Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2013/2014

Úloha č. 1: *Nájdite všetky také trojciferné čísla n, že posledné trojčíslie čísla n^2 je totožné s číslom n.*
Riešenie: (opravovali Aňa a JeFo)
Číslo n zapíšeme ako $\overline{abc}$, kde a je prvá cifra, b druhá, c tretia. Posledné trojčíslie čísla $\overline{abc}\cdot\overline{abc}$ má byť $\overline{abc}$. Násobíme pod seba.

$$\begin{array}{ccccc} & & a & b & c \\ & \cdot & a & b & c \\ \hline & & ac & bc & c^2 \\ & \dots & b^2 & bc & \\ \dots & \dots & ac & & \\ \hline \dots & \dots & 2ac+b^2+r & 2bc+p & c^2 \end{array}$$

Čísla p a r hovoria, koľko sme „preniesli" z predchádzajúceho stĺpca.
Vidíme, že posledná cifra c^2 sa musí rovnať c. Tejto podmienke vyhovujú čísla 0, 1, 5, 6.

- Začneme s 0, ktorú dosadíme za c. Po vynásobení dostávame vo výsledkovom riadku: b^2, 0, 0. Z toho vyplýva, že cifra b by mala byť 0, ďalej $a = b^2$, teda aj a je 0. Takže $\overline{abc}$ je 000, čo nie je trojciferné číslo.
  Táto možnosť nefunguje.
- Teraz dosadíme $c = 1$. Vo výsledkovom riadku bude: $b^2 + 2a + r$, $2b$, 1. Ak chceme, aby naša podmienka platila, $2b$ musí mať poslednú cifru b. To platí len pre $b = 0$. Ďalej vidíme, že podobne to musí byť aj pre a. Aj $a = 0$. Teda $\overline{abc}$ je 001, čo nie je trojciferné číslo.
  Táto možnosť tiež nefunguje.
- Dosadíme $c = 5$. Výsledkový riadok bude tentokrát $10a + b^2 + r$, $10b + 2$, 5. Chceme, aby keď za b dosadíme jedno z čísel $(0, 1, \dots, 9)$, posledná cifra výrazu $10b + 2$ bola práve toto číslo. Vychádza to len pre $b = 2$. Prepočítame naše násobenie aj s druhou známou cifrou. Vo výsledkovom riadku máme $10a + 6$, 2, 5. Znovu chceme, aby keď za a dosadíme jedno z čísel $(0, 1, \dots, 9)$, posledná cifra výrazu $10a + 6$ bola práve toto číslo. Vychádza to len pre číslo 6.
  Zhrnieme si to: $a = 6$, $b = 2$, $c = 5$. Výsledné číslo je 625.
- Zostáva nám $c = 6$. Výsledkový riadok: $12a + b^2 + r$, $12b + 3$, 6 To, že posledná cifra výrazu $12b + 3$ sa rovná číslu, ktoré dosadíme za b, platí len pre $b = 7$. Novozískané číslo dosadíme do výsledkového riadku, ktorý je: $12a + 57$, 7, 6 Podmienka, že číslo, ktoré dosadíme za a je posledná cifra výrazu $12a + 57$ vychádza len pre $a = 3$.
  Sumarizujeme: $a = 3$, $b = 7$, $c = 6$. Výsledné číslo je 376.

Čísla, ktoré hľadáme sú 625 a 376.

Úloha č. 2: *Zistite, koľko je*

$$1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+\ldots+999999\cdot999999+1000000\cdot1000000+999999\cdot1000001+999998\cdot1000002+\ldots+1\cdot1999999.$$

Riešenie: (opravovali Veronika a Lindtka)
Ako môžeme zrátať toľko sčítancov? Nie sme kalkulačka, ktorá by to kvôli veľkosti výsledku nezrátala, ale zato môžeme byť prefíkaní a skúsiť preusporiadať sčítance. Skúsme popárovať tie súčiny, ktoré majú spoločný jeden činiteľ (súčin $1000000\cdot1000000$ nemá pár). Dostaneme

$$(1\cdot1+1\cdot1999999)+(2\cdot2+2\cdot1999998)+(3\cdot3+3\cdot1999997)+\cdots+(999999\cdot999999+99999\cdot1000001)+1000000\cdot1000000.$$

V každej zátvorke vieme vybrať spoločný (menší) činiteľ pred zátvorku:

$$1 \cdot (1 + 1999999) + 2 \cdot (2 + 1999998) + 3 \cdot (3 + 1999997) + \cdots + 999999 \cdot (999999 + 1000001) + 1000000 \cdot 1000000.$$

