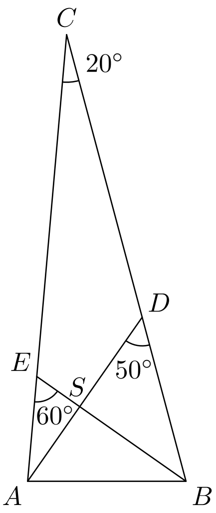
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2012/2013

Úloha č. 1: *V trojuholníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 20°$. Na stranách BC, CA sú body D, E umiestnené tak, že $|\sphericalangle ADB| = 50°$ a $|\sphericalangle AEB| = 60°$. Úsečky AD a BE sa pretínajú v bode S. Zistite veľkosť uhla ASB.*



Riešenie: (opravovala Betka)
Začneme tým, že si načrtneme obrázok podľa zadania. Teraz postupne doplníme tie uhly, ktoré vieme vypočítať.
Vieme, že uhly ADB a ADC sú susedné, a teda ich súčet je 180°. Keďže $|\sphericalangle ADB| = 50°$,

$$|\sphericalangle ADC| = 180° - 50° = 130°.$$

Rovnako aj uhly AEB a BEC sú susedné, preto

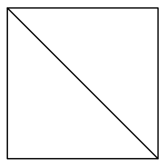
$$|\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle AEB| = 180° - 60° = 120°.$$

V štvoruholníku $ESDC$ poznáme tri uhly, a keďže súčet uhlov v štvoruholníku je 360°, uhol ESD dopočítame ľahko:

$$|\sphericalangle ESD| = 360° - |\sphericalangle SEC| - |\sphericalangle ECD| - |\sphericalangle SDC| = 360° - 120° - 20° - 130° = 90°.$$

Uhly ASB a ESD sú vrcholové, a teda platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ESD| = 90°$.

Úloha č. 2: *Koľko najmenej zápaliek by vám stačilo k zostrojeniu predmetu, ktorý vyzerá spredu (nárysu), zboku (bokorysu) aj zhora (pôdorysu) tak, ako je nakreslené na obrázku? Zápalky sa nesmú lámať. Nezabudnite zdôvodniť, prečo to s menej zápalkami nejde.*



Riešenie: (opravoval Filip Kubina)
Čo tak si to najskôr vyskúšať? Najprv nám napadajú riešenia s čoraz menej zápalkami, no čoskoro naša produktivita upadne. Ale naozaj sme našli ideálne riešenie? Okrem jeho nájdenia musíme dokázať, že je naozaj ideálne a neexistuje riešenie s menej zápalkami.
Už z pohľadu na jednu stranu nášho predmetu je jasné, že treba aspoň 5 zápaliek. Keby sme našli riešenie s 5 zápalkami, tak môžeme ísť rovno na poštu s riešením. No také riešenie nepoznáme. Asi neexistuje. Dokazujme silnejšie tvrdenie: treba ich aspoň 6.
Všimnime si, že okrem diagonálnych zápaliek máme na každom obrázku 2 vertikálne a 2 horizontálne zápalky ležiace na strane štvorca. Dokopy vidíme $3 \cdot 4 = 12$ hrán štvorcov. Pozor, nemusia to byť hrany kocky (ktorú tie štvorce tvoria pri rôznych pohľadoch) ani sa nemusia navzájom líšiť — jednu zápalku môžeme vidieť viackrát.
Zápalky môžeme dávať na hrany a uhlopriečky kocky. Inde ich dať nemôžeme, lebo by sme ich videli tam, kde nesmú byť. Uvažujme, ako sa prejavia jednotlivé možnosti pri rôznych pohľadoch. Zápalka na telesovej uhlopriečke kocky sa na hrane štvorcov neobjaví pri žiadnom pohľade. Zápalka, ktorá leží na hrane kocky, sa objaví na hrane štvorcov maximálne na dvoch pohľadoch, na treťom ju (ne)vidíme ako bod. Zápalka na stenovej uhlopriečke kocky sa objaví na hrane štvorcov tiež maximálne na dvoch pohľadoch, na treťom ju uvidíme ako uhlopriečku. Slovo „maximálne“ spomíname preto, lebo danú zápalku môže zakrývať iná a preto to môže byť menej. Čiže na videnie 12 hrán budeme potrebovať minimálne 6 zápaliek. Tvrdenie je dokázané. Ale dá sa to? A čo tie uhlopriečky?

Nájdime riešenie a máme pokoj: pre každý pohľad položíme zápalku na prednú a na zadnú stranu kocky po uhlopriečke zodpovedajúcej danému pohľadu. Dokopy 6 zápaliek. Zároveň sa budú tieto zápalky pri zvyšných pohľadoch tváriť ako hrany a uvidíme to, čo treba. Premyslite si. Riešenie je úplné. A bonus: využívame iba stenové uhlopriečky, čiže stačia nám rovnako dlhé zápalky.

Úloha č. 3: *Majme štvorec $ABCD$. Nad stranou CD zostrojme rovnostranný trojuholník DCE (bod E leží mimo štvorca $ABCD$). Nad jeho stranou CE zostrojme ďalší rovnostranný trojuholník ECF. Teraz zostrojme rovnoramenný trojuholník CGF s pravým uhlom pri vrchole F (tak, aby sa posledné dva trojuholníky neprekrývali). Pokračujeme rovnoramenným trojuholníkom CGH s pravým uhlom pri vrchole G. Ležia A, B a H na jednej priamke? Svoju odpoveď poriadne zdôvodnite.*

