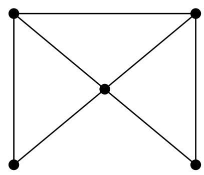
# Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2012/2013

**Úloha č. 1:** *Na obrázku je znázornená cestná sieť Hanoja. Keďže ulice sú príliš úzke, starosta sa rozhodol, že z každej ulice urobí jednosmerku. Chce však, aby sa z každej križovatky (čierne bodky) dalo dostať do každej inej. Koľkými spôsobmi sa dá vyplniť starostovo rozhodnutie?*



Riešenie: (opravovala Baša a Mary)
Na úvod si križovatky označme. Križovatku vľavo hore nazvime $A$, tú vpravo hore $B$, tú v strede $C$ a tie zvyšné zľava doprava $D$ a $E$. (V skutočnosti sa križovatky v Hanoji volajú ináč, ale obetujme autenticitu pre blaho čitateľa.)
Teraz si všimnime cesty $AD$ a $CD$. Jedna z nich musí do bodu $D$ vchádzať a tá druhá z neho vychádzať. Ak by to tak totiž nebolo, nevedeli by sme sa dostať do $D$ alebo z $D$ a starosta by bol smutný. Ako vidíme, trasa $ADC$ sa správa ako jedna cesta. Preto ak nahradíme trasu $ADC$ cestou spájajúcou križovatky $A$ a $C$, náš hľadaný počet možností sa nezmení. Podobne vybabreme s bodom $E$. Stačí nám teda uvažovať cestnú sieť s križovatkami $A$, $B$, $C$, pričom medzi $A$, $C$ vedú dve cesty a medzi $B$, $C$ tiež.
Spočítajme teraz také možnosti určenia jednosmeriek, že cesta $AB$ má smer $A \to B$. Cesty medzi $A$, $C$ môžu byť organizované 4 spôsobmi: obe majú smer $A \to C$, obe majú smer $C \to A$, prvá $A \to C$ a druhá $C \to A$, prvá $C \to A$ a druhá $A \to C$. Hneď vidíme, že prvá možnosť by zablokovala križovatku $A$ a viedla by k nespokojnosti starostu, zostávajú nám teda 3 možnosti. Obdobnou úvahou pre bod $B$ dospejeme k záveru, že pre cesty spájajúce $B$, $C$ máme tiež 3 možnosti. Celkovo teda $3 \cdot 3 = 9$ možností. Otázne ale je, či všetky takto určené možnosti vyhovujú našim nárokom. Ukážme, že áno.
Smery ciest medzi $A$, $C$ sme vybrali tak, že vždy aspoň jedna má smer $C \to A$, podobne aspoň jedna z ciest medzi $B$, $C$ má smer $B \to C$. Čitateľ ľahko nahliadne, že medzi križovatkami $A$, $B$, $C$ sa vieme vďaka cyklu $A \to B \to C \to A$ pohybovať ľubovoľne. Vrátiac sa k pôvodnej úlohe ľahko overíme, že potom sa aj $D$ a $E$ dajú úspešne zapojiť do našej siete jednosmeriek.
Ukázali sme, že schodných možností takých, že $A \to B$ je 9. Možností takých, že $B \to A$ bude zo symetrie tiež 9 a iné možnosti byť už nemôžu, dokopy máme teda 18 možností.

**Úloha č. 2:** *Marek má novú zábavku. Hodí hracou kockou, na ktorej sú čísla* 1 *až* 6*, potom hodí hracím osemstenom, na ktorom sú čísla* 1 *až* 8*. Sčíta čísla, ktoré mu práve padli, a súčet si zapíše. Toto opakuje už celé dni. Aké číslo má pravdepodobne zapísané najčastejšie? Svoje tvrdenie nezabudnite poriadne zdôvodniť.*

Riešenie: (opravovala Betka a Murko)
Pozrime sa najprv na to, ako vypočítame pravdepodobnosť, že na kocke padne číslo 1. Vypočítame ju ako podiel počtu priaznivých možností (v našom prípade padnutie čísla 1) a počtu všetkých možností (mohli padnúť čísla 1 až 6). Z toho dostávame, že pravdepodobnosť je 1/6. Aj pre ostatné čísla dostaneme 1/6. Na osemstene bude táto pravdepodobnosť 1/8, pretože pre každé číslo je jedna priaznivá možnosť a počet všetkých možností je osem.
Keď hádžeme kockou a osemstenom naraz, musíme si uvedomiť, že to, čo padne na kocke, vôbec nezávisí od toho, čo padne na osemstene. Preto môže nastať 48 rôznych situácií (ku každému zo šiestich čísel na kocke môže padnúť osem čísel na osemstene, takže $6 \cdot 8$), každá s rovnakou pravdepodobnosťou 1/48.
Nás ale zaujímajú súčty. Napríklad súčet 9 vieme dostať ako $1 + 8$, $2 + 7$, $3 + 6$, $4 + 5$, $5 + 4$, $6 + 3$ (prvé číslo určuje to, čo padlo na kocke, druhé na osemstene), čo je 6 možností. Keď potom vypočítame pravdepodobnosť, že súčet bol 9, bude to $6/48 = 1/8$. Teraz by sme si mohli vypočítať pravdepodobnosti jednotlivých súčtov a z toho už potom ľahko vyčítame, ktorá je najväčšia.

Skúsime to spraviť inak. Pomocou kocky a osemstenu vieme dostať 13 rôznych súčtov (2 až 14). Ľubovoľný súčet dostaneme najviac šiestimi možnosťami, pretože na kocke je len šesť čísel.
Ešte musíme zistiť, koľko súčtov vieme dostať šiestimi spôsobmi. Sú to súčty 7, 8 a 9, pretože v súčtoch menších ako 7 nevieme použiť všetky čísla z kocky (všetky od 1 do 6). Ak chceme dostať súčet 6 (alebo menej), už sa medzi padnutými číslami nesmie vyskytovať číslo 6. Podobne, ak chceme dostať súčet 10 (alebo viac), nemôže nám padnúť číslo 1.
Preto sú pravdepodobne najčastejšie zapísané čísla 7, 8 a 9.

**Úloha č. 3:** *Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vybrať niekoľko navzájom rôznych párnych čísel tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom $n$.*

Riešenie: (opravoval JeFo)
Z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vieme vybrať rôzne párne prirodzené čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom $n$, pre každé $n$ z množiny $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$:

- Ak je $n$ párne, tak môžeme z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vybrať čísla $n-2$ a 2 (ktoré sú určite párne), ak sú obe rôzne, čo určite nastáva v prípade $n \geq 6$ (rozmyslite si prečo). Potom ich súčet je $(n-2)+2 = n$, a teda číslo deliteľné $n$.
- Pre $n$ nepárne môžeme z danej množiny vybrať čísla $n-1$, $n-3$ a 4 (ktoré sú určite párne), ak sú všetky rôzne, čo určite nastáva v prípade $n \geq 9$ (rozmyslite si prečo). Potom ich súčet je $(n-1)+(n-3)+4 = 2n$, a ten je opäť deliteľný $n$.

Ešte nám ostáva ukázať, čo s číslami 2, 3, 4, 5 a 7.
V prípade $n = 2$ daná množina obsahuje iba číslo 1 a žiadne párne číslo. V prípadoch $n = 3$ a $n = 4$ daná množina obsahuje iba jedno párne číslo 2. Vo všetkých doterajších prípadoch je súčet všetkých párnych čísel menší ako $n$, a teda nemôže byť deliteľný $n$. V prípadoch $n = 5$ a $n = 7$ je súčet všetkých párnych čísel v danej množine menší ako $2n$, čo je najmenší možný násobok čísla $n$, ktorý je párny. Teda náš párny súčet (súčet párnych čísel je vždy párny) nemôže byť deliteľný $n$.

