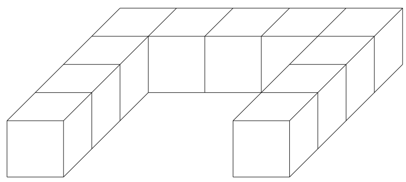
Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2013/2014

Úloha č. 1: *Biliardový stôl číslo 3 v hoteli Lexington bol pôvodne obyčajný obdĺžnikový stôl so štyrmi rovnako dlhými nohami. Jedného dňa mu z každej nohy niekto kúsok odrezal. Páchateľ to urobil tak umne, že stôl sa vôbec nekýve. Na mieste činu sa podarilo zaistiť tri odrezky s dĺžkami 8, 9 a 10 cm. Štvrtý odrezok si vzal páchateľ ako suvenír. Polícia zadržala niekoľkých podozrivých s podivnými odrezkami vo vreckách. Pomôžte im usvedčiť pravého páchateľa a nájdite všetky rôzne dĺžky, ktoré môže mať štvrtý odrezok.*

Riešenie: (opravovala Foxie)
Zlodej odrezal odrezky tak, aby sa stôl nekýval. To znamená, že žiadna noha stola sa neocitne vo vzduchu, keď sú ostatné tri na zemi — štyri konce nôh tvoria spolu jednu plochu.
Aby sme to dosiahli, uvedomme si, že ak sa stôl kýve, jedna uhlopriečka ostáva pevná a druhá sa kýve z jednej nohy na druhú. Predstavme si, že chceme pridať nohu do stredu stola tak, aby bola presne po zem. Aká by mala byť jej dĺžka? Stred stola je zároveň aj stredom uhlopriečky, a keď chceme, aby boli naraz na zemi nohy z krajov uhlopriečky aj tá zo stredu, tak noha v strede musí mať polovicu súčtu dĺžok tých na krajoch. Uhlopriečky sú dve, takže jediná možnosť je, že sa tie súčty budú v oboch prípadoch rovnať.
Dospeli sme teda k tomu, že súčet dĺžok nôh na uhlopriečkach musí byť rovnaký. Keď si situáciu predstavíme s tou pomocnou nožičkou v strede, tak vidíme, že v takom prípade naozaj nie je priestor na kývanie z nohy na nohu a dokonca všetkých päť nôh je naraz na zemi.
Pozrieme sa teraz na jednotlivé možnosti uhlopriečok: 8 a 9 cm, 8 a 10 cm, 9 a 10 cm. V prvom prípade má tretia noha dĺžku 10 cm a platí, že $8+9=10+x$, z čoho máme $x=7$ cm. V druhom prípade má tretia noha dĺžku 9 cm a $8+10=9+y$, z čoho máme $y=9$ cm (v zadaní sa nikde nepíše, že by sa dĺžky odrezkov nemohli opakovať). V poslednom prípade $9+10=8+z$, a teda $z=11$ cm. Teda, možné dĺžky posledného odrezku sú 7, 9 a 11 cm.

Úloha č. 2: *Mám tu kváder zložený z $3\times4\times5$ drevených kociek. Koľko najviac môžem z týchto kociek odobrať, aby som dostal súvislú stavbu, ktorá bude mať rovnaký povrch ako pôvodný kváder? Kocky sú k sebe prilepené tak, že keď chcem ktorúkoľvek odobrať, tak sa mi to podarí, ale nemusím sa báť, že by sa mi stavba sama od seba rozpadla.*



Riešenie: (opravovali Murko a Betka)
Možností, ako riešiť túto úlohu bolo viacero. Načrtneme tu jednu, ktorá bola vcelku jednoduchá.
Skúsme ako prvé porozmýšľať nad tým, čo nám vlastne zostane z kvádra, keď odoberieme maximálny počet kociek. Dostaneme útvar, ktorý je súvislý (teda každá kocka je spojená aspoň jednou stenou s inou kockou) a má povrch 94.
Taktiež o ňom vieme, že pokiaľ by sme ubrali čo i len jednu kocku, výsledný útvar by už nesplnil naše požiadavky. To je však to isté, ako keď si povieme, že hľadáme minimálny počet kociek potrebných na postavenie stavby s týmito vlastnosťami. Avšak táto úloha je už o čosi jednoduchšia.
Ako teda z minimálneho počtu kociek vybudujeme súvislú stavbu s predpísaným povrchom? Budeme sa snažiť z minima kociek vyťažiť maximálny možný povrch. Začneme s jednou kockou, z nej vieme do povrchu zarátať 6 stien, ak je voľne stojaca. Akonáhle k nej však pripojíme ďalšiu, od povrchu sa jedna z týchto stien odpočíta a pridá sa 5 stien novej kocky, takže sa v konečnom dôsledku pridajú 4 steny. Keď budeme takto postupne prikladať ďalšie a ďalšie kocky, tak sa bude diať niečo podobné a vlastne každou kockou pridáme maximálne 4 steny k povrchu. Potom stavba z n kociek bude mať povrch maximálne $6+4\cdot(n-1)=4n+2$ (začínali sme so 6 stenami a vždy sme pridali maximálne ďalšie 4).
V našom prípade je povrch 94. Takže chceme aby $4n+2=94$, z čoho dostaneme, že $n=23$. Teda minimálny potrebný počet kociek je 23.
Zostáva nám už len zistiť, či vieme takúto stavbu naozaj dostať odoberaním kociek z kvádra. Keď sa s ním trošku pohráme, zistíme, že áno. Jedna z možností je spojiť dve „U-čka" (viď obrázok) jednou kockou.
Samozrejme nesmieme zabudnúť na odpoveď. Keďže minimálny počet kociek je 23, vieme odobrať maximálne 37 kociek.