Riešenie: (opravoval Linduš a Kaťa)
(Podľa *Mateja Žídeka.*)
To, že body A, B, H ležia na jednej priamke, znamená, že uhol ABH má veľkosť $180°$. Platí $|\sphericalangle ABH| = |\sphericalangle CBH| + |\sphericalangle ABC|$ a uhol ABC má veľkosť $90°$, takže na to, aby body A, B, H ležali na jednej priamke stačí, aby mal uhol CBH veľkosť $90°$.
Označíme si $|CD|$ písmenom a. Trojuholníky DCE a CFE sú rovnostranné, takže musí platiť $a = |CE| = |CF|$ a všetky ich vnútorné uhly majú veľkosť $60°$. Trojuholník CGF je rovnoramenný a pravouhlý, zhodné strany teda musia byť CF a FG, pretože v pravouhlom trojuholníku môžu byť zhodné len odvesny, nie odvesna s preponou. Takže platí $|FG| = |CF| = a$. Pomocou Pytagorovej vety dopočítame veľkosť tretej strany $|CG| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$
Rovnako v rovnoramennom pravouhlom trojuholníku CHG platí $|CG| = |GH| = \sqrt{2}a$ a pomocou Pytagorovej vety vypočítame $|CH| = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$.
Uhly FCG, FGC, GCH a CGH majú všetky veľkosť $45°$, pretože sú v rovnoramenných trojuholníkoch, kde uhol oproti základni má $90°$, takže uhly pri základni musia byť $(180° - 90°)/2 = 45°$. Dopočítame $|\sphericalangle BCH| = 360° - 90° - 60° - 60° - 45° - 45° = 60°$. (Rozmyslite si prečo.)
Zostrojíme bod I ležiaci v strede úsečky CH, takže $|CI| = |HI| = |CH|/2 = a$. Trojuholník BIC má dve strany (BC a CI) dĺžky a, musí byť teda aspoň rovnoramenný. Uhol, ktorý tieto jeho ramená zvierajú je $60°$, oba ostatné uhly sú teda $(180° - 60°)/2 = 60°$. Takže všetky uhly v trojuholníku BCI sú $60°$, je teda rovnostranný. To znamená, že všetky jeho strany sú zhodné — dĺžky a. Z toho vyplýva, že trojuholník BHI je rovnoramenný, pretože jeho strany BI a HI majú obe dĺžku a. Uhol BIH musí mať veľkosť $180° - |\sphericalangle BIC| = 120°$, takže $|\sphericalangle IBH| = (180° - 120°)/2 = 30°$. Platí teda $|\sphericalangle CBH| = |\sphericalangle CBI| + |\sphericalangle IBH| = 60° + 30° = 90°$.
Takže sme dokázali, že uhol CBH je pravý, teda body A, B, H ležia na jednej priamke.

Úloha č. 4: *V priestore je daná rovina α a bod A, ktorý v nej neleží. Zostrojte rovinu β rovnobežnú s rovinou α tak, aby v nej ležal bod A. Použiť môžete:*

- *kružidlo — ak mu zadáte rovinu, bod v nej a polomer, tak zostrojí kružnicu v danej rovine, so stredom v danom bode a s daným polomerom,*
- *gulidlo — ak mu zadáte bod a polomer, tak zostrojí guľu so stredom v danom bode a s daným polomerom,*
- *pravítko — ak mu zadáte dva body, tak zostrojí priamku, ktorá prechádza oboma danými bodmi,*
- *rovnítko — ak mu zadáte tri body, ktoré neležia na jednej priamke, tak zostrojí rovinu v ktorej ležia všetky tri dané body.*

Postup musí mať konečný počet krokov.

Riešenie: (opravoval Juro a Mary)
Premyslime si najprv plán útoku. Ak chceme zostrojiť rovinu s danými vlastnosťami, nie je na zahodenie vedieť skonštruovať takú priamku p cez bod A, že je rovnobežná s nejakou priamkou ležiacou v α. Takáto priamka p totiž leží v hľadanej rovine β. (Teraz si dáme prestávku a poriadne si toto tvrdenie premyslíme.) Ak nájdeme návod na konštrukciu takej priamky p, obdobne vieme zostrojiť priamku q s rovnakými vlastnosťami, ale rôznu od p. Potom nám stačí zobrať body P a Q ležiace postupne na priamkach p a q, ktoré sú rôzne od A, a zostrojiť rovinu cez P, Q a A. Nájdime p a skončili sme.
Začneme tým, že zvolíme ľubovoľný bod S z roviny α a v tomto bode zostrojíme kružnicu l v rovine α s polomerom $|AS|$. Na tejto kružnici zvolíme bod X, pomocou pravítka zostrojíme priamku XS a nájdeme bod Y taký, že úsečka XY tvorí priemer kružnice l. Zostrojme ešte rovinu γ cez body A, X a Y, potom aj S leží v rovine γ. Všimnime si, že sme body zvolili tak múdro, že keď teraz narysujeme kružnicu k v rovine γ so stredom v S a polomerom $|AS|$, tak A, X aj Y na nej budú ležať. Ak Ti, milý čitateľ, až doteraz unikala pointa, vedz, že čochvíľa zazrieš to povestné svetlo na konci tunela v podobe spásonosného bodu Z. Dostaneme ho ako priesečník k a kružnice v rovine γ so stredom v X a polomerom $|AY|$. Takéto priesečníky sú dva a my si vyberieme ten, ktorý je v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku XY ako A. Vidíme, že body A, X, Y a Z ležia na kružnici a zároveň platí $|XZ| = |YA|$. Ľahko nahliadneme, že $XYAZ$, príp. $XYZA$ je lichobežník, teda priamka AZ je rovnobežná s priamkou XY a je našou hľadanou p.

Už sme vyhrali? Ešte nás môžu zradiť skeptické hlasy kričiace, že čo ak Z a A sú ten istý bod. To je práve vtedy, keď $|AX| = |AY|$. Pán Táles vraví, že trojuholník AXY je pravouhlý, a preto $|AY| = \sqrt{|XY|^2 - |AX|^2}$. Vidíme, že hodnota tohto výrazu sa mení v opačnom smere ako hodnota $|AX|$, čiže ak zvolíme nový bod X taký, že vzdialenosť $|AX|$ sa zmení, tak rovnosť $|AX| = |AY|$ prestane platiť a A a Z budú dva rôzne body. Úplne najhoršia vec, čo sa nám môže prihodiť, je, že takéto X zvoliť nevieme. Čiže pre všetky X ležiace na l by vzdialenosť $|AX|$ musela byť rovnaká, ale v takomto prípade vieme posunúť celú kružnicu l a máme pokoj.

Úloha č. 5: *Dokážte, že v každom mnohostene existujú dve steny s rovnakým počtom hrán.*

Riešenie: (opravoval Mojo)
Nech náš mnohosten má N stien. Stena v takomto mnohostene musí mať najmenej 3 hrany — pretože žiadny dvojuholník ani jednouholník neexistuje. A taktiež musí mať najviac $N-1$ hrán — inak by táto stena susedila s aspoň N stenami. Máme teda $N-3$ rôznych možných počtov hrán na stene. Čiže môžeme mať najviac $N-3$ stien, z ktorých žiadne dve nemajú rovnaký počet hrán. Keďže však náš mnohosten má N stien, tak v ňom musia existovať dve steny s rovnakým počtom hrán.

Poznámka: Za domácu úlohu dokážte, že dve steny môžu mať najviac jednu spoločnú hranu. Zistite, kde v riešení sme toto tvrdenie využili.