Komentár: Veľa z vás napísalo svoje riešenie spôsobom: „Skúsim pár malých konkrétnych čísel. Po pár pokusoch si všimnem ako to funguje a z toho sa pokúsim odvodiť všeobecnejšie pravidlá.“ Takýto postup pri písaní riešenia je správny, ale „elegantnejšie“, tým sa myslí, že vo veľkom svete sa to robí trochu inak, je uviesť riešenie a dokázať, že je správne, nie popísať celý riešenie objavujúci proces. V tomto vzoráku som sa vám pokúsil ukázať, ako by také „elegantnejšie“ riešenie mohlo vyzerať. Odporúčam prečítať si vzorák aj ľuďom, čo dostali za príklad deväť bodov a nabudúce sa môžu pokúsiť svoje riešenie napísať „elegantnejšie“.

**Úloha č. 4:** *Máme balíček 52 kariet a vieme s nimi robiť len tieto dve operácie:*

- *seknúť balíček, t. j. rozdeliť balíček na dve súvislé časti a vymeniť ich poradie,*
- *vymeniť poradie vrchných dvoch kariet.*

*Môžeme „zamiešať“ karty do ľubovoľného poradia?*

Riešenie: (opravoval Beren)
Tak sa na to pozrime a zamyslime sa. Označme si momentálne vrchnú kartu ako 1, druhú ako 2, ..., päťdesiatu druhú ako 52. Musíme nájsť spôsob, ako ich zamiešať do ľubovoľného poradia, čiže niekto nám povie, ako ich máme zamiešať a my mu musíme povedať postup, ako budeme postupovať pri miešaní. Keďže operácie sa dajú robiť aj opačným spôsobom, znamená to, že čo vieme zamiešať, vieme aj vrátiť naspäť do pôvodnej pozície zopakovaním operácii odzadu. To ale znamená, že úlohu si môžeme zjednodušiť tak, že nám stačí ukázať, že z ľubovoľného zamiešania kariet vieme dostať naspäť zamiešanie $1, 2, 3, \dots, 52$. Je to iba 52! možností, poďme si ich teda všetky vypísať. Alebo nie, predsa len bude asi jednoduchšie nájsť nejaké všeobecné riešenie.[1] Náš dôkaz bude pozostávať z dvoch krokov.

1. **Vieme vymeniť ľubovoľné dve susedné karty**
   No nebudeme zbytočne skromní, jasné, že vieme. Dajme tomu, že chceme vymeniť kartu na $k$-tom a $(k+1)$-vom mieste. Tak sekneme balíček nad $k$-tou kartou, čím ju dostaneme na vrch balíčka a môžeme ju vymeniť s pôvodne $(k+1)$-vou kartou. Následne opäť sekneme balíček tak, aby sa pôvodne prvá karta vrátila naspäť na prvé miesto. Sami môžete vidieť, že sa nestalo nič viac a nič menej ako to, že $k$-ta a $(k+1)$-vá karta si vymenili miesta. Super.

2. **Ak vieme vymeniť ľubovoľné dve susedné karty, vieme kôpku ľubovoľne zamiešať**
   Opäť to nie je nič zložité, zoberieme si kartu s číslom 1 a postupne ju vzájomnými výmenami „prebubleme“ až úplne hore. Teraz zoberieme kartu s číslom 2 a „prebubleme“ ju na druhú pozíciu. S kartou 1 sme pritom nič nespravili. Dôležité je, že vieme kartu $k$ dať na $k$-tu pozíciu bez toho, aby sme ovplyvnili karty nad ňou. No a viac ani nepotrebujeme, môžeme sa radovať.

[1] Päťdesiatdva faktoriál je fakt veľké číslo. Akože fakt.

Karty vieme zamiešať do ľubovoľného poradia. Juch.

**Úloha č. 5:** *Aritmetická postupnosť*[2] $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots$ *obsahuje čísla* $a_1^2$, $a_2^2$ *a* $a_3^2$. *Dokážte, že každý člen tejto postupnosti je celé číslo.*

Riešenie: (opravoval Mojo a Marek)
V aritmetickej postupnosti sa dva susedné členy líšia o konštantu. Označme si túto konštantu $d$. Prvý člen postupnosti je $a_1$, druhý je $a_2 = a_1 + d$, $n$-tý člen je $a_n = a_1 + (n-1)d$. Aby sme dokázali tvrdenie zo zadania, stačí ukázať, že $a_1$ a $d$ sú celé čísla (premyslite si prečo).
Musia existovať celé čísla $p$, $q$ a $r$ také, že $a_1^2 = a_1 + pd$, $a_2^2 = a_1 + qd$, $a_3^2 = a_1 + rd$.
Keď vyjadríme $a_2^2$ dvoma spôsobmi, dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + qd = a_2^2 = (a_1+d)^2 = a_1^2 + 2a_1d + d^2 = (a_1 + pd) + 2a_1d + d^2 &= a_1 + (p + 2a_1 + d)d, \\ qd = \qquad\qquad \dots \qquad\qquad &= (p + 2a_1 + d)d. \end{aligned}$$

Buď teda $q = p + 2a_1 + d$, alebo $d = 0$. Ak $d = 0$, tak $a_1 = a_1^2$, a teda $a_1 = 1$, alebo $a_1 = 0$, a tým je úloha vyriešená. Ak $q = p + 2a_1 + d$, tak keďže $q - p$ je celé číslo, tak aj $2a_1 + d$ je celé číslo. Analogicky zo vzťahu pre $a_3^2$ dostávame, že $4a_1 + 4d$ je celé číslo (za domácu úlohu overte).
Ak $2a_1 + d$ je celé číslo, tak aj $2(2a_1 + d) = 4a_1 + 2d$ je celé číslo. A keďže aj rozdiel dvoch celých čísel je celé číslo, tak aj $(4a_1 + 4d) - (4a_1 + 2d) = 2d$ je celé číslo. Podobne aj $4(2a_1 + d) = 8a_1 + 4d$ je celé číslo, a teda aj $(8a_1 + 4d) - (4a_1 + 4d) = 4a_1$ je celé číslo. Preto musia existovať celé čísla $b$ a $l$, pre ktoré platí $b/4 = a_1$ a $l/2 = d$. Z toho vyplýva, že pre každé $n$ je $4a_n$ celé číslo (premyslite si prečo).
Ak $b$ dáva zvyšok 1 alebo 3 po delení 4, tak $b^2$ dáva po delení 4 zvyšok 1 (overte). A teda $b^2/4$ nie je celé číslo. Avšak $4a_1^2$ musí byť celé číslo a $4a_1^2 = 4(b/4)^2 = 4b^2/16 = b^2/4$, čo je spor. Preto $b$ dáva zvyšok 2 alebo 0 po delení 4, takže $c = b/2$ je celé číslo. Zjavne $c = 2a_1$. Vyššie sme dokázali, že $2a_1 + d$ je celé číslo. Preto aj $(2a_1 + d) - c = (2a_1 + d) - 2a_1 = d$ je celé číslo.
Čiže pre každé $n$ je $2a_n$ celé číslo (to je posledná domáca úloha). Teda aj $2a_1^2$ je celé číslo. Ak $c$ je nepárne, tak aj $c^2$ je nepárne a teda $c^2/2$ nie je celé číslo. Avšak $2a_1^2 = 2(c/2)^2 = 2c^2/4 = c^2/2$, čo je spor. Preto $c$ musí byť párne číslo. Potom je aj $c/2 = a_1$ celé číslo.
Ukázali sme, že $a_1$ aj $d$ sú celé čísla, a preto aritmetická postupnosť $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots$ obsahuje len celé čísla.

