocou už použitého postupu dostaneme $c = a^2 - a = b$, čo je spor, pretože $c > b$. Ostáva teda možnosť $\frac{a+c}{(a,c)} = b = a(a-1)$. Opäť použijeme rovnaký trik, $a|a \wedge a|a(a-1)(a,c) \Rightarrow a|c \Rightarrow (a,c) = a$. Po dosadení a vyjadrení c dostávame $c = a^3 - a^2 - a$. Potrebujeme ešte overiť tretiu podmienku zo zadania, a teda že $\frac{b+c}{(b,c)} \in S$. Využijeme vzťahy na ktoré sme prišli

$$\frac{b+c}{(b,c)} = \frac{a^3 - 2a}{(a(a-1), a(a^2 - a - 1))} = \frac{a^3 - 2a}{a} = a^2 - 2.$$

Využili sme, že $(a-1, a^2-a-1) = 1$, čo sa dá ukázať napríklad pomocou Euklidovho algoritmu[2]. Ak využijeme už známe vzťahy a niekoľko základných úprav, vieme ukázať $b < a^2 - 2 < c$, čo je spor s tým, že trojica a,b,c sú najmenšie čísla množiny S.

- $\exists a, b \in S : a \neq b \wedge (a, b) = 1$. Ak existujú takéto dve čísla, tak nemôžu byť obe párne, rozmyslite si prečo. BUNV $2 \nmid a$. Vieme, že $a, b \in S$ a teda pre nich môžeme použiť podmienku zo zadania $\frac{a+b}{(a,b)} \in S \Rightarrow a+b \in S$. Rovnako pre dvojicu $a, a+b$ $\frac{a+(a+b)}{(a,(a+b))} \in S \Rightarrow 2a+b \in S$, rovnako $\frac{b+(2a+b)}{(b,(2a+b))} \in S \Rightarrow 2a+2b \in S$. V poslednom sme využili, že $(b, (2a+b)) = 0$, čo platí pretože $(a, b) = 1 \wedge (a, 2) = 1$. Načo nám to je všetko dobré?

  Vyskúšame teraz
  $$\frac{(a+b)+(2a+2b)}{((a+b),(2a+2b))} \in S \Rightarrow 3 \in S.$$

  Podobne sa dá ukázať o ľubovoľnom prirodzenom čísle, že patrí do S. Formálne to môžeme dokazovať pomocou indukcie, napríklad pomocou rozdelenia čísel na čísla tvaru $4k$, $4k+1$, $4k+2$ a $4k+3$. V prvom kroku indukcie by sme ukázali, že čísla $3, 4, 5, 6 \in S$. V druhom kroku by sme ukázali, že ak $a \in S$, tak aj $a+4 \in S$. Konkrétny zápis už necháme na čitateľa.

  Ostáva doriešiť čísla 1 a 2. Pozrime sa na podmienku v zadaní pre čísla x,y. Môžeme si ich zapísať ako $x = di$ a $y = dj$, kde $d = (x, y)$ a $i, j \in \mathbb{N}$. Potom $\frac{x+y}{(x,y)} = \frac{di+dj}{d} = i + j \geq 3$, pretože $i, j \in \mathbb{N}$ a zároveň $i \neq j$. Čísla 1 a 2 môžu byť aj nebyť v množine S — kvôli nim spor so zadaním nevznikne. V tejto vetve teda dostávame riešenia $S = \mathbb{N}$, $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $S = \mathbb{N} \setminus \{2\}$ a $S = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

Všetky riešenia úlohy sú teda množiny $S = \emptyset$, $S = \{a\}\ \forall a \in \mathbb{N}$, $S = \{a, a^2 - a\}\ \forall a \geq 3$, $S = \mathbb{N}$, $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $S = \mathbb{N} \setminus \{2\}$ a $S = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