Úloha č. 6: *Koľko najviac stien môže mať teleso, ktoré vznikne spojením dvoch štvorstenov (štvorsteny môžu cez seba prechádzať)? Prečo ich nemôže byť viac?*

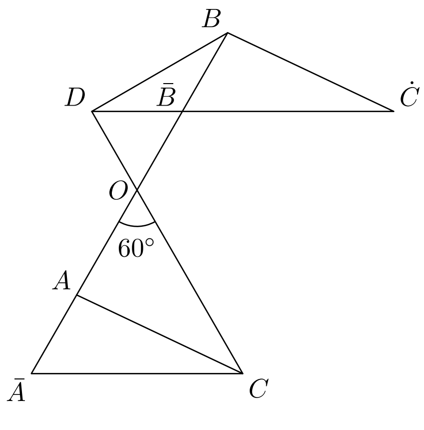
Riešenie: (opravoval Palo a Vero)
Spojením dvoch štvorstenov (podľa zadania) vznikne nejaký n-sten ($n \geq 4$). Chceme nájsť najväčšie možné n.
Po chvíľke hrania sa asi prídeme na to, že 24-sten sa takto dá zostrojiť. Stačí zobrať pravidelný štvorsten a jeho obraz v stredovej súmernosti podľa jeho stredu.[1] Viac ako 24-sten sa nám nedarí zostrojiť, tak poďme dokázať, že $n \leq 24$.
Každá stena nášho n-stena je časť niektorej steny jedného zo štvorstenov. Preto sa oplatí vybrať si jednu konkrétnu stenu jedného zo štvorstenov (označme ju S) a porozmýšľať, koľko najviac stien n-stena v nej môže ležať. Ukážeme, že je to najviac 3.
Poďme najprv zistiť, koľko najviac hrán n-stena môže ležať v stene S. Tieto hrany môžeme rozdeliť do dvoch skupín:

1. Hrany, ktoré sú časťou nejakej strany steny S — ukážeme, že tých je najviac 6: Stena S má 3 strany (stena štvorstena je vždy trojuholník), takže stačí ukázať, že na každej strane môžu byť najviac 2 hrany. Ak by boli na niektorej strane 3 hrany, konce strednej hrany by museli ležať v druhom štvorstene, ale vnútro tej hrany nie. To však nie je možné, keďže každý štvorsten je konvexný[2].

2. Hrany, ktoré sú prienikom steny S a niektorej steny druhého štvorstena — tie sú najviac 4, keďže štvorsten má 4 steny.

To je dokopy $6 + 4 = 10$ hrán. Každá z týchto hrán patrí práve jednej stene n-stena ležiacej v S — ak by patrila dvom, nebola by to hrana, keďže tieto steny ležia v jednej rovine. Každá stena musí mať aspoň 3 strany. Z toho všetkého vyplýva, že počet stien nášho n-stena ležiacich v S je maximálne 10/3, čiže 3.
Máme teda 2 štvorsteny, každý má 4 steny, a v každej stene sú najviac 3 steny nášho n-stena, preto $n \leq 2\cdot 4\cdot 3 = 24$.

Úloha č. 7: *Úsečky AB a CD majú dĺžku 1 a pretínajú sa v bode O. Uhol AOC má veľkosť $60°$. Dokážte, že $|AC| + |BD| \geq 1$.*



Riešenie: (opravoval JeFo)
Tak, zoberme si naše dve úsečky AB a CD a nech sa pretnú v bode O. Samozrejme, uvažujeme úplne najvšeobecnejší prípad (o rovnostrannosti ani chýru ani slychu). Zoberme úsečku AB a posuňme ju na úsečku $\bar{A}\bar{B}$ tak, aby opäť prechádzala pôvodným bodom O a dĺžka úsečky $\bar{A}O$ bola rovnaká ako dĺžka úsečky CO. Rovnako musí platiť, že aj dĺžka úsečky $\bar{B}O$ je rovnaká ako dĺžka úsečky DO. Teraz je jasné, že trojuholníky $\bar{A}OC$ a $DO\bar{B}$ sú (Prichádza test. Správne odpovede hľadaj na konci riešenia.) 1.) .... Prečo je tomu tak? To nie je vôbec ťažká otázka, tak ak neviem, tak porozmýšľam. Dve rovnaké strany a uhol správnej veľkosti, nemýlite sa.
Rozmýšľajme, aký je súčet dĺžok úsečiek $|\bar{A}C| + |\bar{B}D|$. Keďže trojuholníky $\bar{A}OC$ a $DO\bar{B}$ sú 1.) ... a $\bar{A}\bar{B}$ a CD majú dĺžku 1, tak súčet dĺžok úsečiek $|\bar{A}C| + |\bar{B}D|$ musí byť 2.) ....

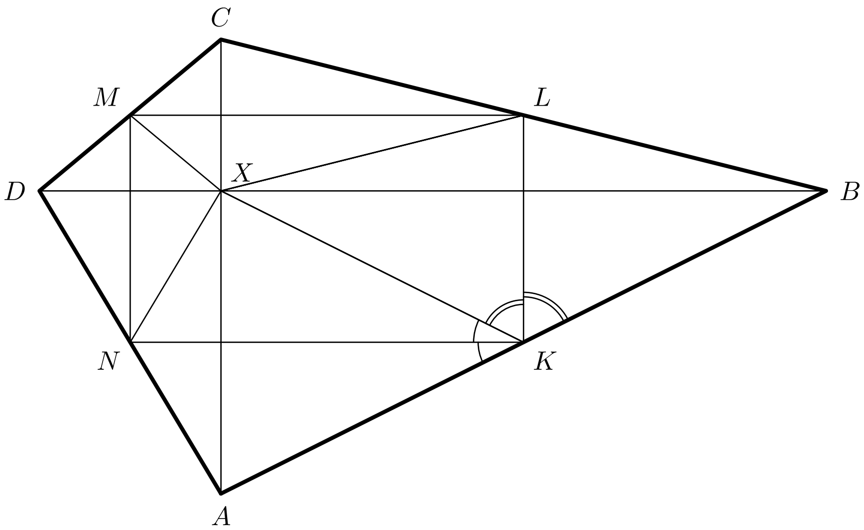
[1] Pekný obrázok je napríklad tu: `http://en.wikipedia.org/wiki/Stellated_octahedron`.
[2] *Konvexný* mnohosten je taký, že pre ľubovoľné body A, B ležiace v ňom aj celá úsečka AB leží v ňom. (Rovnako je definovaný aj konvexný mnohouholník, hoci ten sa zvykne definovať ako taký, ktorý má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°.)