Úloha č. 3: *Nájdite najväčšie prirodzené číslo, ktoré delí výraz $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$ pre všetky prirodzené čísla a, b, c, d.*

Riešenie: (opravovali Veronika a JeFo)
Na začiatok si skúsime dosadiť zopár čísel (napr. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$). Všimnime si, že po dosadení je výraz $V = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$ v každom prípade deliteľný aspoň číslom 12. Taktiež si môžeme všimnúť, že pre každé štyri po sebe idúce čísla je hodnota výrazu $V = \pm 12$. Uvedomíme si, že hľadané najväčšie prirodzené číslo, ktoré delí výraz V, nemôže byť väčšie ako 12, inak by nedelilo číslo 12.
Dvanástka sa tu začala objavovať dáko často, skúsme dokázať, že je nami hľadané číslo pre ľubovoľné čísla a, b, c, d. Číslo je deliteľné dvanástimi, keď je deliteľné tromi a súčasne štyrmi. Ako prvé dokážeme deliteľnosť tromi.
Keď delíme číslo tromi, zvyšok môže byť 0, 1 alebo 2. Ak máme teda štyri čísla, tak (z Dirichletovho princípu) určite existujú aspoň dve, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to čísla a, b. Potom rozdiel týchto čísel $a-b$ je určite deliteľný tromi ($a = 3k+z$, $b = 3l+z$, $a-b = (3k+z)-(3l+z) = 3(k-l)$).
Nakoľko aspoň jedna zátvorka je deliteľná tromi, aj celý výraz V je deliteľný tromi.
Ďalej ukážeme, že V je deliteľné štyrmi. Pozrime sa na paritu čísel a, b, c, d. Vieme, že rozdiel dvoch čísel s rovnakou paritou je párny a rozdiel dvoch čísel s rôznou paritou je nepárny. Rozoberme si všetky možnosti rozdelenia parity medzi čísla a, b, c, d. Môžu nastať tieto prípady:

1. Čísla a, b, c, d sú všetky párne alebo nepárne, t. j. majú rovnakú paritu. Rozdiel každej dvojice je párny, a teda aj celý výraz V je určite deliteľný aspoň 2^6.
2. Jedno číslo, napr. a, je inej parity než ostatné tri čísla. Potom rozdiely $(a-b)$, $(d-a)$, $(a-c)$ sú nepárne. Ostatné rozdiely $(b-c)$, $(c-d)$, $(b-d)$ sú párne. Celý výraz je deliteľný aspoň 2^3.
3. Dve čísla, napr. a, b, majú jednu paritu, a druhé dve čísla majú druhú paritu. Potom rozdiely $(a-b)$, $(c-d)$ sú párne. Zvyšné rozdiely $(b-c)$, $(d-a)$, $(a-c)$, $(b-d)$ sú nepárne. Výraz V je určite deliteľný aspoň 2^2.

Ak sa pozrieme na všetky tri prípady, tak vidíme, že výraz V je vždy deliteľný aspoň $2^2 = 4$.
Dokázali sme, že výraz V je deliteľný 3 a zároveň 4, teda je deliteľný aj 12. Na konci prvého odseku sme si uvedomili, že nami hľadané číslo nemôže byť väčšie ako 12 a práve sme ukázali, že musí byť deliteľné číslom 12, teda nemôže byť ani menšie (v absolútnej hodnote (viď. komentár)). Jediná možnosť, ktorá nám ostáva je, že nami hľadané číslo je práve 12.

Komentár: Ak hovoríme o tom, že číslo nemôže byť menšie, myslíme tým „menšie v absolútnej hodnote“, lebo číslo -12 je taktiež deliteľné 12. Veľa z vás uvažovalo, že samotný výraz V nemôže byť záporný, lebo záporné čísla nie sú deliteľné, ale oni sú. Rovnako aj nula je deliteľná, dokonca ľubovoľným číslo. Ale keďže tieto úvahy nemajú veľký vplyv na riešenie, nestrhávali sme za ne body.