[2]Tento algoritmus využíva, že $(a, b) = (a, b - a)$. Opakovaným dosadzovaním do tohoto vzorca sa dostaneme k tvaru, z ktorého už (a, b) vieme vyjadriť.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Krajčiová Katarína	2.	GAlej KE	4	1		9	9	9	9	9			45	45
1.	Vodička Martin	4.	GAlej KE	10	12			9	9	9	9	9		45	45
3.	Hanzely Filip	4.	GAP SB	10	7			9	9	9	9	8		44	44
3.	Kossaczká Marta	4.	Gamča BA	10	8			9	9	9	9	8		44	44
3.	Psota Miroslav	3.	GHlin ZA	7	2		9	9	6	9	9	8		44	44
3.	Šafin Jakub	4.	GPH MI	8	6			9	9	9	9	8		44	44
7.	Lipovský Mário	3.	GJH BA	5	1		9	9	7	9	9			43	43
7.	Puza Marko	3.	GPoš KE	5	1		7	9	9	9	9			43	43
9.	Bui Truc Lam Michal	2.	Gamča BA	4	3			9	6	8	9	9		41	41
9.	Kováčová Barbora	3.	ŠPMNDG BA	5	0	9	6	9	9	8				41	41
9.	Prívozník Matej	3.	GJH BA	7	2		9	9	9	9		5		41	41
9.	Šimková Ľudmila	3.	GPár NR	7	2		9	9	9	9		5		41	41
9.	Šimsa Štěpán	4.	Litoměřice ČR	8	9			7	9	9	9	7		41	41
14.	Rapavý Martin	3.	GAlej KE	5	0	9	6	9	7	9				40	40
14.	Sučík Samuel	2.	GJH BA	4	2		9	9	5	8	9			40	40
16.	Bohdal Ondrej	2.	GJH BA	4	0	9	9	9		9	2			38	38
16.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	Gamča BA	5	3			9	9	9	9	2		38	38
18.	Hrivová Ivona	3.	GVO ZA	7	2		7	9	4	8	9			37	37
18.	Pokrývka Filip	3.	G Bánovce	7	2		9	7	9	8		4		37	37
20.	Horváth Samuel	3.	GPár NR	6	1		9	9	9	9				36	36
20.	Jurina Šimon	3.	Gamča BA	6	2			9	9	9	9			36	36
20.	Le Anh Dung	3.	Tachov ČR	5	4			7	9	8	9	3		36	36
20.	Stankovič Miroslav	3.	GPoš KE	7	7			9	9	9	9			36	36
24.	Dargaj Jakub	3.	GPoš KE	4	0	9	7	9		9	1			35	35
24.	Korbela Michal	3.	G Bánovce	7	2		9	7	9	8		2		35	35
24.	Prešinská Kristína	2.	GPár NR	4	0	9	7	7	4	8				35	35
24.	Svoboda Josef	4.	Frýdlant ČR	7	5			9	9	8	9	0		35	35
24.	Tomašec Samuel	3.	GVar ZA	5	0	9	9	9		8				35	35
29.	Gafurov Askar	4.	Gamča BA	7	3			9	7	9	9			34	34
29.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3	0	9	9	2	6	8				34	34
29.	Petrucha Jaroslav	4.	GMet BA	9	3			9	7	9	9			34	34
29.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2	1		4	7	6	8	9			34	34
33.	Bafrnec Matúš	2.	GPár NR	3	0	9	7	7	7	3				33	33
33.	Lâm Tuân Dûng	2.	GJH BA	4	0	9	9	7		8				33	33
33.	Trembecký Richard	4.	GAlej KE	5	1		8	9	7	9				33	33
36.	Benešová Katarína	4.	ŠPMNDG BA	8	2		7	9	7	9				32	32
36.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	3	0	9	7	7		9				32	32
36.	Murin Martin	2.	GJH BA	4	0	7	9	7			9			32	32
36.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	2	0	9	9	7		7				32	32
36.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3	0	9	6	9		8				32	32
41.	Kobák Michal	3.	Gamča BA	4	1		9	9	4	9				31	31
42.	Dráček František	2.	GŠkol PB	4	0	9	6	8		7				30	30
42.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	3	0	9	9	2	7	2		3		30	30
44.	Kováčová Mária	2.	GsvCM NR	3	0	9	2	9	2	6				28	28
45.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	1	0	6	9	8	4					27	27
45.	Matejovičová Tatiana	4.	Gamča BA	7	3			9	9	9				27	27
45.	Nepšinská Silvia	2.	GJCh BR	4	0	9	7		1	9	1	1		27	27
45.	Nociarová Jela	4.	GBST LC	7	1	9	9	9		9				27	27
49.	Daniel Mark	3.	GPár NR	6	1		7	8	2	9				26	26
49.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	1	0	9	4			8	5			26	26
51.	Buráň Michal	4.	G JAK CR	4	0	6	6	8	5					25	25
51.	Krakovská Hana	3.	Gamča BA	6	1		6	9		9	1			25	25