A teraz sa pozrime na súčet dĺžok úsečiek $|AC|+|BD|$. Keď hovoríme o súčte, bolo by super, keby tie dve úsečky šli za sebou, potom by sme tú ich dĺžku aj videli. (Platí pravidlo: lepšie raz vidieť, ako dvakrát spočítať niečo, o čom nemám ani predstavu.) Tak sa pokúšame nejak „prisunúť“ úsečku AC k úsečke BD, prípadne môžeme aj naopak. Trošku skúšania a nazerania z rôznych uhlov, a vidíme, že ak posunieme trojuholník $\bar{A}C A$ tak, aby splynuli body $\bar{A}$ a $\bar{B}$ a body A a B. Môžeme sa spýtať, či určite vždy splynú, ale odpoveď je dopredu jasná, rozmýšľame, a áno pôvodne sme ich posunuli o rovnakú dĺžku, ktorú sme už nemenili, teda $|\bar{A}A| = |\bar{B}B|$.
Posunutím celého trojuholníka $\bar{A}CA$ sme vytvorili nový trojuholník $\bar{B}\dot{C}B$ ($\dot{C}$ je obraz bodu C) a (znejú fanfáry) body D, $\bar{B}$ a $\dot{C}$ ležia na 3.) .... Opäť je na mieste otázka: Prečo? Jasne, úsečky $D\bar{B}$ a $\bar{A}C$ boli rovnobežné a preto $|\sphericalangle A\bar{A}C| + |\sphericalangle D\bar{B}B| = |\sphericalangle B\bar{B}\dot{C}| + |\sphericalangle D\bar{B}B| = 180°$ (rovnobežky preťaté priamkou). A čo viac, dĺžka úsečky $D\dot{C}$ je 2.) ..., lebo $|\bar{A}C| + |\bar{B}D| = |\bar{B}\dot{C}| + |\bar{B}D| = 1$. Ako vieme, najkratšia spojnica dvoch bodov je úsečka, a tá medzi D a $\dot{C}$ má dĺžku 2.) .... Každá iná lomená čiara medzi D a $\dot{C}$ musí mať väčšiu dĺžku, a teda aj lomená čiara $DB\dot{C}$, ktorej dĺžka je rovnaká ako súčet dĺžok úsečiek AC a BD. Teda platí $|AC|+|BD| = |B\dot{C}|+|BD| \geq |D\bar{B}|+|\bar{B}\dot{C}| = 1$.

Riešenia testu:
1.) rovnostranné
2.) tiež 1
3.) jednej priamke

Úloha č. 8: *Máme konvexný štvoruholník z papiera. Kedy sa dá zložiť* pekne? Pekne *znamená, že existuje bod vnútri štvoruholníka, do ktorého keď zložíme vrcholy, dostaneme nový štvoruholník tvorený práve dvoma vrstvami papiera a to po celej jeho ploche.*

Riešenie: (opravoval Matúš)
Zoberme si nejaký konvexný štvoruholník, ktorý sa dá pekne zložiť, nech sa volá $ABCD$. Označme si X bod, kam zložíme vrcholy $ABCD$. Vrcholy zloženého štvoruholníka označme K, L, M, N, tak, ako na obrázku. Tieto body ležia na stranách pôvodného štvoruholníka, inak by sme museli mať trojitý prekryv. Skúsime o $ABCD$ zistiť niečo viac.



Pri skladaní štvoruholníka sa trojuholník NKA zloží na trojuholník NKX, takže musia byť zhodné. Podobne to platí aj pre ostatné „rohy“ štvoruholníka, ktoré zohneme dnu, preto

$$\Delta NKA \cong \Delta NKX; \quad \Delta KLB \cong \Delta KLX; \quad \Delta LMC \cong \Delta LMX; \quad \Delta MND \cong \Delta MNX.$$

Z týchto zhodností vyplývajú aj zhodnosti zodpovedajúcich si uhlov. Napríklad $|\sphericalangle AKN| = |\sphericalangle XKN|$ a $|\sphericalangle BKL| = |\sphericalangle XKL|$, využitím týchto rovností máme

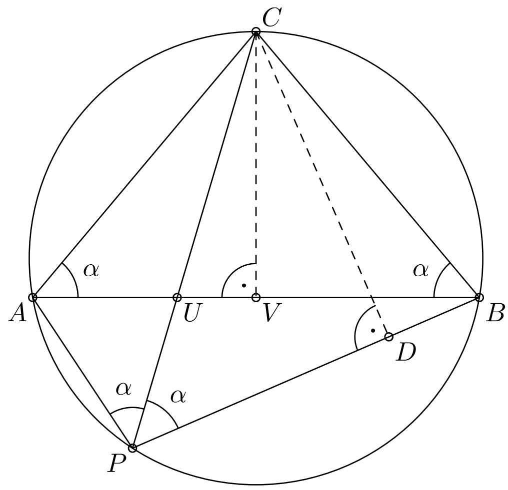
$$|\sphericalangle NKL| = |\sphericalangle NKX| + |\sphericalangle XKL| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AKB| = 90°.$$

Analogicky sa ukáže, že všetky vnútorné uhly štvoruholníka $KLMN$ sú pravé.
Úsečky KA a KB sa obe zobrazia na úsečku KX. Preto musia mať všetky tri rovnakú dĺžku. Navyše K leží na AB, teda musí byť jej stredom. Analogicky to platí aj pre ostatné vrcholy poskladaného štvoruholníka. Takže sme zistili, že body K, L, M, N sú postupne stredy strán AB, BC, CD, DA.
V trojuholníku ABC je KL stredná priečka, rovnobežná s AC. V trojuholníku ABD je NK stredná priečka rovnobežná s BD. Už vieme, že $KL \perp NK$, takže aj $AC \perp BD$. Inak povedané uhlopriečky pôvodného štvoruholníka sú na seba kolmé. Toto je určite nutná podmienka na to, aby sa dal štvoruholník pekne zložiť — platí v každom štvoruholníku, ktorý sa dá pekne zložiť.

Teraz ukážeme, že každý štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami sa dá pekne zložiť — ukážeme, že je to aj postačujúca podmienka. Vezmime si štvoruholník $ABCD$, ktorý má kolmé uhlopriečky, označme X ich priesečník. Stredy strán označme K, L, M, N, tak, ako v predošlej časti. Ak budeme vrcholy A, B, C, D skladať do bodu X. Aby sa dal pekne poskladať stačí ukázať, že trojuholník NKA sa pozdĺž strany NK zohne na trojuholník NKX. Úplne analogicky to potom vieme ukázať aj pre ostatné 3 zohnuté trojuholníky.
Dosť už rečí, poďme to dokázať. Trojuholník AXB je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole X. Bod K je stred AB. Podľa Tálesovej vety potom $|AK| = |KX|$. Podobne z Tálesovej vety pre ΔADX máme $|AN| = |NX|$. Trojuholníky NKA a NKX majú všetky strany rovnako dlhé, čiže sú zhodné. Strany si zodpovedajú v správnom poradí, čiže sú osovo súmerné podľa spoločnej strany NK. Preto ak zohneme štvoruholník pozdĺž NK, tak sa A dostane do X a tieto dva trojuholníky sa budú úplne kryť. Úplne analogicky to vieme ukázať aj pre ohýbanie pozdĺž KL, LM a MN. Tým sme ukázali, že objavená podmienka je aj postačujúca.
Takže štvoruholník sa dá pekne zložiť práve vtedy, keď sú jeho uhlopriečky na seba kolmé.