Úloha č. 4: *Dajú sa do mriežky 9×9 vpísať čísla od 1 do 81, každé práve raz, tak, aby súčin čísel v prvom riadku bol rovnaký ako súčin čísel v prvom stĺpci, súčin v druhom riadku bol rovnaký ako súčin v druhom stĺpci, a tak ďalej, až aby bol v deviatom riadku rovnaký súčin ako v deviatom stĺpci?*

Riešenie: (opravovali Berenito a Barča)
Všetci ste správne usúdili, že čísla sa nedajú zapísať do mriežky tak, aby bolo zadanie splnené. Prečo?
Mnohí si uvedomili, že keď všetky čísla od 1 do 81 napíšeme v tvare súčinu prvočísel, tak niektoré prvočísla sa tam vyskytnú len raz.
Sú to prvočísla, ktoré sa nachádzajú medzi 81/2 a 81 a je ich presne 10 (sú to 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73 a 79).
Najbližšie číslo, ktoré by ich mohlo obsahovať v prvočíselnom rozklade, je ich dvojnásobok. Avšak dvojnásobky všetkých týchto čísel sú väčšie ako 81.
Čo by sa stalo, keby sa takéto prvočíslo nachádzalo v prvom stĺpci, ale v prvom riadku by už nebolo? Výsledný súčin čísel v riadku a stĺpci by sa nemohol rovnať, pretože rozklad na prvočísla je až na poradie činiteľov jednoznačný, teda dve rovnaké čísla nemôžu mať rôzny prvočíselný rozklad.
Naša jediná nádej je teda umiestniť spomínané prvočísla na diagonálu, na miesto, ktoré je spoločné pre k-ty stĺpec aj riadok. A opäť tu máme problém. V mriežke 9×9 máme miesto len pre 9 diagonálnych prvkov a našich „problémových“ prvočísel je až 10.
Mriežku teda daným spôsobom vyplniť nevieme.

Úloha č. 5: *Dočítala sa, že zoo má tvar konvexného mnohouholníka, ktorý sa dá rozdeliť na niekoľko rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Hneď ju zaujalo, koľko asi tento mnohouholník môže mať vrcholov. Pomôžte jej nájsť všetky možnosti.*

Riešenie: (opravovali Plutvička a Katka J.)
Najprv sa zamyslime nad veľkosťami vnútorných uhlov v našom mnohouholníku. Každý vnútorný uhol mnohouholníka je zložený z vnútorných uhlov niekoľkých (aspoň jedného) trojuholníka. Pravouhlé rovnoramenné trojuholníky majú vnútorné uhly veľkostí 45°, 45° a 90°. Ďalej vieme, že náš mnohouholník je konvexný, teda každý jeho vnútorný uhol je menší ako 180° (ak je rovný 180°, nejde o vnútorný uhol). Vnútorné uhly mnohouholníka teda môžu mať veľkosti 45°, 90° a 135°. (Chceme totiž nakombinovať uhly s veľkosťami 45° a 90°, pričom sme ohraničení

zdola 45° kvôli pravouhlým trojuholníkom a zhora 180° kvôli konvexnosti.) Ešte využijeme známy fakt, že súčet uhlov v konvexnom n-uholníku je $n \cdot 180° - 360°$. Na výber sú dve riešenia: jedno také geometrickejšie a jedno písmenkové.

1. spôsob riešenia:
Hľadáme všetky možné n-uholníky s veľkosťami vnútorných uhlov 45°, 90° a 135°. Bolo by fajn, keby sme hľadané n vedeli nejako ohraničiť a potom overili, že sa n-uholníky, ktoré sme teoreticky našli, dajú skutočne zostrojiť (na to niektorí z vás zabudli). Ohraničenie zdola je samozrejme 3.
Už vieme, že súčet uhlov n-uholníka je $n \cdot 180° - 360°$. Ale ten náš n-uholník môže mať súčet uhlov najviac $n \cdot 135°$ (keby všetky uhly mali 135°). Z toho vieme, že $180n - 360 \leq 135n$, odkiaľ po úprave dostaneme $n \leq 8$.
Ostáva teda overiť, že vieme zostrojiť takéto 3 až 8-uholníky, čo už nechávame na vás. (Pomôcka ku 7-uholníku, s ktorým mali niektorí problémy: nakreslite si pravidelný 8-uholník. Rozdeľte ho na trojuholníky a potom už stačí z niektorých dvoch susedných vrcholov spraviť len jeden.)

2. spôsob riešenia:
Aj tu využijeme vzorec na súčet uhlov v n-uholníku a fakt, že náš n-uholník bude mať vnútorné uhly veľkostí 45°, 90° a 135°. Počet 45-stupňových uhlov si označme k, počet 90-stupňových l a počet 135-stupňových m. Potom musí platiť rovnica

$$180n - 360 = 45k + 90l + 135m,$$

kde k, l, m sú prirodzené čísla alebo nula a $k + l + m = n$. Celú rovnicu predelíme 45 a za n dosadíme $k + l + m$:

$$4(k + l + m) - 8 = k + 2l + 3m.$$

Po úprave dostávame rovnicu $3k + 2l + m = 8$. Z toho vidíme, že najväčší počet vrcholov, teda súčet $k + l + m$, je 8 a to pre $k = 0$, $l = 0$, $m = 8$ (pravidelný 8-uholník s uhlami veľkosti 135°). Opäť už len zostáva zostrojiť 3 až 8-uholníky.