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
51.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3	0	4	5	7		9				25	25
51.	Macko Vladimír	4.	GĽŠ ZV	8	6			7	9	9				25	25
51.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	3	0	9	7	7		2				25	25
56.	Hlaváčik Matúš	4.	GAlej KE	8	3			9	6	9				24	24
56.	Steinhauser Václav	-1.	G Dacice	-1	0	9	6	1		8				24	24
58.	Ječmenová Andrea	3.	GVO ZA	6	1		6	2	7	8				23	23
58.	Králik Matej	2.	GJH BA	4	0	4	6	5		8				23	23
58.	Mores Martin	3.	GVar ZA	5	0	1	6	8		8				23	23
58.	Santrová Michaela	2.	GMH Trstená	4	0	9	6			8				23	23
58.	Žárský Jan	2.	Kopřivnice ČR	4	0	9	6		7	1				23	23
63.	Labjaková Gabriela	2.	GMH Trstená	3	0	4	6	9	3					22	22
64.	Ivan Lukáš	3.	GJH BA	4	0		5		5	8	1			19	19
65.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3	0						9	9		18	18
65.	Bačinská Irena	3.	ŠPMNDG BA	4	1		9	9						18	18
65.	Smolík Milan	4.	GJH BA	7	1		2		7	9				18	18
68.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	3	0	4	7		1	1	0	4		17	17
68.	Magyarová Zuzana	3.	GBST LC	6	1		5	7	5					17	17
68.	Polovka Maroš	3.	GKuk PP	4	0	3	2	8	4					17	17
71.	Rizman Daniel	3.	GVar ZA	4	0	7	2			7				16	16
71.	Santer Martin	4.	GMH Trstená	7	0	9				7				16	16
73.	Kňaze Adam	2.	GJCh BR	4	0	9	4			1	1			15	15
73.	Mikulec Jaromír	2.	GsvJ NM	4	0	8	6	0		1				15	15
73.	Šandalová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	5	0	7			1	7				15	15
76.	Dendis Tomáš	2.	BiG Sučany	2	0	4		8		2				14	14
77.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3	0	5				7	1			13	13
77.	Bieliková Michaela	3.	GVM SE	5	0	4	3		0	6				13	13
77.	Straková Valentína	3.	GVM SE	5	0	4	5			4				13	13
77.	Štěpánek Martin	2.	Příbor ČR	4	0	5	6			1	1			13	13
81.	Oravec Matej	2.	GVar ZA	3	0	7	2		1	1	0	1		12	12
82.	Halamová Mária	2.	GVO ZA	3	0	4	6			1				11	11
83.	Roštár Marek	4.	1SG BA	5	0	9			1					10	10
83.	Veselá Simona	2.	GJH BA	2	0	4				6				10	10
85.	Blišáková Katarína	3.	SŠS NR	3	0	4	3		1	1		0		9	9
85.	Kociánová Barbora	4.	GZlin	4	0		7			2				9	9
87.	Ivanov Marián	4.	GJH BA	5	0					8				8	8
88.	Šromeková Karolína	3.	ŠPMNDG BA	6	0		7							7	7
89.	Klimkovič Anna-Mária	3.	ŠPMNDG BA	4	0	3			1	2				6	6
90.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	0		1			1				2	2
91.	Mikel Jan	4.	G Roznov	4	1									0	0
91.	Ondráš Ján	3.	Gamča BA	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Frankovská Zuzana	1.	Gamča BA	1	9	8	9		9	3			38
1.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	0	9	8	9	5	3	7			38
1.	Oravkin Eduard	1.	1SG BA	1	9	8	9	7	5	2			38
4.	Bodík Juro	1.	Gamča BA	1	9	8	9	3	7				36
5.	Fabšíková Nina	1.	1SG BA	1	9	8	9	4		4			34
5.	Halabrin Juraj	1.	GJH BA	1	9	8	9	4	4	4	1		34
5.	Choma Matej	1.	Gamča BA	1	9	9	9	4	3	2			34
8.	Murín Marek	1.	GJH BA	1	9	8	9		4	3			33
9.	Lihotský Samuel	1.	1SG BA	1	9	8	9	5	1				32
9.	Strakáčová Natália	1.	Gamča BA	1	9	9	9	5					32
11.	Ďuratná Petra	2.	ŠPMNDG BA	3			9	4	4	6	8		31
11.	Gazdíková Ema Mária	1.	ŠPMNDG BA	1		8	9	4	4	6			31