<u>Úloha č. 9:</u> *V trojuholníku ABC platí $|CA| = |CB|$. Bod P leží na opačnom oblúku kružnice opísanej tomuto trojuholníku ako bod C. Bod D je pätou kolmice z bodu C na priamku PB. Ukážte, že $|PA| + |PB| = 2 \cdot |PD|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Lietadlo a Petržlen)
Prvé, čo by nám mohlo napadnúť, je, že si potrebujeme vyjadriť nejaké uhly, na čo by nám mohlo dobre poslúžiť to, že trojuholník ABC je rovnoramenný. Taktiež by sme mohli hľadať nejaké obvodové uhly. Nakoniec sa cez nejaké podobné trojuholníky dostať ku vzťahu, ktorý máme dokázať. Pri dokazovaní použijeme ešte priesečník úsečiek AB a PC, ktorý označíme U a pätu výšky z bodu C na stranu AB označíme V. Už máme ideu ako chceme postupovať, tak poďme na to.



Trojuholník ABC je rovnoramenný a preto $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$. Uhly APC a ABC sú obvodové nad tetivou AC a preto majú rovnakú veľkosť. Teda $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$. Podobne uhly CPB a CAB sú obvodové nad tetivou AC a preto majú rovnakú veľkosť. Teda $|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$. Spojením týchto rovností dostaneme $|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$. Už máme na obrázku celkom dosť uhlov s rovnakou veľkosťou, takže už je načase začať hľadať podobné trojuholníky.
Trojuholníky APC a UAC sú podobné podľa vety uu, keďže uhly CAU a APC sú rovnaké a pri vrchole C majú spoločný uhol. Z podobnosti potom $\frac{|AP|}{|AU|} = \frac{|PC|}{|AC|}$ a teda $|AP| = \frac{|PC|\,|AU|}{|AC|}$. Podobne trojuholníky PBC a BUC sú podobné (rozmyslite si prečo) a preto $\frac{|BP|}{|BU|}=\frac{|PC|}{|BC|}$ a teda $|BP|=\frac{|PC|\,|BU|}{|BC|}$. Taktiež trojuholníky AVC a PDC sú podobné (rozmyslite si prečo) a teda platí $\frac{|PC|}{|AC|}=\frac{|PD|}{|AV|}$.
Predtým, než prídeme ku vzťahu, ktorý chceme dokázať, si ešte ukážme tri zjavné rovnosti. Prvú, $|AC| = |BC|$, máme z rovnoramennosti trojuholníka ABC. Druhú, $|AU| + |BU| = |AB|$, ľahko vidíme z obrázku. A tretia, $|AV| = \frac{1}{2}\,|AB|$, platí, lebo výška v rovnoramennom trojuholníku delí základňu na polovicu.
Sčítaním rovností pre $|AP|$ a $|BP|$ a použitím vzťahu $|AC| = |BC|$ dostaneme

$$|AP| + |BP| = \frac{|PC|}{|AC|}\left(|AU| + |BU|\right).$$

Použitím vzťahov $|AU| + |BU| = |AB|$ a $\frac{|PC|}{|AC|}=\frac{|PD|}{|AV|}$ dostávame

$$|AP| + |BP| = \frac{|PD|}{|AV|}\,|AB|.$$

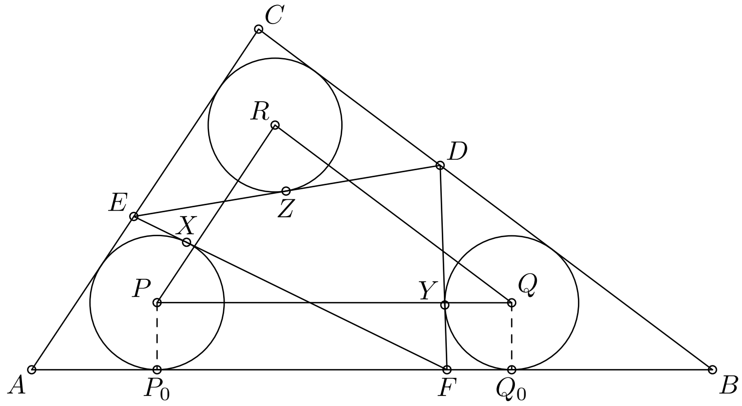
A nakoniec dosadením $|AV| = \frac{1}{2}|AB|$ a upravením dostávame to, čo sme chceli dokázať: $|PA| + |PB| = 2 \cdot |PD|$.

Komentár: Veľa riešení využívalo rôzne obrazy bodu D, najčastejšie cez priamku CP. Pri niektorých typoch riešenia si bolo treba dávať pozor na prípad, keď bod D neležal na úsečke PB, pretože niektoré myšlienky, ktoré ste použili, pre tento prípad neplatili.

Úloha č. 10: *Na stranách BC, CA, AB trojuholníka ABC sú zvolené postupne body D, E, F tak, aby polomery kružníc vpísaných trojuholníkom AEF, BFD, CDE boli rovné r_1. Polomery kružníc vpísaných trojuholníkom DEF a ABC sú postupne r_2 a r. Dokážte, že $r_1 + r_2 = r$.*

Riešenie: (opravoval CD a Viktor)

Stredy kružníc vpísaných trojuholníkom AEF, BFD, CDE postupne označme P, Q, R a dotykové body týchto kružníc so stranami trojuholníka DEF postupne X, Y, Z. Ďalej si označme body dotyku strany AB s vpísanými kružnicami trojuholníkom AFE a BDF postupne P_0 a Q_0.



V úlohe si bolo užitočné všimnúť trojuholník PQR a vzorec pre polomer R vpísanej kružnice daného trojuholníka, $R = 2S/O$, kde S je obsah a O obvod daného trojuholníka. Najprv ukážeme, že polomer vpísanej kružnice trojuholníka PQR je $r - r_1$, čo chceme aby bolo rovné r_2. Potom stačí ukázať, že polomery vpísaných kružníc trojuholníkom PQR a DEF sú rovnaké. Dokážeme, že trojuholníky PQR a DEF majú rovnaký obvod aj obsah. Uvedomením si vzťahu $R = 2S/O$ potom dostaneme, že naozaj aj polomery ich vpísaných kružníc sú rovnaké.

Keďže trojuholníky PQR a ABC majú rovnobežné strany, sú podobné. Vzdialenosť úsečiek AB a PQ je zjavne r_1 a podobne pre vzdialenosti BC s QR a CA s RP. Z toho plynie, že polomer vpísanej kružnice trojuholníka PQR je $r - r_1$. Z toho ďalej vyplýva, že koeficient podobnosti je $q = (r - r_1)/r$.