Úloha č. 6: *V zoo majú 8 rôznych zvierat*[1] *a kvôli prestavbe majú k dispozícii iba 4 klietky. Do každej klietky sa zmestia dve zvieratá. Medzi niektorými zvieratami panujú nepriateľské vzťahy, a to tak, že každé zviera má maximálne troch nepriateľov a nepriateľstvo je vzájomné. Je možné ubytovať všetky zvieratá do klietok tak, aby spolu v klietke neboli znepriatelené zvieratá?*

Riešenie: (opravovali Kajo a Lindtka)
Zo zadania vieme, že každé zvieratko má maximálne 3 nepriateľov. To znamená, že každé zvieratko má aspoň 4 priateľov. Opísmenkujeme si zvieratká A, B, C, D, E, F, G, H a posnažíme sa umiestniť zvieratká do 4 klietok.
Určite vieme dať 2 zvieratká do prvej klietky. Každé zvieratko má aspoň 4 priateľov, tak zoberieme zvieratko A a jedného jeho priateľa (označíme ho písmenom B).
Ostalo nám 6 zvieratiek C, D, E, F, G, H a každé z nich má ešte aspoň 2 priateľov v tejto šestici (každé zvieratko malo aspoň 4 priateľov a stratilo najviac 2 priateľov medzi A, B). Ubytujeme do druhej klietky C s jeho priateľom (označíme ho písmenom D).
Máme už dve zaplnené klietky $(AB), (CD)$ a ostali nám 4 zvieratká E, F, G, H.
Ak by tu neexistovala dvojica priateľských zvieratiek, znamenalo by to, že zvieratká E, F, G, H majú všetkých priateľov už ubytovaných. Každé zvieratko však musí mať aspoň 4 kamarátov, čo znamená že každé zvieratko z E, F, G, H sa priatelí s každým zvieratkom z A, B, C, D. Preubytujeme preto zvieratká napríklad takto:

$$(AE)(BF)(CG)(DH)$$

a skončili sme.
Ak by existovala dvojica priateľských zvieratiek vo štvorici E, F, G, H, tak ich ubytujeme do tretej klietky (označíme ich písmenkami E, F).
Ostala nám posledná dvojica zvieratiek G, H. Ak by boli kamaráti, tak ich jednoducho ubytujeme do štvrtej klietky a skončili sme.
Ak by neboli kamaráti, tak vieme že zvieratko G má aspoň 4 priateľov v prvých troch klietkach. Čiže určite existuje klietka, v ktorej má 2 priateľov, nech je to prvá klietka so zvieratkami A, B. Okrem toho musí existovať ešte aspoň jedna klietka, v ktorej má aspoň jedného priateľa, napr. sa priatelí s C v druhej klietke (premyslite si prečo).
Ak by zvieratko H malo priateľa v prvej klietke (napr. A), tak preubytujeme zvieratká takto:

$$(AH)(BG)(CD)(EF).$$

Ak by však H nemalo priateľa v prvej klietke, musí sa priateliť so všetkými zvieratkami v druhej a tretej klietke (inak by nemalo aspoň 4 kamarátov). Preto sa priatelí aj so zvieratkom D a preubytujeme zvieratká takto:

$$(HD)(GC)(AB)(EF).$$

[1] medzi inými aj slona

Takto sa nám podarilo ubytovať zvieratká do 4 klietok tak, aby každý býval so svojím priateľom.

Úloha č. 7: *V kruhu sedelo* 2014 *veveričiek. Na začiatku mala každá párny počet orieškov. Potom sa začali hrať zaujímavú hru. V každom ťahu pošle každá veverička polovicu svojich orieškov veveričke po svojej pravici. Ak má potom nejaká veverička nepárny počet orieškov, tak jej z neba*[2] *spadne ďalší. Takéto ťahy veveričky opakovali stále dookola, až kým nemali všetky rovnako veľa orieškov. Dokážte, že takáto hra určite niekedy skončí, bez ohľadu na to, aké bolo začiatočné rozmiestnenie orieškov.*