**Úloha č. 6:** *Dvaja hráči hrajú nasledovnú hru. Na začiatku je tabuľka $3 \times 3$, ako na obrázku vľavo. Každý hráč vo svojom ťahu označí jeden riadok alebo stĺpec svojou značkou a vymení medzi sebou dva stĺpce alebo dva riadky, pričom označenia ostávajú na pôvodnom mieste. Hráči sa medzi sebou striedajú, dokiaľ nie sú označené všetky riadky aj stĺpce. Potom si každý hráč zráta súčet čísel vo svojich riadkoch a súčet čísel vo svojich stĺpcoch. Tieto dva súčty sčíta a dostane svoje výsledné skóre. Vyhráva hráč s vyšším skóre, v prípade rovnosti skóre nevyhráva nikto. Nájdite neprehrávajúcu stratégiu*[3] *pre niektorého z hráčov. Na obrázku vpravo je jedna z možných situácií počas hry.*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| × | | | |
| 8 | 7 | 9 | • |
| 2 | 1 | 3 | |
| 5 | 4 | 6 | × |

Riešenie: (opravoval Jakub S.)
Našou úlohou je nájsť neprehrávajúcu stratégiu pre niektorého z hráčov. Asi by bolo užitočné zistiť, kedy niektorý z hráčov prehráva, resp. neprehráva. Poďme sa na to pozrieť.
Hra končí, keď sú označené všetky riadky aj stĺpce niektorým z hráčov. Vieme, že vyhráva hráč s vyšším celkovým súčtom čísel vo svojich riadkoch a stĺpcoch. Súčet bodov obidvoch hráčov je 90, keďže súčet čísel od 1 do 9 je 45 a každé z nich bude započítané dvakrát (raz ako súčasť nejakého stĺpca a raz ako súčasť riadku). Z toho vyplýva, že neprehráva hráč, ktorý má na konci aspoň 45 bodov. Poďme sa teda skúsiť hrať! Verím, že každý z vás si zahral aspoň pár ťahov tejto hry. Ak ste tak náhodou neurobili, tak máte na to priestor práve teraz.

············ *(pokračujte v čítaní vzorového riešenia až po splnení predchádzajúcej úlohy)* ············

Už po pár ťahoch si môžeme všimnúť, že výmena riadkov, resp. stĺpcov zachováva súčty riadkov aj stĺpcov, len mení ich poradie. A je to naozaj tak. Keď vymeníme nejaké dva stĺpce, tak súčty stĺpcov nezmeníme, zmeníme len ich poradie. Súčty riadkov to taktiež nezmení, pretože v nich ostanú tie isté čísla, len sa nejako popremiestňujú. Analogicky to platí aj pre vymieňanie riadkov. To ale znamená, že počas celej hry (aj na jej konci) budú v tabuľke riadky so súčtami 6, 15, 24 a stĺpce so súčtami 12, 15, 18.
Výborne! Zamyslime sa teraz nad tým, ktoré kombinácie čísel neprehrávajú. Určite si rýchlo všimnete, že veľa kombinácií so 6-tkou prehráva, napr.: (6, 12, 15), (6, 12, 18), (6, 15, 15), … A naopak, takmer všetky kombinácie s číslom 24 sú neprehrávajúce (všetky okrem (6, 12, 24)). Teda hráčovi, ktorý chce neprehrať stačí, aby mal na konci riadok s číslom 24 a nemal riadok s číslom 6 (skúste sa zamyslieť, prečo to tak je). No a vie niektorý hráč

[2] Aritmetická postupnosť je postupnosť čísel, kde je rozdiel po sebe idúcich čísel konštantný. Napríklad 5, 8, 11, 14, 17.
[3] Tým myslíme návod ako hrať, ktorý hráčovi zaručí, že neprehrá, nech by jeho protihráč hral akokoľvek.

hrať tak, aby sa mu podarilo mať číslo 24 a nemať 6? Odpoveď je áno. Druhý hráč má zjavnú výhodu poslednej výmeny, t.j. po jeho poslednom ťahu v hre môže vymeniť dva riadky alebo stĺpce. Takže ak má nejaký riadok, tak si vymení riadky tak, aby mohol mať 24. Zároveň dokáže hrať tak, aby nemal označené všetky tri riadky. Neprehrávajúca stratégia druhého hráča je:

- Ťah č. 1: označí ľubovoľný riadok (sú aspoň dva voľné) a vymení ľubovoľné dva riadky/stĺpce.
- Ťah č. 2: označí ľubovoľný stĺpec (ešte je aspoň jeden voľný) a vymení ľubovoľné dva riadky/stĺpce.
- Ťah č. 3: označí posledný voľný riadok, resp. stĺpec a výmenu urobí podľa toho, koľko má označených riadkov. Ak má označené:
  - 1 riadok: vymení dva riadky tak, aby na jeho riadku bol riadok so súčtom 24. Dva stĺpce dávajú dokopy najmenej $12 + 15 = 27$ bodov, a teda určite vyhral $(24 + 27 = 51)$.
  - 2 riadky: ak je na jeho riadku 6-tka, tak ju vymení s riadkom súpera, inak vymení dva svoje. Určite teda vyhral, lebo má najmenej $15 + 24 + 12 = 51$ bodov.

Našli sme teda výhernú (a tým pádom aj neprehrávajúcu) stratégiu pre druhého hráča. Huráá!

**Úloha č. 7:** *Máme reálne čísla $a,\ b,\ c$, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že nanajvýš dve z čísel*

$$2a - \frac{1}{b},\ 2b - \frac{1}{c},\ 2c - \frac{1}{a}$$

*sú väčšie ako* 1.

Riešenie: (opravoval Ondro a Viktor)
Máme dokázať, že vždy je aspoň jeden výraz zo zadania menší alebo rovný 1. Keďže $abc = 1$, môžu nastať dve možnosti:

1. Práve jedna neznáma je kladná. BUNV[4] nech je to $a$. Potom $1/a > 0$ a $c < 0$, z čoho vyplýva $2c-1/a < 0 \leq 1$.
2. Všetky tri neznáme sú kladné. Znova rozoberieme dva prípady:
   (a) Ak aspoň dve neznáme sú menšie alebo rovné 1, BUNV $a$ a $b$, potom $2a \leq 2$ a $1/b \geq 1$, odkiaľ $2a-1/b \leq 1$.
   (b) Najviac jedna neznáma je menšia alebo rovná 1, teda aspoň dve neznáme sú väčšie ako 1, BUNV nech sú to $a$ a $b$. Potom $0 < c = 1/ab < 1$ a zároveň $2 - b < 1$, z čoho vyplýva $2c - 1/a = 2c - abc/a = 2c - bc = c(2 - b) \leq 1$.

Rozobraním všetkých možností sme ukázali, že vždy je aspoň jedno z čísel menšie alebo rovné 1.