Z vlastnosti vpísanej kružnice vieme, že $|FP_0| = |FX|$, $|FQ_0| = |FY|$ a podobne pre body D a E. Pomocou tohto môžeme ľahko dokázať, že trojuholníky PQR a DEF majú rovnaký obvod:

$$|PQ| = |P_0Q_0| = |FP_0| + |FQ_0| = |FX| + |FY|.$$

Podobne si môžeme vyjadriť $|QR|$ a $|RP|$. Dostaneme

$$|PQ| + |QR| + |RP| = |FX| + |FY| + |DY| + |DZ| + |EZ| + |EX| = |EF| + |FD| + |DE|.$$

Ich obvody sa teda naozaj rovnajú. Ostáva ukázať, že aj ich obsahy sú rovnaké.

Obvod, resp. obsah všeobecného trojuholníka XYZ budeme označovať O_{XYZ}, resp. S_{XYZ}.

Vieme, že $O_{PQR} = O_{DEF}$ a koeficient podobnosti trojuholníkov PQR s ABC je $(r - r_1)/r$, čiže

$$\frac{O_{DEF}}{O_{ABC}} = \frac{O_{PQR}}{O_{ABC}} = \frac{r - r_1}{r}.$$

Využitím tohto a vzťahu pre polomer vpísanej kružnice ($R = 2S/O$, resp. $S = R \cdot O/2$) dostaneme:

$$S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{AFE} + S_{BDF} + S_{CED}) = \frac{r \cdot O_{ABC}}{2} - \left(\frac{r_1 \cdot O_{AFE}}{2} + \frac{r_1 \cdot O_{BDF}}{2} + \frac{r_1 \cdot O_{CED}}{2}\right) =$$

$$= \frac{r \cdot O_{ABC}}{2} - \frac{r_1(O_{AFE} + O_{BDF} + O_{CED})}{2} = \frac{r \cdot O_{ABC}}{2} - \frac{r_1(O_{ABC} + O_{DEF})}{2} =$$

$$= \frac{r \cdot O_{ABC}}{2} - \frac{r_1 \cdot O_{ABC}\left(1 + \frac{r - r_1}{r}\right)}{2} = \frac{r \cdot O_{ABC}}{2}\left(1 - \frac{r_1 \cdot r}{r^2} - \frac{r_1 \cdot r - r_1^2}{r^2}\right) =$$

$$= \frac{r \cdot O_{ABC}}{2} \cdot \frac{r^2 - 2rr_1 + r_1^2}{r^2} = S_{ABC} \cdot \left(\frac{r - r_1}{r}\right)^2 = S_{PQR}.$$

Posledná rovnosť platí lebo koeficient podobnosti trojuholníka PQR s ABC je $(r - r_1)/r$. Pomer ich obsahov je teda $((r - r_1)/r)^2$. Z čoho dostávame, že ich obsahy sú skutočne rovnaké.

Úloha č. 11: *Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch A_1, B_1, C_1. Úsečka KC_1 je priemerom tejto kružnice a bod D je priesečníkom priamok B_1C_1 a A_1K. Dokážte, že $|CD| = |CB_1|$.*

Riešenie: (opravoval Edo a Miki)
Označme $|\sphericalangle B_1C_1K| = \alpha$ a $|\sphericalangle A_1C_1K| = \beta$.
Uhol CB_1K je úsekový k uhlu B_1C_1K, takže $|\sphericalangle CB_1K| = |\sphericalangle B_1C_1K| = \alpha$. Obdobne uhol CA_1K je úsekový k uhlu A_1C_1K, takže $|\sphericalangle CA_1K| = |\sphericalangle A_1C_1K| = \beta$.
Spočítajme veľkosť uhla C_1DA_1. Pretože AK je priemer kružnice vpísanej, tak podľa Tálesovej vety je uhol C_1A_1K pravý. Takže $|\sphericalangle C_1DA_1| = 180° - |\sphericalangle B_1C_1K| - |\sphericalangle A_1C_1K| - |\sphericalangle C_1A_1D| = 90° - \alpha - \beta$.
Uhly B_1A_1K a B_1C_1K sú oba obvodové nad tetivou B_1K, takže $|\sphericalangle B_1A_1K| = \alpha$. Obdobne $|\sphericalangle A_1B_1K| = \beta$.
Teraz si už vieme vyjadriť uhol B_1CA_1: $|\sphericalangle B_1CA_1| = 180° - 2\alpha - 2\beta$. Všimnime si, že $|\sphericalangle B_1CA_1| = 2|\sphericalangle B_1DA_1|$. To nám hovorí, že bod C je stredom opísanej kružnice trojuholníka B_1A_1D ($\sphericalangle B_1DA_1$ je obvodový uhol a $\sphericalangle B_1CA_1$ je stredový, pretože $|CB_1| = |CA_1|$). Takže aj $|CB_1| = |CD|$, čo sme chceli ukázať.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
1.	Krajčiová Katarína	2.	GAlej KE	4	1		9	9	9	9	9	9		45	90
1.	Vodička Martin	4.	GAlej KE	10	12			9	9	9	9	9		45	90
3.	Kossaczká Marta	4.	Gamča BA	10	8			9	8	9	9	9		44	88
3.	Šafin Jakub	4.	GPH MI	8	6			9	9	9	8	9		44	88
5.	Puza Marko	3.	GPoš KE	5	1			9	9	9	9	8		44	87
6.	Bui Truc Lam Michal	2.	Gamča BA	4	3			9	9	9	9	9		45	86
6.	Psota Miroslav	3.	GHlin ZA	7	2		6	9	9	9	6	9		42	86
8.	Stankovič Miroslav	3.	GPoš KE	7	7			9	9	9	9	9		45	81
8.	Šimková Ľudmila	3.	GPár NR	7	2		6		9	7	9	9		40	81
10.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	Gamča BA	5	3			9	7	9	7	9		41	79
11.	Hanzely Filip	4.	GAP SB	10	7			9	9	6		9		33	77
11.	Lipovský Mário	3.	GJH BA	5	1			9	7	9	9			34	77
13.	Pokrývka Filip	3.	G Bánovce	7	2		6	9	9	9		5		38	75
14.	Horváth Samuel	3.	GPár NR	6	1		6	9	7	9	7			38	74
15.	Trembecký Richard	4.	GAlej KE	5	1		6	9	7	9		8		39	72
16.	Hrivová Ivona	3.	GVO ZA	7	2		3	9	7	6		9		34	71
16.	Kováčová Barbora	3.	ŠPMNDG BA	5	0	9	3	9	9					30	71
18.	Bohdal Ondrej	2.	GJH BA	4	0	9	6	1	7	9				32	70
19.	Šimsa Štěpán	4.	Litoměřice ČR	8	9			9	9	7		3		28	69
20.	Jurina Šimon	3.	Gamča BA	6	2		0	9	5	9		9		32	68
20.	Lâm Tuân Dûng	2.	GJH BA	4	0	9		9		9		8		35	68
22.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	3	0	9	5	9	4	9				36	66
22.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	2	0	9		9	7	8	1			34	66
22.	Sučík Samuel	2.	GJH BA	4	2		7	1	9	9				26	66
25.	Korbela Michal	3.	G Bánovce	7	2			9	3	9		9		30	65
26.	Buráň Michal	4.	G JAK CR	4	0	9	5	9	7	9				39	64
27.	Matejovičová Tatiana	4.	Gamča BA	7	3			9	9	9		8		35	62
28.	Hlaváčik Matúš	4.	GAlej KE	8	3			9	9	9		9		36	60
28.	Kobák Michal	3.	Gamča BA	4	1		4	9	7	9		1		30	60
28.	Svoboda Josef	4.	Frýdlant ČR	7	5			9	7	9	0			25	60
31.	Dráček František	2.	GŠkol PB	4	0	9	6		2	9				26	56
32.	Santrová Michaela	2.	GMH Trstená	4	0	9	7	9	7					32	55
32.	Tomašec Samuel	3.	GVar ZA	5	0	9	6		5					20	55
34.	Benešová Katarína	4.	ŠPMNDG BA	8	2		3	2	7	9				21	53
35.	Murin Martin	2.	GJH BA	4	0	9	0	3	3			5		20	52
36.	Bafrnec Matúš	2.	GPár NR	3	0	9	5		3	0				17	50