Riešenie: (opravoval Jakub S.)
Vieme, že veveričiek je 2014 a teda konečný počet. Teda určite existuje taká veverička, ktorá má na začiatku najviac orieškov. (Takých veveričiek môže byť aj viac.) Označme počet týchto orieškov M_0.
Všimnime si teraz veveričku Veroniku, ktorá má O_1 orieškov. Počas prvého ťahu Veronika zoberie $O_1/2$ orieškov a posunie ich veveričke vpravo. Zároveň však dostane $O_2/2$ orieškov od veveričky po jej ľavici. A jeden oriešok jej možno spadne z neba. Takže po prvom ťahu bude mať Veronika maximálne $(O_1 + O_2)/2 + 1$ orieškov. My však vieme, že $O_1, O_2 \leq M_0$ a teda veverička Veronika má po prvom ťahu maximálne $(M_0 + M_0)/2 + 1 = M_0 + 1$ orieškov. Ale M_0 je párne, čiže $M_0 + 1$ nepárne, takže toľko orieškov nemôže mať. Má ich teda maximálne M_0.
Toto však bude platiť aj pre všetky Vierky, Vandy, Viktórie, Violy a Vilmy, pretože každá má na začiatku maximálne M_0 orieškov. Z toho nám teda vyplýva, že maximálny počet orieškov M_1 po prvom ťahu je menší alebo rovný M_0. No a zopakovaním tejto úvahy bude maximálny počet orieškov M_2 po druhom ťahu menší alebo rovný M_1, atď. Z toho vyplýva, že žiadna veverička nemôže mať počas hry viac ako M_0 orieškov.
Podľa rovnakej úvahy ako na začiatku vieme povedať, že existuje taká veverička, ktorá má na začiatku najmenej orieškov. Označme počet týchto orieškov m_0.
Všimnime si teraz veveričku Vierku, ktorá má O_1 orieškov, a veveričku Viktóriu, ktorá sedí po jej ľavici a má O_2 orieškov. Po zahraní ťahu bude počet Vierkiných orieškov $(O_1 + O_2)/2$ resp. $(O_1 + O_2)/2 + 1$. A teda stačí, aby mala aspoň jedna z nich viac ako m_0 orieškov a Vierka bude mať po zahraní ťahu určite viac ako m_0 orieškov. Z toho vyplýva, že:

1. Ak má veverička viac ako m_0 orieškov, tak aj po zahraní ťahu bude mať viac ako m_0 orieškov.
2. Ak má veverička m_0 orieškov a veverička po jej ľavici viac ako m_0 orieškov, tak po zahraní ťahu bude mať viac ako m_0 orieškov.

Nech teda na začiatku hry má práve n veveričiek m_0 orieškov. Ak $n = 2014$, tak hra skončila. Ak je $n < 2014$, tak určite existuje v kruhu veverička s m_0 orieškami, ktorá má po ľavici veveričku s viac ako m_0 orieškami. Takže počet veveričiek s m_0 orieškami sa zmenší. Po konečnom počte krokov už nebude žiadna veverička s m_0 orieškami a nové minimum orieškov bude m_1, pričom $m_1 > m_0$.
A úvahu opakujeme. Ak počet veveričiek s m_1 orieškami je $n = 2014$, tak hra končí, inak po nejakom počte krokov bude mať zase každá z veveričiek viac ako $m_2 > m_1$ orieškov, atď.
Musí teda naša hra niekedy skončiť? Áno, musí. Ak neskončí, tak dostávame nekonečnú rastúcu postupnosť miním $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$. My však vieme aj to, že každá z hodnôt m_i nepresahuje M_0. No ale čísel nepresahujúcich M_0 je len konečný počet (konkrétne M_0), takže sa dostávame k sporu. A teda naša hra určite skončí po konečnom počte ťahov.

Úloha č. 8: *Nájdite všetky* 23*-ciferné čísla* n*, ktoré spĺňajú nasledujúce vlastnosti:*

- *Číslo* n *nie je deliteľné jedenástimi.*
- *Žiadne číslo, ktoré vznikne z čísla* n *zmenou jedinej cifry, nie je deliteľné jedenástimi.*

Riešenie: (opravoval Mišo)
Číslo n je deliteľné 11 práve vtedy, keď je deliteľný 11 rozdiel súčtu cifier na párnych a na nepárnych pozíciach. Keďže n nie je deliteľné jedenástimi, ani tento rozdiel nebude.
Pozrime sa teraz na to, ako môžeme meniť cifry. Číslo n má nejaký zvyšok po delení 11. Keď zmeníme ľubovoľnú cifru, zmeníme tým aj zvyšok (lebo 11 je väčšie než 10 a preto nedostaneme rovnaký zvyšok pre rôznu cifru). Cifru k môžeme zmenšiť o k, zväčšiť o $(9 - k)$, alebo hocičo medzi tým. To nám dáva 10 možností a 10 rôznych zvyškov n po delení 11. Ak nechceme, aby n bolo deliteľné jedenástimi, cifru k nám to jednoznačne určí.
Tak napríklad ak má n zvyšok 4, k môže byť iba 3 ak je na nepárnej pozícii, alebo 6 ak je na párnej. Z toho vyplýva, že všetky cifry na párnych miestach musia byť rovnaké a na nepárnych tiež. Avšak prvá cifra nemôže byť nula, takže má iba 9 možností čím môže byť, nie 10. Môže byť teda rôzna od ostatných cifier na nepárnych miestach. Ak bude o 1 väčšia, zvýšiť o viac ako ostatné sa nedá a znížiť tiež nie, aby n bolo stále 23-ciferné.
Aké by to mohli byť cifry? Keď prvá cifra je a, na párnych miestach je cifra b a na nepárnych (okrem prvej) c, tak po delení 11 dostávame zvyšok a, lebo $a - 11b + 11c = 11(c - b) + a$. Cifra a môže byť hocičo od 1 po 9. Cifry b a c nám zvyšok neovplyvnia, keďže ich je oboch 11, takže stačí, keď za ne zvolíme také cifry, ktorými nevieme zvyšok a zmeniť na 0.