**Úloha č. 8:** *Hago má 10 štvorcov celých čísel. Za akých podmienok k nim existuje 10 celých čísel takých, že súčty deviatich z nich tvoria postupne Hagove čísla?*

Riešenie: (opravoval Hago)
Úvodom by sme sa mali dohodnúť na označení čísel vystupujúcich v zadaní. Moje štvorce (ďalej len áčka) si označíme $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. V zadaní sa ešte spomínajú nejaké celé čísla (ďalej len déčka), ktoré sa majú nasčítať do tých štvorcov. Tie si označíme $d_1, d_2, \ldots, d_{10}$. Ešte si označíme ich celkový súčet

$$S = d_1 + d_2 + \cdots + d_{10}.$$

Keď sčítame deväť čísel z desiatich, tak práve jedno vynecháme. To znamená, že výsledok bude rovnaký, ako keď od ich celkového súčtu odčítame to vynechané.
Chceme, aby sa každé áčko rovnalo súčtu deviatich déčok, čo po predošlej úvahe znamená

$$\begin{aligned} a_1 &= S - d_1, \\ a_2 &= S - d_2, \\ &\vdots \\ a_{10} &= S - d_{10}. \end{aligned}$$

Keď tieto rovnice sčítame, dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} &= 10S - d_1 - d_2 - \cdots - d_{10}, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} &= 9S. \end{aligned}$$

[4] bez ujmy na všeobecnosti

Bavíme sa tu o celých číslach a pravá strana je deliteľná deviatimi, čiže aj ľavá strana musí byť. Tým sme dostali nutnú podmienku. Aby k áčkam mohli existovať déčka musí byť súčet áčok (mojich štvorcov) deliteľný deviatimi. Je však táto podmienka aj postačujúca? Otázka teda znie, či deliteľnosť súčtu áčok deviatimi zaručuje existenciu déčok.
Ešte pred tým, ako si ju zodpovieme, musíme zmeniť predstavu o tom, čo znamená $S$. Odteraz si ho budeme predstavovať ako devätinu súčtu áčok, o ktorých existencii, narozdiel od déčok, nemáme pochýb. Už sme predsa zistili, že

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}}{9}.$$

Teraz už s kľudom môžeme povedať, že odpoveď na našu otázku znie áno. Ľahko si môžete overiť, že vyhovujúce déčka sú

$$\begin{aligned} d_1 &= S - a_1, \\ d_2 &= S - a_2, \\ &\vdots \\ d_{10} &= S - a_{10}. \end{aligned}$$

Nutná a postačujúca podmienka na existenciu déčok (desiatich celých čísel) je, aby bol súčet áčok (mojich štvorcov) deliteľný deviatimi.

**<u>Úloha č. 9:</u>** *Na matematickú konferenciu prišlo $n$ ľudí, ktorí sa vzájomne nepoznali. Každý si doniesol práve jednu svoju vizitku. Ak sa dvaja ľudia nepoznajú, môžu sa zoznámiť jedine výmenou vizitiek, ktoré majú práve pri sebe. Podobne, jediný spôsob, ako si môžu dvaja ľudia vymeniť vizitku, je, že sa zoznámia. Po pár hodinách zoznamovania dorazili dvaja oneskorenci. Dokážte, že s pomocou novopríchodzích môže týchto $n+2$ ľudí pokračovať v zoznamovaní tak, že každý dostane naspäť svoju vizitku*[5].

<u>Riešenie:</u> (opravoval Miki a Kozzy)
Predstavme si, že v momente, keď prídu dvaja oneskorenci (označme ich $A$ a $B$), sa všetci pochytajú za ruky nasledovne: Každý človek sa ľavou rukou chytí toho, kto má jeho vizitku, a pravou toho, koho vizitku práve má. Takto sa nám vytvoria nejaké kružnice. Žiaden človek nemôže byť v dvoch kružniciach naraz, lebo by musel jednou rukou držať dvoch ľudí.
Teraz ukážeme, že v každej kružnici vieme ľudí z tejto kružnice zoznámiť s oneskorencami $A$ a $B$ tak, aby každý z ľudí v kružnici mal na konci svoju vizitku. Označme ľudí v kružnici $x_1, x_2, \dots, x_k$, kde $x_i$ vlastní vizitku človeka $x_{i+1}$ (resp. $x_1$, ak $i = k$). $A$ si vymení vizitku s $x_1$. Potom si $B$ vymení vizitku s $x_2$, potom s $x_3$, potom s $x_4$ a tak ďalej, až kým si nevymení vizitku s $x_1$. Teraz si už len $A$ vymení vizitku s $x_2$ a konečne má každý z kružnice svoju vizitku.
Pozorný čitateľ si všimne, že na konci týchto výmen sa vizitka od $A$ dostala k $B$, bez toho, aby sa zoznámili. To ale nevadí, pretože postup s našou kružnicou opakujeme na všetky ďalšie kružnice. Takže na konci bude každý človek v kružnici mať svoju vizitku.
Môžu nastať dve možnosti:

1. $A$ aj $B$ budú mať svoje vyzitky. V tomto prípade sme úlohu vyriešili.

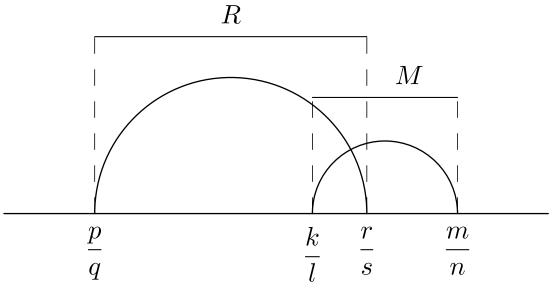
2. $A$ bude mať vizitku $B$ a $B$ vizitku $A$. Tak sa ešte $A$ s $B$ zoznámia.

Tým sme úlohu vyriešili. Zaradujme sa.

**<u>Úloha č. 10:</u>** *Na papieri máme nakreslenú číselnú os. Vyznačíme si na nej všetky racionálne čísla. Dva body $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ budú na číselnej osi tvoriť priemer kružnice práve vtedy, keď platí $ad - bc = \pm 1$. Do obrázka dokreslíme kružnice nad každým takýmto priemerom. Nájdite všetky body, ktoré ležia na aspoň dvoch kružniciach a neležia na číselnej osi.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Lietadlo a Matúš)
(Podľa *Adely Abaffyovej.*)
Prvé, čo by nás mohlo napadnúť pri takomto príklade, je skúsiť si nájsť nejaký bod, ktorý leží na aspoň dvoch kružniciach a zároveň neleží na číselnej osi. Chvíľu hľadáme, skúšame a kreslíme a žiadny taký bod nie a nie nájsť. Všimneme si však jednu zaujímavú vec. Aj keď sa nám nedarí nájsť dve kružnice, ktoré sa pretínajú, nachádzame veľa dvojíc kružníc, ktoré sa navzájom dotýkajú. Poďme sa teda pokúsiť dokázať, že taký bod neexistuje. Budeme postupovať sporom. Nech teda existujú dve kružnice, ktoré spĺňajú podmienku zo zadania a zároveň sa pretínajú mimo číselnej osi. Použijeme označenie ako na obrázku. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť kladné menovatele (rozmyslite si prečo).