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k$_\alpha$**	**k$_\beta$**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**p**	**s**	$\sum$
36.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	1	0	9	6			9				24	50
36.	Nepšinská Silvia	2.	GJCh BR	4	0	9	6	1	7					23	50
39.	Daniel Mark	3.	GPár NR	6	1			9	5	9				23	49
39.	Ječmenová Andrea	3.	GVO ZA	6	1		3		7	7		9		26	49
39.	Rapavý Martin	3.	GAlej KE	5	0	9								9	49
42.	Nociarová Jela	4.	GBST LC	7	1		5		8	7				20	47
42.	Prívozník Matej	3.	GJH BA	7	2		6							6	47
44.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	1	0	9		9						18	45
44.	Prešinská Kristína	2.	GPár NR	4	0		4	2	4	0				10	45
46.	Dargaj Jakub	3.	GPoš KE	4	0	9								9	44
47.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3	0			9						9	43
48.	Mikulec Jaromír	2.	GsvJ NM	4	0	9	4	9	4					26	41
49.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	3	0		3		5					8	40
49.	Magyarová Zuzana	3.	GBST LC	6	1		6		7	9	1			23	40
49.	Mores Martin	3.	GVar ZA	5	0	9	3		5					17	40
52.	Kňaze Adam	2.	GJCh BR	4	0	9	6	1	5	0		1		22	37
53.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3	0						9	9		18	36
53.	Bačinská Irena	3.	ŠPMNDG BA	4	1			9	9					18	36
53.	Ivan Lukáš	3.	GJH BA	4	0		5	9	3					17	36
53.	Le Anh Dung	3.	Tachov ČR	5	4									0	36
57.	Kováčová Mária	2.	GsvCM NR	3	0		0	1	6					7	35
57.	Krakovská Hana	3.	Gamča BA	6	1		3	0	7					10	35
57.	Králik Matej	2.	GJH BA	4	0	9	3							12	35
60.	Gafurov Askar	4.	Gamča BA	7	3									0	34
60.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3	0			9						9	34
60.	Petrucha Jaroslav	4.	GMet BA	9	3									0	34
60.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2	1									0	34
64.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	3	0	9	3	2	2					16	33
64.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	3	0	3	0	1	4	0		0		8	33
66.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3	0									0	32
67.	Žárský Jan	2.	Kopřivnice ČR	4	0				7					7	30
68.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3	0	4	6	1	7	6				24	28
69.	Macko Vladimír	4.	GĽŠ ZV	8	6									0	25
70.	Steinhauser Václav	-1.	G Dacice	-1	0									0	24
71.	Štěpánek Martin	2.	Příbor ČR	4	0		4		5	0	1			10	23
72.	Dendis Tomáš	2.	BiG Sučany	2	0		6	1	1					8	22
72.	Labjaková Gabriela	2.	GMH Trstená	3	0									0	22
74.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3	0		5		1					6	19
75.	Smolík Milan	4.	GJH BA	7	1									0	18
76.	Halamová Mária	2.	GVO ZA	3	0		4		1	0	1			6	17
76.	Polovka Maroš	3.	GKuk PP	4	0									0	17
78.	Rizman Daniel	3.	GVar ZA	4	0									0	16
78.	Santer Martin	4.	GMH Trstená	7	0									0	16
80.	Šandalová Michaela	3.	ŠPMNDG BA	5	0									0	15
81.	Bieliková Michaela	3.	GVM SE	5	0									0	13
81.	Straková Valentína	3.	GVM SE	5	0									0	13
83.	Kašša Ladislav	1.	G Šamorín	1	0			1	7					8	12
83.	Oravec Matej	2.	GVar ZA	3	0									0	12
85.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	0	9	0	0						9	11
86.	Ivanov Marián	4.	GJH BA	5	0				2					2	10
86.	Roštár Marek	4.	1SG BA	5	0									0	10
86.	Veselá Simona	2.	GJH BA	2	0									0	10
89.	Blišáková Katarína	3.	SŠS NR	3	0									0	9
89.	Kociánová Barbora	4.	GZlin	4	0									0	9
91.	Šromeková Karolína	3.	ŠPMNDG BA	6	0									0	7

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	k_β	5	6	7	8	9	10	11	p	s	$\sum$
92.	Klimkovič Anna-Mária	3.	ŠPMNDG BA	4	0									0	6
93.	Palko Maximilián	3.	1SG BA	4	0	0	2		2					4	4
94.	Velich Tomáš	1.	GJH BA	1	0					0	0			0	2
95.	Mikel Jan	4.	G Roznov	4	1									0	0
95.	Ondráš Ján	3.	Gamča BA	4	0									0	0