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
11.	Petráš Peter Pavel Arthur	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	2	1	2	0		31
11.	Pilňan Branislav	2.	GJH BA	2		9	6		9	7			31
15.	Trenčanská Tereza	1.	Gamča BA	1	9	8	9		3	1			30
16.	Páleník Michal	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9		4	4	3			29
16.	Suchý Daniel	2.	Gamča BA	2		8	9		4		8		29
16.	Szalay Erik	3.	ŠPMNDG BA	3			1	4	9	6	9		29
19.	Pieš Adrián	3.	ŠPMNDG BA	3			9	6	5	7	1		28
20.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	2					9	9	7		25
21.	Tóthová Andrea	1.	ŠPMNDG BA	1	9		9	0	5		1		24
22.	Camara Anna	2.	GMet BA	2		8	2	5			8		23
23.	Sůra Tomáš	1.	1SG BA	1	9	8		5					22
23.	Velich Tomáš	1.	GJH BA	1	6	9	5	0	2		0		22
23.	Zeman Matúš	1.	1SG BA	1	9	8	3		1	1			22
26.	Veselá Simona	2.	GJH BA	2	9	8	9		4				21
27.	Martinková Sandra	2.	GJH BA	2	9	8	9		3				20
28.	Hrdina Jakub	3.	GJH BA	3			9			7			16
28.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3					4	5	7		16
30.	Híveš Zdenko	3.	1SG BA	3		9		2	2	2	0		6
31.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	9	9	2			1			3

kategória ALFA, západ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
1.	Tódová Lucia	1.	GPár NR	1	9	9	9	5	9	9			45
2.	Bafrnec Matúš	2.	GPár NR	3			9	8	9	7	7		40
2.	Konček Marián	2.	G1.máj MA	2		9	9	4	9	9			40
4.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	3			9	7	9	7	7		39
5.	Gerberová Michaela	1.	G Bánovce	1	9	9	9	7	3	2			37
5.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	3			9	5	9	7	7		37
7.	Zachara Samuel	1.	PiarG TN	1	9	8	9		5	1			32
8.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2		9	8	7	4				28
9.	Kašša Ladislav	1.	G Šamorín	1	9	8	1	3	4				25
10.	Kováčová Mária	2.	GsvCM NR	3				4	9	2	9		24
10.	Štefkovič Ján	3.	G Bánovce	3			9	7	2	6	0		24
12.	Escherová Eva	1.	G Bánovce	1	9	9	2		1				21
13.	Blišáková Katarína	3.	SŠS NR	3			9	4	4	3			20
13.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3					9	9	2		20
13.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	3					9	9	2		20