[5] na konci sa nemusí nutne poznať každý s každým




Teraz si vyjadríme priemery kružníc z obrázka.

$$R = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{rq - ps}{sq} = \frac{1}{sq}$$

V poslednej úprave využijeme, rovnosť zo zadania a fakt, že polomer $R$ musí byť kladný. Totiž $s$ aj $q$ sú kladné, preto aj čitateľ $rq - ps = \pm 1$ musí byť kladný a rovný 1. Analogicky vyjadríme aj priemer druhej kružnice $M = 1/nl$. Body sme si označili tak, že $k/l$ leží medzi $p/q$ a $r/s$, preto

$$0 < \frac{k}{l} - \frac{p}{q} < R = \frac{1}{sq}.$$

Po úprave dostávame $0 < (kq - lp)/lq < 1/sq$ a keďže menovateľ $lq$ je kladný a celý zlomok $(kq - lp)/lq$ je kladný, tak aj čitateľ $kq - lp$ musí byť kladný. Lenže $k, q, l$ a $p$ sú celé čísla, takže $kq - lp$ je celé číslo. Vieme, že $kq - lp$ je kladné celé číslo, čiže $kq - lp \geq 1$. Z vyššie uvedenej nerovnosti potom dostávame

$$\frac{1}{lq} \leq \frac{kq - lp}{lq} < R = \frac{1}{sq},$$

odkiaľ $1/lq < 1/sq$, čiže $s < l$.
Ak analogicky zopakujeme tento postup pre kružnicu s priemerom $M$, tak dostaneme vzťah $s > l$. Že je to naozaj tak, nechávame ako cvičenie nedôverčivému čitateľovi (taký by mal byť každý).
Máme teda dve podmienky $s < l$ a $s > l$, ktoré sa navzájom vylučujú, a tak prichádzame k sporu s naším predpokladom, že nejaké dve kružnice sa pretínajú mimo číselnej osi. Takže množina všetkých bodov, ktoré ležia na aspoň dvoch kružniciach a zároveň neležia na číselnej osi, je prázdna.

**Úloha č. 11:** *V KMS je $n$ vedúcich. Každý z nich obľubuje iný druh ovocia a iný druh zeleniny. Iniciatívny redaktor časopisu Slniečko zistil, kto vedúcuje v KMS a aké druhy zeleniny a ovocia sú v obľube. Chcel urobiť prehľadnú tabuľku, v ktorej by bolo napísané, ktoré ovocie a zelenina patrí ktorému vedúcemu. Začal sa pýtať vedúcich, či v tabuľke k sebe patria dvojice položiek[6]. Na každú otázku dostal odpoveď „nie“. Koľko najmenej otázok musel redaktor položiť, aby mohol jednoznačne vyplniť tabuľku?*

Riešenie: (opravoval CD a Mišo)
Riešenie jedenástej úlohy malo dve časti: nájsť riešenie a ukázať, že to lepšie nejde. Úlohu si vieme zjednodušiť, ak si ju pekne interpretujeme. Celú situáciu si vieme predstaviť ako kocku $n \times n \times n$ poskladanú z malých kociek so stranou 1. Na $x$-ovej osi sú rôzni vedúci, na $y$-ovej ovocie a na $z$-ovej zelenina, každá malá kocka predstavuje nejakú trojicu vedúci-ovocie-zelenina. Otázkou sa pýtame na jednu dvojicu vedúci-ovocie, vedúci-zelenina alebo ovocie-zelenina. Dostaneme odpoveď nie, preto celú jednu dvojicu môžeme vylúčiť. Jednou otázkou tak škrtneme celý jeden rad malých kociek ležiaci na priamke rovnobežnej s jednou z osí $x$, $y$, $z$.
Najskôr by sme chceli zistiť, koľko najmenej otázok potrebujeme. Zoberme si dve *správne* (t.j. patria k sebe) trojice vedúci-ovocie-zelenina. V kocke $n \times n \times n$ sú to 2 rôzne malé kocky. Majú informácie o dvoch vedúcich, ovociach a zeleninách. Teraz zoberme všetky malé kocky, ktoré tiež majú informáciu vždy o jednom z tejto dvojice vedúcich, ovocí aj zelenín, len inak nakombinovanú. Spolu s prvými dvoma vytvárajú pomyselnú kocku $2 \times 2 \times 2$.
Z nej chceme vylúčiť nesprávne trojice. Na to potrebujeme aspoň 2 otázky. (Premyslite si aké.) Zároveň otázky, ktoré kladieme, majú jedno spoločné. Vždy sa pýtame na 2 veci, z ktorých jedna patrí do prvej správnej trojice a druhá do druhej. Keby sme totiž zobrali obe veci z jednej trojice, vyškrtli by sme tým správnu trojicu. Ak by jedna vec nebola z našich trojíc, kocku by to neovplyvnilo.
Z toho vyplýva, že dvojice správnych trojíc sa navzájom neovplyvňujú. Každý škrt musí obsahovať jednu informáciu z oboch trojíc, takže nezasahuje do inej dvojice trojíc. (Nemôžu mať dve rôzne dvojice 2 rovnaké prvky, lebo každý z vedúcich, ovocí aj zelenín je len v jednej kocke.) Na každú dvojicu správnych trojíc preto potrebujeme 2 otázky. Týchto dvojíc je $n(n-1)/2$, takže otázok je aspoň $n(n-1)$.
Teraz už vieme, že aspoň $n(n-1)$ otázok budeme potrebovať. Ak nájdeme spôsob pýtania sa, ktorým určíme všetky trojice na $n(n-1)$ otázok, máme dôkaz hotový. Jeden zo spôsobov pýtania sa je taký, že budeme postupne zisťovať,

[6]napríklad: Obľubuje Edo mrkvu? alebo: Patrí ananás k zeleru?

čo majú vedúci radi. Určíme si jedného vedúceho a budeme sa pýtať, aké ovocie má rád, až kým to nezistíme. Ak máme $n$ vedúcich, potrebujeme vylúčiť $n-1$ ovocí, takže sa musíme opýtať $n-1$ otázok. Potom si zoberieme druhého vedúceho. O jednom ovocí už vieme, kto ho má rád, takže už nám ostáva iba $n-1$ ovocí a stačí $n-2$ otázok. Tretieho vedúceho sa stačí spýtať $n-3$ otázok, štvrtého $n-4$, atď. Predposledného sa spýtame len raz a posledný má rád to, čo ostalo. Dokopy sme položili $(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+2+1 = n(n-1)/2$ otázok. Zeleninu určíme rovnakým spôsobom. Spolu s ovocím nám to dá $2 \cdot n(n-1)/2 = n(n-1)$ otázok.
Ukázali sme, že potrebujeme aspoň $n(n-1)$ otázok, a aj, že nám toľko stačí. Dôkaz je teda hotový.