kategória ALFA, Bratislava

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Frankovská Zuzana	1.	Gamča BA	1	9	7	5		9	5			73
2.	Oravkin Eduard	1.	1SG BA	1	9	7	9	9		0			72
3.	Choma Matej	1.	Gamča BA	1	9	5	9	9		5			71
4.	Petráš Peter Pavel Arthur	1.	ŠPMNDG BA	1	9	6	5	9	9	6			70
5.	Ďuratná Petra	2.	ŠPMNDG BA	3			5	9	9	4	9		67
5.	Kojda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	0	9	5	9			5	1		67
7.	Fabšíková Nina	1.	1SG BA	1	9	3	5	8		3			62
7.	Szalay Erik	3.	ŠPMNDG BA	3			8	9	9	7			62
9.	Halabrin Juraj	1.	GJH BA	1	9	1	5	0	3	6	1		58
10.	Bodík Juro	1.	Gamča BA	1	8	2	5	1			3		55
11.	Pieš Adrián	3.	ŠPMNDG BA	3			5	6	9	4			52
12.	Trenčanská Tereza	1.	Gamča BA	1	9	6	5				1		51
13.	Murín Marek	1.	GJH BA	1	9		0	4		0	1		47
14.	Ralbovský Peter	1.	ŠPMNDG BA	2					9		9		43
14.	Velich Tomáš	1.	GJH BA	1	9	5	1	6					43
16.	Pilňan Branislav	2.	GJH BA	2			1	9					41
17.	Suchý Daniel	2.	Gamča BA	2		2	9						40
18.	Zeman Matúš	1.	1SG BA	1	9	5				0	1		37
19.	Sůra Tomáš	1.	1SG BA	1	9	4	0			0			35
20.	Lihotský Samuel	1.	1SG BA	1									32
20.	Strakáčová Natália	1.	Gamča BA	1									32
22.	Gazdíková Ema Mária	1.	ŠPMNDG BA	1									31
23.	Páleník Michal	1.	ŠPMNDG BA	1									29
24.	Krakovská Ema	2.	Gamča BA	3							9		25
25.	Tóthová Andrea	1.	ŠPMNDG BA	1									24
26.	Camara Anna	2.	GMet BA	2									23
27.	Veselá Simona	2.	GJH BA	2									21
28.	Martinková Sandra	2.	GJH BA	2									20
29.	Hrdina Jakub	3.	GJH BA	3									16
30.	Čatlošová Katarína	3.	GFGL BA	3	9	3			9	0	0		12
31.	Híveš Zdenko	3.	1SG BA	3									6

kategória ALFA, západ

Por.	Meno	Roč.	Škola	k_α	1	2	3	4	5	6	7	p	$\sum$
1.	Tódová Lucia	1.	GPár NR	1	9	1	5		9		9		78
2.	Konček Marián	2.	G1.máj MA	2			9	7	9	6	3		74
3.	Bafrnec Matúš	2.	GPár NR	3			9	4	9	5			67
4.	Marčeková Katarína	2.	GPár NR	3			9	2	3	0	1		52
5.	Kluvanec Roman	2.	GPár NR	3			9			3			51
6.	Mečiar Adam	2.	GVBN PD	3					9	5	9		43
7.	Kašša Ladislav	1.	G Šamorín	1	9	7	0				1		42
8.	Štefkovič Ján	3.	G Bánovce	3			9	3	0	3	1		40
9.	Gerberová Michaela	1.	G Bánovce	1									37
10.	Zachara Samuel	1.	PiarG TN	1									32
11.	Madaj Pavel	2.	GVBN PD	3							9		29

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
12.	Hladká Barbora	2.	GPár NR	2									28
13.	Kováčová Mária	2.	GsvCM NR	3						0	1		25
13.	Lenhart	1.	G Bánovce	1	9	6	5			4	1		25
15.	Escherová Eva	1.	G Bánovce	1									21
16.	Blišáková Katarína	3.	SŠS NR	3									20

kategória ALFA, stred

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Branišová Eva	1.	GVO ZA	1	9	6	9	0	6	4	2		74
2.	Tesař Emanuel	1.	GBST LC	1	9	4	5			0	9		71
3.	Kulla Filip	1.	BiG Sučany	1	9	6	5	5			1		66
4.	Koščo Marek	3.	GVar ZA	3			8		9	3	2		45
5.	Gašpárek Miroslav	3.	SG ZA	3			0		9	5	1		44
6.	Sanigová Lucia	2.	GVar ZA	2		5	9		9				43
6.	Slivka Norbert	3.	GJGT BB	3									43
8.	Pavčík Richard	1.	GJGT BB	1	9	2	0						38
9.	Kudelčíková Martina	1.	GVO ZA	1	9		5						37
10.	Hradňanská Petra	2.	GVar ZA	2	9	3	5		1	0	2		36
11.	Šeligová Kristína	2.	GsvFA ZA	2			8			2			35
12.	Roch Oliver	2.	G Bytca	2		5	1		1	2	1		30
13.	Janiga Martin	2.	GPOH DK	2									25
13.	Včelková Veronika	2.	GPOH DK	2									25
15.	Benčová Katarína	2.	GMH Trstená	2									20
16.	Dendis Tomáš	2.	BiG Sučany	2						6	1		19
16.	Jančár Ján	2.	GVar ZA	2									19
16.	Labjaková Gabriela	2.	GMH Trstená	3									19
19.	Chmola Martin	1.	GFS Nová Baňa	1	9	0	5		1	3			18
20.	Franko Marián	2.	GPOH DK	2									17
20.	Kormaňák Michal	1.	GMRŠ ZH	1	9		5			3			17
22.	Halamová Mária	2.	GVO ZA	3						4			14
23.	Bátrna Jozef	2.	G Bytca	2		1	0						11
24.	Barbora Dávid	2.	GFS Nová Baňa	3						5			10
25.	Oravec Matej	2.	GVar ZA	3									9
25.	Paišová Dominika	2.	G Bytca	2									9
27.	Baránek Martin	2.	GVar ZA	2									6
28.	Michálek Tomáš	2.	G Bytca	2			0				1		2
29.	Abaffyová Adela	3.	G Tvrdošín	3									0
29.	Sokolová Nikola	2.	GHlin ZA	2									0

kategória ALFA, východ

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Hanzely Slavomír	1.	GAP SB	1	9	9	9	9	9	6			87
2.	Micheľová Henrieta	1.	GAlej KE	1	9	8	5	9	9		2		83
2.	Semanišiová Žaneta	1.	GAlej KE	1	9	9	9	9			2		83
4.	Mišlanová Kristína	1.	GAlej KE	1	9	9	9						72
5.	Kurimský Ján	1.	GsvMo	1	9	3	5		9				61
6.	Feciskaninová Soňa	1.	GAlej KE	1	9	3	5						47
7.	Bilý Ondrej	1.	GLS HE	1	9		0	6					35
7.	Lenárt Patrik	1.	GPM KE	1									35
9.	Lukáč Jakub	3.	GKuk PP	3									28
10.	Jarošová Dorota	2.	GAlej KE	3					4	6	1		15
11.	Ženčuchová Andrea	2.	GJAR PO	3							3		3

kategória ALFA, zahraničie

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	**k**$_\alpha$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	$\sum$
1.	Žídek Matěj	1.	Frýdlant ČR	1	9	9	9	9	9	5			87
2.	Kopf Daniel	1.	G Slez ČR	1	9	4	5		9		9		77
3.	Krchňák Václav	1.	Brno ČR	1	9	6	8						53
4.	Steinhauser Václav	-1.	G Dacice	-1									41
5.	Gajdušek Pavel	1.	G Ost - Por	1	9	6	5	9	9	2			38
6.	Steinhauserová Anna	3.	G Dacice	3									33
7.	Kopfová Lenka	-2.	G Slez ČR	-2									31
8.	Švarc Radovan	2.	Česká Třebová	2									11