Aké hodnoty nadobudnú súčty v zátvorkách? Všetky budú mať rovnakú hodnotu a to 2000000 (premyslite si prečo). Po tejto úprave náš výraz bude vyzerať takto

$$1 \cdot 2000000 + 2 \cdot 2000000 + 3 \cdot 2000000 + \cdots + 999999 \cdot 2000000 + 1000000 \cdot 1000000.$$

Ako si môžeme všimnúť, zo všetkých členov okrem posledného vieme vyňať pred zátvorku 2000000:

$$2000000 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 999998 + 999999) + 1000000 \cdot 1000000.$$

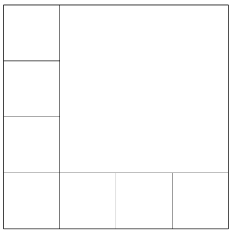
Potrebujeme zistiť akú hodnotu má naša zátvorka $(1 + 2 + 3 + \cdots + 999999)$. Väčšina z vás prefíkane vedela, že zátvorka má hodnotu $1000000 \cdot 999999/2$. Pre tých, ktorí to nevedeli, popárujeme si prvé číslo s posledným, druhé s predposledným, a tak ďalej. Dostanete $(1 + 999999) + (2 + 999998) + \cdots + (499999 + 500001) + 500000$. Treba si všimnúť aké hodnoty budú nadobúdať zátvorky a koľko tých zátvoriek je, to však necháme šikovnému čitateľovi na rozmyslenie.
A teraz to už treba dať len celé dokopy:

$$2000000 \cdot \frac{1000000 \cdot 999999}{2} + 1000000 \cdot 1000000 = 1000000 \cdot 1000000 \cdot 999999 + 1000000 \cdot 1000000 =$$

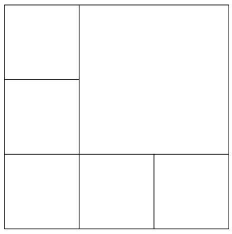
$$= 1000000 \cdot 1000000 \cdot (999999 + 1) = 1000000 \cdot 1000000 \cdot 1000000 = 1000000000000000000 = 10^{18}.$$

Úloha č. 3: *Vieme rozdeliť štvorec na hocijaký počet menších štvorcov? Ak nie, ktoré počty vieme dosiahnuť a ktoré nevieme? Štvorec musí byť rozdelený len na štvorce, ale nemusia mať rovnaké veľkosti.*

Riešenie: (opravovali Mojo a Kajo)
Najlepší spôsob, ako začať riešiť takýto typ úlohy, je zobrať si ceruzku a papier a nakresliť si pár obrázkov. Po chvíľke skúšania vidíme, že keď spojíme stredy protiľahlých strán, tak štvorec rozdelíme na 4 menšie štvorce. Čiže keď vieme rozdeliť štvorec na k štvorcov, tak ho vieme rozdeliť aj na $k+3$ štvorcov — proste si vyberieme ľubovoľný z tých k štvorcov a rozdelíme ho na štyri nové štvorce. To znamená, že ak počet, na ktorý vieme štvorec rozdeliť je tvaru $3k$ (resp. $3k + 1$ alebo $3k + 2$), tak ho vieme rozdeliť aj na ľubovoľný väčší počet takéhoto tvaru (toto si poriadne premyslite). Najmenší počet tvaru $3k+1$, na ktorý ho vieme rozdeliť je 1. Pre tvar $3k+2$ je to 8 (Obr. 1), a pre tvar $3k$ to je 6 (Obr. 2). Teda sme ukázali že pre všetky k okrem 2, 3 a 5 sa dá štvorec rozdeliť na k častí.