## Výsledková listina

**kategória BETA**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | $k_\beta$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Vodička Martin | 4. | GAlej KE | 10 | 12 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | 45 | 135 |
| 2. | Šafin Jakub | 4. | GPH MI | 8 | 6 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 | | 43 | 131 |
| 3. | Krajčiová Katarína | 2. | GAlej KE | 4 | 1 | | 9 | 9 | 9 | 9 | | 3 | | 39 | 129 |
| 4. | Kossaczká Marta | 4. | Gamča BA | 10 | 8 | | | 9 | 9 | 9 | | 5 | | 32 | 121 |
| 5. | Puza Marko | 3. | GPoš KE | 5 | 1 | | 8 | 7 | 9 | 9 | | | | 33 | 120 |
| 6. | Psota Miroslav | 3. | GHlin ZA | 7 | 2 | | 4 | 9 | 7 | 9 | | | | 29 | 115 |
| 7. | Pokrývka Filip | 3. | G Bánovce | 7 | 2 | | 8 | 9 | 9 | 9 | | 3 | | 38 | 113 |
| 8. | Bui Truc Lam Michal | 2. | Gamča BA | 4 | 3 | | | 7 | 7 | 9 | | 3 | | 26 | 112 |
| 9. | Horváth Samuel | 3. | GPár NR | 6 | 1 | | 8 | 9 | 9 | 6 | | 2 | | 34 | 108 |
| 10. | Jurina Šimon | 3. | Gamča BA | 6 | 2 | | 9 | 8 | 9 | 8 | 3 | | | 37 | 105 |
| 11. | Kováčová Barbora | 3. | ŠPMNDG BA | 5 | 0 | 4 | 9 | | 6 | 9 | | 5 | | 33 | 104 |
| 11. | Šimková Ľudmila | 3. | GPár NR | 7 | 2 | | | 9 | 5 | 9 | | | | 23 | 104 |
| 13. | Hanzely Filip | 4. | GAP SB | 10 | 7 | | | 6 | 9 | 9 | | | | 24 | 101 |
| 14. | Stankovič Miroslav | 3. | GPoš KE | 7 | 7 | | | 9 | 9 | | | | | 18 | 99 |
| 15. | Lipovský Mário | 3. | GJH BA | 5 | 1 | | 3 | 9 | | 9 | | | | 21 | 98 |
| 16. | Bohdal Ondrej | 2. | GJH BA | 4 | 0 | 4 | 7 | 7 | 6 | 2 | | | | 26 | 96 |
| 16. | Šimsa Štěpán | 4. | Litoměřice ČR | 8 | 9 | | | 9 | 9 | 9 | | | | 27 | 96 |
| 18. | Hrivová Ivona | 3. | GVO ZA | 7 | 2 | | 2 | 9 | 5 | 2 | | 3 | | 21 | 92 |
| 19. | Ralbovský Peter | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | 0 | 8 | 9 | 7 | | | | | | 24 | 90 |
| 20. | Hlaváčik Matúš | 4. | GAlej KE | 8 | 3 | | | 9 | 9 | 9 | | | | 27 | 87 |
| 21. | Hanzely Slavomír | 1. | GAP SB | 1 | 0 | 7 | 6 | 7 | 6 | 9 | | | | 35 | 85 |
| 21. | Prívozník Matej | 3. | GJH BA | 7 | 2 | | 9 | 8 | 9 | 9 | | 3 | | 38 | 85 |
| 23. | Benešová Katarína | 4. | ŠPMNDG BA | 8 | 2 | | 9 | 4 | 9 | 9 | | | | 31 | 84 |
| 23. | Trembecký Richard | 4. | GAlej KE | 5 | 1 | | 3 | 9 | | | | | | 12 | 84 |
| 25. | Kobák Michal | 3. | Gamča BA | 4 | 1 | | 9 | 8 | 5 | | | | | 22 | 82 |
| 26. | Lâm Tuân Dûng | 2. | GJH BA | 4 | 0 | 4 | | 7 | | | | 2 | | 13 | 81 |
| 27. | Liu Zhen Ning Dávid | 3. | Gamča BA | 5 | 3 | | | | | | | | | 0 | 79 |
| 28. | Buráň Michal | 4. | G JAK CR | 4 | 0 | 9 | 4 | | | | | | | 13 | 77 |
| 29. | Korbela Michal | 3. | G Bánovce | 7 | 2 | | 3 | 5 | | | | 2 | | 10 | 75 |
| 30. | Ječmenová Andrea | 3. | GVO ZA | 6 | 1 | | 9 | 8 | | 5 | | 2 | | 24 | 73 |
| 30. | Matejovičová Tatiana | 3. | GJH BA | 6 | 3 | | | | 9 | 0 | | 2 | | 11 | 73 |
| 32. | Nociarová Jela | 4. | GBST LC | 7 | 1 | | 7 | 8 | | | 8 | | | 23 | 70 |
| 33. | Santrová Michaela | 2. | GMH Trstená | 4 | 0 | 4 | 7 | | | | | 2 | | 13 | 68 |
| 33. | Tomašec Samuel | 3. | GVar ZA | 5 | 0 | 2 | 2 | 7 | | | | 2 | | 13 | 68 |
| 35. | Dráček František | 2. | GŠkol PB | 4 | 0 | 4 | 2 | 2 | | | 3 | | | 11 | 67 |
| 36. | Daniel Mark | 3. | GPár NR | 6 | 1 | | 5 | 7 | 5 | 0 | | | | 17 | 66 |
| 36. | Mečiar Adam | 2. | GVBN PD | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 66 |
| 36. | Sučík Samuel | 2. | GJH BA | 4 | 2 | | | | | | | | | 0 | 66 |
| 36. | Svoboda Josef | 4. | Frýdlant ČR | 7 | 5 | | | 6 | | | | | | 6 | 66 |
| 40. | Nepšinská Silvia | 2. | GJCh BR | 4 | 0 | | 7 | | 5 | 1 | | 2 | | 15 | 65 |
| 41. | Kopf Daniel | 1. | G Slez ČR | 1 | 0 | 9 | 9 | | | | | | | 18 | 63 |
| 41. | Krakovská Hana | 3. | Gamča BA | 6 | 1 | | 9 | 9 | 5 | 5 | | | | 28 | 63 |
| 43. | Murin Martin | 2. | GJH BA | 4 | 0 | 4 | 2 | 2 | | | | 2 | | 10 | 62 |
| 43. | Prešinská Kristína | 2. | GPár NR | 4 | 0 | 6 | 8 | 0 | 3 | 0 | | | | 17 | 62 |
| 45. | Bafrnec Matúš | 2. | GPár NR | 3 | 0 | 4 | 2 | 1 | 3 | 0 | | | | 10 | 60 |
| 45. | Mores Martin | 3. | GVar ZA | 5 | 0 | 4 | 9 | 7 | | | | | | 20 | 60 |
| 47. | Krakovská Ema | 2. | Gamča BA | 3 | 0 | 9 | 8 | 7 | | | | | | 24 | 58 |
| 48. | Kluvanec Roman | 2. | GPár NR | 3 | 0 | 4 | 7 | | 4 | | | | | 15 | 55 |
| 49. | Abaffyová Adela | 3. | G Tvrdošín | 3 | 0 | | | | | | 9 | 9 | | 18 | 54 |
| 50. | Gafurov Askar | 4. | Gamča BA | 7 | 3 | | | 9 | 9 | | | | | 18 | 52 |
| 51. | Magyarová Zuzana | 3. | GBST LC | 6 | 1 | | 2 | 8 | 1 | | | | | 11 | 51 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $\mathbf{k}_\alpha$ | $\mathbf{k}_\beta$ | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51. | Tesař Emanuel | 1. | GBST LC | 1 | 0 | 7 | 2 | 9 | 6 | | | | | 24 | 51 |
| 53. | Kňaze Adam | 2. | GJCh BR | 4 | 0 | 3 | 3 | 2 | | 3 | | 2 | | 13 | 50 |
| 54. | Rapavý Martin | 3. | GAlej KE | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 49 |
| 55. | Koščo Marek | 3. | GVar ZA | 3 | 0 | 4 | 3 | 8 | | 0 | | 0 | | 15 | 48 |
| 56. | Dargaj Jakub | 3. | GPoš KE | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 44 |
| 57. | Madaj Pavel | 2. | GVBN PD | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 43 |
| 58. | Králik Matej | 2. | GJH BA | 4 | 0 | 4 | | | | | | 2 | | 6 | 41 |
| 58. | Marčeková Katarína | 2. | GPár NR | 3 | 0 | | 1 | | 5 | | | 2 | | 8 | 41 |
| 58. | Mikulec Jaromír | 2. | GsvJ NM | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 41 |
| 61. | Kováčová Mária | 2. | GsvCM NR | 3 | 0 | | 3 | 2 | | | | | | 5 | 40 |
| 61. | Steinhauserová Anna | 3. | G Dacice | 3 | 0 | 5 | 3 | | | | | | | 8 | 40 |
| 63. | Bačinská Irena | 3. | ŠPMNDG BA | 4 | 1 | | | | | | | | | 0 | 36 |
| 63. | Batmendijn Eduard | 2. | CGsvM SL | 5 | 3 | | | 9 | 9 | 9 | | 9 | | 36 | 36 |
| 63. | Ivan Lukáš | 3. | GJH BA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 36 |
| 63. | Le Anh Dung | 3. | Tachov ČR | 5 | 4 | | | | | | | | | 0 | 36 |
| 67. | Petrucha Jaroslav | 4. | GMet BA | 9 | 3 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 67. | Švarc Radovan | 2. | Česká Třebová | 2 | 1 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 69. | Žárský Jan | 2. | Kopřivnice ČR | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 30 |
| 70. | Jarošová Dorota | 2. | GAlej KE | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 28 |
| 71. | Steinhauser Václav | -1. | G Dacice | -1 | 0 | | 2 | 1 | | | | | | 3 | 27 |
| 72. | Macko Vladimír | 4. | GĽŠ ZV | 8 | 6 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 73. | Dendis Tomáš | 2. | BiG Sučany | 2 | 0 | | | | | | | 1 | | 1 | 23 |
| 73. | Štěpánek Martin | 2. | Příbor ČR | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 23 |
| 75. | Labjaková Gabriela | 2. | GMH Trstená | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 22 |
| 76. | Barbora Dávid | 2. | GFS Nová Baňa | 3 | 0 | | | | | | | 2 | | 2 | 21 |
| 77. | Smolík Milan | 4. | GJH BA | 7 | 1 | | | | | | | | | 0 | 18 |
| 78. | Halamová Mária | 2. | GVO ZA | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 17 |
| 78. | Polovka Maroš | 3. | GKuk PP | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 17 |
| 80. | Kašša Ladislav | 1. | G Šamorín | 1 | 0 | 4 | | | | | | | | 4 | 16 |
| 80. | Rizman Daniel | 3. | GVar ZA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 80. | Santer Martin | 4. | GMH Trstená | 7 | 0 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 83. | Šandalová Michaela | 3. | ŠPMNDG BA | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 15 |
| 84. | Bieliková Michaela | 3. | GVM SE | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 13 |
| 84. | Straková Valentína | 3. | GVM SE | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 13 |
| 86. | Oravec Matej | 2. | GVar ZA | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 87. | Čatlošová Katarína | 3. | GFGL BA | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 88. | Ivanov Marián | 4. | GJH BA | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 88. | Roštár Marek | 4. | 1SG BA | 5 | 0 | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 88. | Veselá Simona | 2. | GJH BA | 2 | 0 | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 91. | Blišáková Katarína | 3. | SŠS NR | 3 | 0 | | | | | | | | | 0 | 9 |
| 91. | Kociánová Barbora | 4. | GZlin | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 9 |
| 93. | Šromeková Karolína | 3. | ŠPMNDG BA | 6 | 0 | | | | | | | | | 0 | 7 |
| 94. | Klimkovič Anna-Mária | 3. | ŠPMNDG BA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 6 |
| 95. | Palko Maximilián | 3. | 1SG BA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 4 |
| 96. | Velich Tomáš | 1. | GJH BA | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | 0 | 2 |
| 97. | Mikel Jan | 4. | G Roznov | 4 | 1 | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 97. | Ondráš Ján | 3. | Gamča BA | 4 | 0 | | | | | | | | | 0 | 0 |