[2] tak to aspoň vyzeralo

Riešení je preto deväť a to keď $(a, b, c) = (k, 10 - k, k - 1)$ pre $k = 1, \ldots, 9$.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Stolček má tvar štvorca so stranou* 1 *meter a sú na ňom dva kruhové obrusy s rovnakým polomerom. Tieto obrusy zakrývajú celý stolček. Zaujímalo by ma, aký najmenší môže byť polomer obrusov.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Matúš)
Označme stôl (štvorec) $ABCD$. Nech S je stred strany AB a T je stred strany CD. Ukážeme, že najmenšie možné polomery sú $\sqrt{5}/4$.
Najprv dokážeme, že také obrusy naozaj vyhovujú. Ak okraje obrusov budú kružnice opísané obdĺžnikom $ASTD$ a $SBCT$, tak zrejme pokrývajú celý stôl. Sú to zhodné Tálesove kružnice nad priemermi AT, BT, takže ich polomery sú rovné $|AT|/2$. Ich veľkosť dostaneme pomocou Pytagorovej vety pre trojuholník ADT:

$$\frac{|AT|}{2} = \frac{\sqrt{|AD|^2 + |DT|^2}}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + (1/2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Teraz ukážeme, že menšie byť nemôžu. Skúsme nájsť nejaké menšie. Body A a C nemôžu byť pokryté rovnakým kruhom, lebo ten by mal potom polomer aspoň polovicu ich vzdialenosti, čo je z Pytagorovej vety $|AC|/2 = \sqrt{2}/2$, čo je viac ako $\sqrt{5}/4$. Podobne body B a D musia byť pod rôznymi obrusmi. Preto musia byť nejaké dva susedné vrcholy spolu pod jedným obrusom a tie zvyšné dva pod druhým. Tak BUNV nech sú spolu pod jedným obrusom A a D a pod druhým B a C.
Aspoň jeden obrus musí zakryť bod S. Ak by to bol ten, pod ktorým je bod D, tak jeho polomer je aspoň $|DS|/2$. Ak by to bol ten, pod ktorým je bod C, tak jeho polomer je aspoň $|CS|/2$. Preto aspoň jeden z kruhov bude mať polomer aspoň $|DS|/2 = |CS|/2 = \sqrt{5}/4$. Tým sme dokázali, že menšie už obrusy byť nemôžu.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *V rovine je daných n bodov. Najväčšiu vzdialenosť medzi dvojicou z nich si označme d. Ukážte, že pre všetky $n \geq 1$ vieme jeden z bodov odstrániť a zvyšné rozdeliť do dvoch skupín tak, aby najväčšia vzdialenosť medzi dvojicou bodov v rámci skupiny bola v oboch prípadoch menšia ako d.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Miki a Vodka)
Najprv si dokážeme pomocné tvrdenie.

Lema (Myjava). Ak máme 4 rôzne body A, B, C, D také, že $|AB| = |CD| = d$, pričom d je najväčšia vzdialenosť medzi tými bodmi, tak úsečky AB a CD sa pretínajú (a nie v krajnom bode niektorej z tých úsečiek).

Dôkaz. Ak by tri z bodov A, B, C, D ležali na priamke, BUNV sú to A, B, C, tak bod C musí ležať vnútri úsečky AB. No potom má jeden z uhlov ACD, BCD veľkosť aspoň $90°$, nech je to BUNV $\sphericalangle ACD$. Potom platí $|AD| > |CD| = d$, čo je spor.
Už vieme, že žiadna trojica z tých bodov neleží na priamke. Potom sú dve možnosti:

1. Jeden bod (BUNV bod C) leží v trojuholníku určenom zvyšnými troma bodmi (teda v ABD). No potom je aspoň jeden z uhlov ACD, BCD tupý a opäť, ak je to BUNV $\sphericalangle ACD$, tak $|AD| > |CD| = d$, čo je znova spor.
2. Body A, B, C, D sú vrcholy konvexného štvoruholníka. Priesečník jeho uhlopriečok označme P. Ak AB, CD sú uhlopriečky, tak sa pretínajú. Ak sú AB, CD strany, tak sčítaním trojuholníkových nerovností pre trojuholníky ABP a CDP dostaneme $|AC| + |BD| > |AB| + |CD| = 2d$, čo je spor, lebo aspoň jedna z úsečiek AC, BD by musela byť dlhšia ako d. Dokázané.