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**$\sum$**
1.	Tesař Emanuel	1.	GBST LC	1	9	8	9		9	9			44
2.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3			9	9	9	9	7		43
3.	Branišová Eva	1.	GVO ZA	1	9	9	9	6	7				40
3.	Kulla Filip	1.	BiG Sučany	1	9	9	9	6	7				40
5.	Gašpárek Miroslav	3.	SG ZA	3			9	1	6	5	8		29
6.	Pavčík Richard	1.	GJGT BB	1	9	8	9	0	1				27
7.	Hradňanská Petra	2.	GVar ZA	2	9	9	9	5	1	1	0		25
7.	Janiga Martin	2.	GPOH DK	2		8	9	6	0	2			25
7.	Šeligová Kristína	2.	GsvFA ZA	2		9	9	2	4	1			25
7.	Včelková Veronika	2.	GPOH DK	2		8	9	6	0	2	0		25
11.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	3			9	3	4	7			23
11.	Kudelčíková Martina	1.	GVO ZA	1	9	5	6		1	2			23
13.	Benčová Katarína	2.	GMH Trstená	2		8	9	0	1	2			20

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
13.	Roch Oliver	2.	G Bytca	2		8	9	1	0	2			20
13.	Sanigová Lucia	2.	GVar ZA	2		9	9		2				20
16.	Jančár Ján	2.	GVar ZA	2		8	1	4	3	3	1		19
16.	Labjaková Gabriela	2.	GMH Trstená	3					4	6	9		19
18.	Franko Marián	2.	GPOH DK	2		8	1	6	0	2			17
19.	Dendis Tomáš	2.	BiG Sučany	2					4		8		12
20.	Bátrna Jozef	2.	G Bytca	2		8	2						10
20.	Halamová Mária	2.	GVO ZA	3					4	6			10
22.	Oravec Matej	2.	GVar ZA	3					7	2			9
22.	Paišová Dominika	2.	G Bytca	2			9						9
24.	Baránek Martin	2.	GVar ZA	2		1	2	1	0	2	0		6
25.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3					5				5
26.	Michálek Tomáš	2.	G Bytca	2					1				1
27.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3									0
27.	Sokolová Nikola	2.	GHlin ZA	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Mišlanová Kristína	1.	GAlej KE	1	9	9	9		9	9			45
1.	Semanišiová Žaneta	1.	GAlej KE	1	9	9	9		9	9			45
3.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	1	9	8	9	8	9	5			43
4.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	1	9	8	9	7	9	4			42
5.	Kurimský Ján	1.	GsvM PO	1	9	9	9	4	4				35
5.	Lenárt Patrik	1.	GPM KE	1		8	9	4	8	6			35
7.	Feciskaninová Soňa	1.	GAlej KE	1	9	9	9			3			30
8.	Lukáč Jakub	3.	GKuk PP	3			9	4	4	2	9		28
9.	Bilý Ondrej	1.	GLS HE	1	9		9		1	1			20
10.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3					4				4

kategória ALFA, zahraničie

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Žídek Matěj	1.	Frýdlant ČR	1	9	8	9	7	9		1		42
2.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	1	9	9			6	9	8		41
2.	Steinhauser Václav	-1.	G Dacice	-1	9	8	9	4	9	6	1		41
4.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3			9		9	6	9		33
5.	Kopfová Lenka	-2.	G Slez ČR	-2	9	8	9		5				31
6.	Krchňák Václav	1.	Brno ČR	1	9	9	4	4	4	4			30
7.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2						4	7		11
8.	Gajdušek Pavel	1.	G Ost - Por	1									0