### kategória ALFA, Bratislava

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Frankovská Zuzana | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 9 | 9 | 9 | 4 | | | | 113 |
| 2. | Oravkin Eduard | 1. | 1SG BA | 1 | 9 | 8 | 9 | 6 | | 3 | | | 107 |
| 3. | Petráš Peter Pavel Arthur | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | 9 | 9 | 4 | | 4 | 9 | | | 105 |
| 4. | Choma Matej | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 9 | 2 | 8 | 4 | | | | 103 |
| 5. | Ďuratná Petra | 2. | ŠPMNDG BA | 3 | | | 9 | 9 | 9 | 6 | | | 100 |
| 6. | Szalay Erik | 3. | ŠPMNDG BA | 3 | | | 9 | 9 | 2 | 6 | 8 | | 96 |
| 7. | Bodík Juro | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 9 | 9 | 7 | 4 | | | | 93 |
| 7. | Kojda Jakub | 1. | ŠPMNDG BA | 0 | 7 | 8 | 4 | 3 | 4 | 3 | | | 93 |
| 9. | Fabšíková Nina | 1. | 1SG BA | 1 | 9 | 8 | 4 | 5 | | 1 | | | 89 |
| 10. | Pieš Adrián | 3. | ŠPMNDG BA | 3 | | | 9 | 9 | 3 | 9 | | | 82 |
| 10. | Trenčanská Tereza | 1. | Gamča BA | 1 | 9 | 8 | 4 | 8 | | | 2 | | 82 |
| 12. | Murín Marek | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 9 | 9 | 4 | | 2 | | | 80 |
| 13. | Halabrin Juraj | 1. | GJH BA | 1 | 2 | 0 | 9 | 6 | | 0 | | | 75 |
| 14. | Pilňan Branislav | 2. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | 8 | 4 | | | | 71 |
| 15. | Ralbovský Peter | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | | | | 8 | 9 | 7 | | 67 |
| 16. | Velich Tomáš | 1. | GJH BA | 1 | 2 | 7 | 2 | 2 | 0 | | | | 56 |
| 17. | Krakovská Ema | 2. | Gamča BA | 3 | | | | | 9 | 8 | 7 | | 49 |
| 17. | Zeman Matúš | 1. | 1SG BA | 1 | 4 | 7 | 1 | | | | | | 49 |
| 19. | Suchý Daniel | 2. | Gamča BA | 2 | | | | | | | | | 40 |
| 20. | Sůra Tomáš | 1. | 1SG BA | 1 | | | | | | | | | 35 |
| 21. | Camara Anna | 2. | GMet BA | 2 | | 7 | | 2 | | | | | 32 |
| 21. | Lihotský Samuel | 1. | 1SG BA | 1 | | | | | | | | | 32 |
| 21. | Strakáčová Natália | 1. | Gamča BA | 1 | | | | | | | | | 32 |
| 24. | Gazdíková Ema Mária | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | | | | | | | | | 31 |
| 25. | Páleník Michal | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | | | | | | | | | 29 |
| 26. | Tóthová Andrea | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | | | | | | | | | 24 |
| 27. | Veselá Simona | 2. | GJH BA | 2 | | | | | | | | | 21 |
| 28. | Hrdina Jakub | 3. | GJH BA | 3 | | | 2 | 1 | | | 1 | | 20 |
| 28. | Martinková Sandra | 2. | GJH BA | 2 | | | | | | | | | 20 |
| 30. | Čatlošová Katarína | 3. | GFGL BA | 3 | | | | | | | | | 12 |
| 31. | Híveš Zdenko | 3. | 1SG BA | 3 | | | | | | | | | 6 |