□

Teraz sa už môžeme pustiť do našej úlohy. Pre 1 bod to platí triviálne, teda nech sú aspoň 2. Potom existujú body A, B také, že $|AB| = d$. Teraz rozdelíme rovinu na dve polroviny určené priamkou AB a body v jednej polrovine budú v prvej skupine a body v druhej polrovine budú v druhej skupine. Zrejme pre žiadne dva body C, D z jednej polroviny neplatí $|CD| = d$, lebo ak by áno, tak by CD pretínala AB, lebo Myjava. To však pre body z jednej polroviny nemôže platiť.
Potrebujeme už len zaradiť body A, B, pričom jeden z nich môžeme vyhodiť. Keby k bodu A neexistoval žiaden bod X z jednej polroviny taký, že $|AX| = d$, tak proste bod A pridáme do skupiny bodov z tej polroviny, B dáme preč a máme rozdelenie.
Predpokladajme, že existujú body X, Y z rôznych polrovín, že $|AX| = d, |AY| = d$. No potom môžeme vyhodiť bod A, a bod B pridať do hociktorej skupiny, napr. do tej, kde je X, lebo keby v tej polrovine existoval bod Z taký, že $|BZ| = d$, tak zjavne sa úsečky AY, BZ nepretínajú, čo je spor s Myjavou.
Teda v každom prípade sme ich rozdelili. Hurá! Sme spokojní a môžeme ísť spať (alebo aj nie).

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	3	9	9		9	9	9			45	45
1.	Hanzely Slavomír	2.	GJAR PO	5		9	9	9	6	9	9		45	45
1.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	GJH BA	10			9	9	9	9	9		45	45
1.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	4	9	9	8	9	9	9			45	45
1.	Švarc Radovan	3.	Česká Třebová	7		9	9	9	9	9	9		45	45
1.	Truc Lam Bui	3.	Gamča BA	10			9	9	9	9	9		45	45
7.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	4	9	9	5	8	9	9	2		44	44
8.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	4	9	9	9		9	6	3		42	42
9.	Oravkin Eduard	2.	1SG BA	5		9	8	8	7	9			41	41
10.	Hronkovičová Nina	3.	GKom PE	6		8	5	8	9	3	9		39	39
10.	Psota Miroslav	4.	GHlin ZA	11			9	9	9	3	9		39	39
10.	Svoboda Jakub	4.	G Hav CR	7		9	9	6	6	9			39	39
13.	Bodík Juro	2.	Gamča BA	5		9		9	6	9	3		36	36
13.	Semanišinová Žaneta	2.	GAlej KE	5		9	8	9	6	4			36	36
15.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	3	9	7	9			8	2		35	35
15.	Šimková Ľudmila	4.	GPár NR	12			9		9	9	8		35	35
17.	Kulla Filip	2.	BiG Sučany	5		9	9		7	9			34	34
17.	Lipovský Mário	4.	GJH BA	8			6	4	6	9	9		34	34
17.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	4	9	9		8	6	2			34	34
20.	Bohdal Ondrej	3.	GJH BA	8			5	8	9	9	2		33	33
20.	Krajčiová Katarína	3.	GAlej KE	8		9	9		6	9	9		33	33
22.	Kopf Daniel	2.	G Slez ČR	5		9	5		7	9	2		32	32
22.	Mišlanová Kristína	2.	GAlej KE	5		9	8	7	6	2			32	32
22.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	4	9	9	6		6	2	2		32	32
22.	Stankovič Miroslav	4.	GPoš KE	13			5	9	9	9			32	32
26.	Dargaj Jakub	4.	GPoš KE	7			6	7	9	9			31	31
26.	Halabrin Juraj	2.	GJH BA	5		9	7	7	6	2			31	31
26.	Kluvanec Roman	3.	GPár NR	5		9	8		9	3	2		31	31
26.	Pilňan Branislav	3.	GJH BA	4	9	9		4			9		31	31
30.	Horváth Samuel	4.	GPár NR	10			9	9	9	1	2		30	30
30.	Puza Marko	4.	GPoš KE	10			9	5		9	7		30	30
32.	Santrová Michaela	3.	GMH Trstená	8			6	9	9	2	3		29	29
33.	Micheľová Henrieta	2.	GAlej KE	5		3	8		6	9	2		28	28
34.	Batmendijn Eduard	3.	CGsvM SL	11			9	9		9			27	27
34.	Hollý Dominik	3.	ŠPMNDG BA	5		9	3		9	4	2		27	27
36.	Dráček František	3.	GŠkol PB	7		7	4		4	9	2		26	26
36.	Choma Matej	2.	Gamča BA	5		9			6	9	2		26	26
36.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	2	9	3	7	1	4	3	0		26	26
39.	Žídek Matěj	2.	Frýdlant ČR	5		9	5			9	2		25	25
40.	Nepšinská Silvia	3.	GJH BA	7		9	3		7	3	2		24	24
40.	Ralbovský Peter	2.	ŠPMNDG BA	5		7	4		6	7			24	24
40.	Tesař Emanuel	2.	GBST LC	5		3	9	1	6	3	3		24	24
43.	Králik Matej	3.	GJH BA	8			9		9	3	2		23	23
44.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	4	9	9	4						22	22
45.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	3	9	3				9			21	21
45.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	4	9				5	3	4		21	21
47.	Kašša Ladislav	2.	G Šamorín	5		6	5	1	7	1			20	20
47.	Murin Marek	2.	GJH BA	5		3		1	9	2	5		20	20
47.	Poppr Marián	3.	Praha - GJN	3	9	3			2	6			20	20
50.	Bednárik Ivan	2.	Gamča BA	2	8			4	5	2	0		19	19
50.	Prešinská Kristína	3.	GPár NR	7		9	3		3	2	2		19	19