Obr. 1



Obr. 2

Ostáva nám už len ukázať, že na 2, 3 a 5 štvorcov sa štvorec rozdeliť nedá (hlboké presvedčenie o tom, že sa to nedá, sme nadobudli skúšaním na začiatku). Ak niektorý štvorec obsahuje aspoň dva vrcholy pôvodného štvorca, tak ho obsahuje celý (premyslite si prečo). A teda je rozdelený len na jeden štvorec. Je zjavné, že ak chceme štvorec rozdeliť na 2 alebo 3 štvorce, tak aspoň jeden z menších štvorcov by obsahoval aspoň dva vrcholy, čo pri inom delení ako na jeden štvorec nie je možné. Preto nemožno rozdeliť štvorec na 2 alebo 3 štvorce.
A čo s piatimi štvorcami? Už sme ukázali, že ak má jeden zo štvorcov viac ako 1 vrchol, tak by bol rovnako veľký ako pôvodný štvorec. Teda potom má každý štvorec najviac 1 vrchol, konkrétne u nás 4 majú po jednom vrchole a jeden štvorec nemá žiaden. Teraz budeme umiestňovať do rohov pôvodného štvorca spomenuté 4 štvorce a budeme sledovať zvyšnú časť.
Ak má najväčší z týchto štvorcov dĺžku strany väčšiu ako polovica z dĺžky strany pôvodného štvorca, potom zvyšné 3 štvorce ležiace v rohoch majú určite dĺžku najviac doplnok, to je ale menej než polovica strany, teda určite na aspoň dvoch susedných stranách pôvodného štvorca nie je pokrytá celá strana (medzi týmito menšími štvorcami). Keďže je ale v rohu medzi týmito časťami štvorec, potom útvar, ktorý ostal nie je konvexný, teda to nie je štvorec.
Ak má najväčší zo 4 štvorcov dĺžku menej ako polovica strany, tak môžeme použiť rovnaký argument (pre ľubovoľnú dvojicu susedných strán).
Ak má najväčší zo 4 štvorcov dĺžku rovnú polovici strany pôvodného štvorca, tak buď sú aj ostatné štvorce rovnako veľké, vtedy už ale pokryjú celú plochu štvorca, teda sú to len 4 štvorce. Ak je aspoň jeden menší tak na stranách,

ku ktorým prilieha by vznikli už spomínané nepokryté časti, teda určite by zvyšná časť nebola konvexná, teda by to nebol štvorec.
Štvorec sa teda dá rozdeliť na ľubovoľný počet štvorcov okrem 2, 3, 5.

Úloha č. 4: *Máme kružnice k a l, ktoré sa dotýkajú v bode M. Ďalej máme dotyčnicu d ku kružnici l, ktorá pretína kružnicu k. Označme N bod dotyku dotyčnice d s kružnicou l a priesečníky dotyčnice d s kružnicou k označme A a B. Priesečník priamky MN s kružnicou k rôzny od M označme X. Dokážte, že $|AX| = |BX|$.*

Riešenie: (opravovala Plutvička)
Označme K stred kružnice k, L stred kružnice l. Pozrime sa na trojuholníky KMX a LMN. Oba sú rovnoramenné, keďže platí $|KM| = |KX|$ (polomer k), $|LM| = |LN|$ (polomer l). Z toho máme $|\sphericalangle KMX| = |\sphericalangle KXM|$ a $|\sphericalangle NML| = |\sphericalangle MNL|$. Keďže uhly KMX a NML sú vrcholové a teda zhodné, platí $|\sphericalangle KXM| = |\sphericalangle KMX| = |\sphericalangle NML| = |\sphericalangle MNL|$ a potom aj $|\sphericalangle XKM| = |\sphericalangle NLM|$. Tieto uhly sú teda po dvojiciach striedavé (uhol pri X s uhlom pri N, uhol pri K s uhlom pri L). Preto sú KX a NL rovnobežky.
Dotyčnica je kolmá na polomer v bode dotyku, preto je NL kolmé na BN. Keďže NL a XK sú rovnobežky, aj XK je kolmá na BN. Vieme, že pre ľubovoľnú sečnicu kružnice platí, že jej os prechádza stredom kružnice. (Trojuholník tvorený sečnicou a stredom kružnice bude vždy rovnoramenný. Stred kružnice teda leží na osi sečnice.) Priamka XK je kolmá na sečnicu AB a prechádza stredom kružnice k. Preto je priamka XK osou úsečky AB. Všetky body na XK sú rovnako vzdialené od bodov A a B, takže platí $|BX| = |AX|$.

Úloha č. 5: *Okolo okrúhleho stola sedí $2n$ vedúcich vrátane Maťka. Medzi nimi je nejako rozdelených K koláčov. Každý z vedúcich vlastniacich aspoň dva koláče sa môže kedykoľvek rozhodnúť, že zje jeden zo svojich koláčov a zároveň daruje ďalší zo svojich koláčov jednému zo svojich susedov. Nájdite najmenšie také K, že bez ohľadu na počiatočné rozmiestnenie koláčov ich vedúci vedia posunúť tak, aby Maťko dostal aspoň jeden koláč.*