### kategória ALFA, západ

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Tódová Lucia | 1. | GPár NR | 1 | 9 | 9 | 9 | | | 9 | 8 | | 122 |
| 2. | Konček Marián | 2. | G1.máj MA | 2 | | 9 | 9 | 7 | 4 | 7 | | | 110 |
| 3. | Bafrnec Matúš | 2. | GPár NR | 3 | | | 9 | 8 | 4 | 2 | 1 | | 91 |
| 4. | Kluvanec Roman | 2. | GPár NR | 3 | | | 9 | 4 | 4 | 7 | | | 75 |
| 5. | Štefkovič Ján | 3. | G Bánovce | 3 | | | 9 | 5 | 4 | 2 | 8 | | 68 |
| 6. | Kašša Ladislav | 1. | G Šamorín | 1 | | 8 | 9 | 0 | 4 | | | | 63 |
| 7. | Marčeková Katarína | 2. | GPár NR | 3 | | | 4 | 1 | | 1 | | | 58 |
| 8. | Mečiar Adam | 2. | GVBN PD | 3 | | | | | | | | | 43 |
| 9. | Kováčová Mária | 2. | GsvCM NR | 3 | | | | 8 | | 3 | 2 | | 38 |
| 10. | Gerberová Michaela | 1. | G Bánovce | 1 | | | | | | | | | 37 |
| 11. | Zachara Samuel | 1. | PiarG TN | 1 | | | | | | | | | 32 |
| 12. | Madaj Pavel | 2. | GVBN PD | 3 | | | | | | | | | 29 |
| 13. | Hladká Barbora | 2. | GPár NR | 2 | | | | | | | | | 28 |
| 14. | Escherová Eva | 1. | G Bánovce | 1 | | | | | | | | | 21 |
| 15. | Blišáková Katarína | 3. | SŠS NR | 3 | | | | | | | | | 20 |

### kategória ALFA, stred

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Branišová Eva | 1. | GVO ZA | 1 | 9 | 9 | 9 | 7 | 4 | 2 | 1 | | 112 |
| 2. | Tesař Emanuel | 1. | GBST LC | 1 | 4 | 8 | 9 | | 7 | 2 | 9 | | 108 |
| 3. | Kulla Filip | 1. | BiG Sučany | 1 | 9 | 9 | 9 | 9 | 4 | | | | 106 |
| 4. | Koščo Marek | 3. | GVar ZA | 3 | | | 4 | | 4 | 3 | 8 | | 64 |
| 5. | Gašpárek Miroslav | 3. | SG ZA | 3 | | | 4 | 4 | 4 | 0 | 6 | | 62 |
| 6. | Sanigová Lucia | 2. | GVar ZA | 2 | | 4 | 9 | | | | 3 | | 59 |
| 7. | Slivka Norbert | 3. | GJGT BB | 3 | | | 3 | 3 | 7 | 2 | | | 58 |
| 8. | Kudelčíková Martina | 1. | GVO ZA | 1 | 2 | 8 | | | | | | | 47 |
| 9. | Hradňanská Petra | 2. | GVar ZA | 2 | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | | | | 41 |
| 10. | Roch Oliver | 2. | G Bytca | 2 | | 7 | 3 | 0 | 0 | | | | 40 |
| 11. | Pavčík Richard | 1. | GJGT BB | 1 | | | | | | | | | 38 |
| 12. | Šeligová Kristína | 2. | GsvFA ZA | 2 | | | | | | | | | 35 |
| 13. | Včelková Veronika | 2. | GPOH DK | 2 | | 4 | 1 | | | 0 | 0 | | 30 |
| 14. | Janiga Martin | 2. | GPOH DK | 2 | | | | | | | | | 25 |
| 15. | Kormaňák Michal | 1. | GMRŠ ZH | 1 | | 0 | 4 | | | | | | 21 |
| 16. | Benčová Katarína | 2. | GMH Trstená | 2 | | | | | | | | | 20 |
| 16. | Chmola Martin | 1. | GFS Nová Baňa | 1 | | 1 | 1 | 0 | 0 | | 0 | | 20 |
| 18. | Barbora Dávid | 2. | GFS Nová Baňa | 3 | | | | 9 | | | | | 19 |
| 18. | Dendis Tomáš | 2. | BiG Sučany | 2 | | | | | | | | | 19 |
| 18. | Jančár Ján | 2. | GVar ZA | 2 | | | | | | | | | 19 |
| 18. | Labjaková Gabriela | 2. | GMH Trstená | 3 | | | | | | | | | 19 |
| 22. | Bátrna Jozef | 2. | G Bytca | 2 | | 6 | | | | | | | 17 |
| 22. | Franko Marián | 2. | GPOH DK | 2 | | | | | | | | | 17 |
| 24. | Halamová Mária | 2. | GVO ZA | 3 | | | | | | | | | 14 |
| 25. | Oravec Matej | 2. | GVar ZA | 3 | | | | | | | | | 9 |
| 25. | Paišová Dominika | 2. | G Bytca | 2 | | | | | | | | | 9 |
| 27. | Baránek Martin | 2. | GVar ZA | 2 | | | | | | | | | 6 |
| 28. | Michálek Tomáš | 2. | G Bytca | 2 | | 0 | | 0 | | | | | 2 |
| 29. | Abaffyová Adela | 3. | G Tvrdošín | 3 | | | | | | | | | 0 |
| 29. | Sokolová Nikola | 2. | GHlin ZA | 2 | | | | | | | | | 0 |

### kategória ALFA, východ

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Hanzely Slavomír | 1. | GAP SB | 1 | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 | 6 | 7 | | 130 |
| 2. | Semanišiová Žaneta | 1. | GAlej KE | 1 | 9 | 9 | 9 | | 9 | 9 | | | 128 |
| 3. | Mišlanová Kristína | 1. | GAlej KE | 1 | 9 | 8 | 7 | | | 9 | 3 | | 108 |
| 4. | Micheľová Henrieta | 1. | GAlej KE | 1 | 8 | 9 | 4 | | | 1 | 1 | | 106 |
| 5. | Feciskaninová Soňa | 1. | GAlej KE | 1 | 9 | 8 | 9 | | 8 | | 9 | | 90 |
| 6. | Kurimský Ján | 1. | GsvMo | 1 | | 9 | 9 | | 4 | | | | 83 |
| 7. | Lenárt Patrik | 1. | GPM KE | 1 | 7 | | | | 3 | | 1 | | 71 |
| 8. | Bilý Ondrej | 1. | GLS HE | 1 | | | | | | | | | 35 |
| 9. | Lukáč Jakub | 3. | GKuk PP | 3 | | | | | | | | | 28 |
| 10. | Jarošová Dorota | 2. | GAlej KE | 3 | | | | | | | | | 15 |
| 11. | Ženčuchová Andrea | 2. | GJAR PO | 3 | | | | | | | | | 3 |

### kategória ALFA, zahraničie

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $k_\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Žídek Matěj | 1. | Frýdlant ČR | 1 | 9 | 9 | 9 | 9 | 3 | 9 | | | 132 |
| 2. | Kopf Daniel | 1. | G Slez ČR | 1 | | 8 | 9 | 6 | 9 | 9 | | | 118 |
| 3. | Steinhauser Václav | -1. | G Dacice | -1 | 4 | 8 | 4 | 9 | | 2 | 1 | | 68 |
| 4. | Krchňák Václav | 1. | Brno ČR | 1 | 9 | | | | | | | | 62 |
| 5. | Steinhauserová Anna | 3. | G Dacice | 3 | | | 9 | 9 | 5 | 3 | | | 59 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | **$k_\alpha$** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6. | Gajdušek Pavel | 1. | G Ost - Por | 1 | | | | | | | | | 38 |
| 7. | Kopfová Lenka | -2. | G Slez ČR | -2 | | | | | | | | | 31 |
| 8. | Švarc Radovan | 2. | Česká Třebová | 2 | | | | | | | | | 11 |