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
50.	Ženčuchová Andrea	3.	GJAR PO	4		9	3	2	3	2			19	19
53.	Kňaze Adam	3.	GJCh BR	7		7			4	2	5		18	18
54.	Magyarová Zuzana	4.	GBST LC	10			5		7	3	2		17	17
55.	Hrivová Ivona	4.	GVO ZA	11			9		6	1			16	16
55.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3		9	5				2		16	16
57.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	3	9	3	2			1			15	15
57.	Petráš Peter Pavel Arthur	2.	ŠPMNDG BA	5		9	3		0	2	1		15	15
59.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1	8	2	2	1	0	1			14	14
60.	Kudelčíková Martina	2.	GVO ZA	5		8			4	1	0		13	13
61.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	4		5	3	1	2	1			12	12
62.	Terem Tomáš	2.	GJGT BB	2	9					1	0		10	10
63.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	3		4			0	2	1		7	7
64.	Škrlec Adam	2.	GJH BA	4		6							6	6
65.	Čepan Zdenko	1.	GKom PE	2			3	1		0	0		4	4

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	0		9	9	9	9	5			41	41
2.	Hanesz Zoltán	1.	GPoš KE	1	9	9	9	9	3				39	39
3.	Pándy Michal	1.	GPoš KE	1	9	9	8	9		3			38	38
4.	Hladká Ľubica	1.	GJGT BB	1	8	8	9	9		3			37	37
5.	Genči Jakub	1.	GPoš KE	2		9	9	9	3	5			35	35
5.	Jurčík Matej	1.	GVPT MT	1	9	5		9	9	3			35	35
7.	Polačková Adela	1.	GJAR PO	2		9	2	9	7	4			31	31
8.	Drotár Pavol	1.	GPoš KE	1	3	9	3	9	4	5			30	30
8.	Král Adam	2.	GVar ZA	3			7	9	9	5			30	30
8.	Pokrývka Milan	1.	G Bánovce	2		3	9	7	8	3			30	30
11.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	3				9	9		9		27	27
12.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	2			6	9	3	7	1		26	26
13.	Eller Peter	1.	GJH BA	2		8	9	6		2	0		25	25
13.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	3				9	7	9			25	25
15.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	3			9	9	3				21	21
16.	Kaintz Matúš	1.	GPoš KE	1		7	2	7	1	3			20	20
17.	Novák Matej	1.	GGol NR	1	*	7	5	6		0			18	18
18.	Porubsky Michal	2.	GsvCM NR	2		1	1	9	3	3			17	17
19.	Horňáková Kristína	1.	GPár NR	2		7		9					16	16
19.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	3			2	9	3	2			16	16
19.	Terem Tomáš	2.	GJGT BB	2		7		9					16	16
22.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3					9	5			14	14
22.	Šouc Ján	1.	GJH BA	1	1	1		7	2	3			14	14
22.	Zeman Matúš	2.	1SG BA	3				8	6				14	14
25.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1				8	2	2	1		13	13
26.	Bednárik Ivan	2.	Gamča BA	2				8			4		12	12
26.	Poppr Marián	3.	Praha - GJN	3				9	3				12	12
26.	Veselá Simona	3.	GJH BA	3		1	1	6	1	3	1		12	12
29.	Čepan Zdenko	1.	GKom PE	2		7				3	1		11	11
29.	Halamová Lucia	0.	BiG Sučany	1		2	1		4	3	1		11	11
29.	Koľ Daniel	1.	GPoš KE	1		6		5					11	11
29.	Nguyen Linh	1.	GJH BA	2		8	1		1	1			11	11
29.	Safko Michal	1.	GJAR PO	2		2	2	2	2	3			11	11
34.	Hreuzek Ján	1.	GCSL BA	1				6		4			10	10
34.	Sanigová Lucia	3.	GVar ZA	3				7		3			10	10
34.	Šajanek Adrián	1.	GCSL BA	2				3	3	3	1		10	10
37.	Petrová Simona	2.	ŠPMNDG BA	2	2	1		1	3	3			8	8
38.	Roch Oliver	3.	G Bytca	3			2		2	3	0		7	7

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
39.	Martinka Matej	2.	SŠsvFA	3						4			4	4
39.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	3		3			4				4	4