Riešenie: (opravoval Viktor Lukáček)
Dokážeme, že odpoveď je 2^n. Najprv ukážeme, že pre $K < 2^n$ to nejde.
Označíme si Maťka písmenom M. M priradíme číslo 2^n, jeho susedom 2^{n-1}, ich susedom smerom ďalej od M priradíme $2^{n-2}, \ldots$ až na konci priradíme vedúcemu oproti M číslo $2^{n-n} = 1$, tohto vedúceho si označíme O. Následne každému koláču priradíme číslo, ktoré má vedúci vlastniaci tento koláč. Súčet všetkých takto priradených čísel na nezjedených koláčoch, budeme nazývať: celkový súčet koláčov. Teraz si všimnime, že tento súčet má veľmi dobré vlastnosti! Ak nejaký vedúci zje jeden koláč a druhý posunie ďalej od M, celkový súčet sa zjavne zmenší, ale ak ten druhý koláč posunie bližšie k M, tak sa celkový súčet zachová. Ak na začiatku dáme všetkých K koláčov vedúcemu O, tak celkový súčet koláčov bude K. Ale na to, aby M mal po nejakých ťahoch aspoň jeden koláč, musí byť celkový súčet koláčov aspoň 2^n. A keďže celkový súčet koláčov sa nemôže zväčšovať, z čísla K sa nám nikdy nepodarí dostať číslo 2^n, čiže M nemôže dostať koláč, pri akýchkoľvek ťahoch.
Teraz ukážeme, že $K = 2^n$ vyhovuje, pri akomkoľvek rozmiestnení koláčov. Ak M má aspoň jeden koláč, vyhrali sme. Ďalej uvažujme, že M nemá koláč. Nech x je počet koláčov, ktoré vlastní O. Nech y je počet koláčov nachádzajúcich sa na ľavom oblúku medzi M a O, a z počet koláčov na pravom oblúku. Zjavne $x + y + z = 2^n$, bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $y \geq z$. Súčet všetkých čísel priradených na nezjedených koláčoch, ktoré vlastní O alebo M alebo sú na ľavom oblúku medzi M a O, budeme nazývať: ľavý súčet, a označíme si ho S_l. Zjavne každé číslo priradené koláču nepatriacemu O má veľkosť aspoň dva. Z toho vyplýva, že $S_l \geq x+2y \geq x+y+z = 2^n$.
Dobrým ťahom budeme nazývať taký ťah, v ktorom vedúci, nachádzajúci sa na ľavom oblúku (vrátane O), jeden koláč zje a druhý posunie bližšie k M po ľavom oblúku. Po dobrom ťahu sa ľavý súčet nezmení, čiže stále platí $S_l \geq 2^n$. Teraz môžeme robiť dobré ťahy až pokým M nedostane nejaký koláč. Čo sa môže pokaziť?

a) V nejakom momente už nemožno urobiť dobrý ťah.
   To znamená, že každý na ľavom oblúku (vrátane O a bez M) má maximálne jeden koláč, ale potom by pre ľavý súčet platilo: $S_l \leq 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1 < 2^n$ a to po dobrých ťahoch nemôže nastať.
b) Vždy je možno urobiť dobrý ťah, ale po ľubovoľnom počte dobrých ťahov, M nedostane koláč.
   Treba si všimnúť, že po každom dobrom ťahu sa zmenší počet koláčov na ľavom oblúku (vrátane M a O) o jedna. V tomto prípade je teda možné znižovať počet koláčov na ľavom oblúku ľubovoľne veľakrát (tak aby M nedostal koláč), čo je samozrejme nemožné.

Tým sme ukázali, že po nejakom počte ľubovoľne zvolených dobrých ťahoch M dostane koláč, teda $K = 2^n$ vyhovuje.

Úloha č. 6: *Hopko má štvorcovú tabuľku* 2014×2014. *Chce do nej vpísať v nejakom poradí čísla* $1, 2, \ldots, 2014^2$, *každé práve raz, pričom vpísať môže vždy na ľubovoľné voľné políčko. Aby to nebola taká nuda, vždy keď vpíše číslo do i-teho riadka a j-teho stĺpca, sčíta všetky už napísané čísla v i-tom riadku a j-tom stĺpci a ich súčet si zapíše do zošita. Poraďte mu, na ktoré miesta a v akom poradí má čísla vpísať, aby súčet čísel v jeho zošite bol čo najväčší možný.*

Riešenie: (opravoval Jakub S.)
Poďme teda dopĺňať. Zo zadania vieme, že keď doplníme číslo do políčka na priesečníku i-teho riadku a j-teho stĺpca, tak sčítame všetky čísla už napísané v i-tom riadku a j-tom stĺpci a súčet zapíšeme do zošita. V tomto kroku vznikla určitá nezrovnalosť: časť z vás riešiteľov započítala do tohto súčtu aj práve doplnené číslo, a časť z vás nie. No keďže to nemá vplyv na maximalizovanie súčtu čísel v zošite,[1] budeme uvažovať, že práve vyplnené číselko nezapočítame.
Zrejme, niektoré z čísel budú vo výslednom súčte (tzn. súčte čísel zo zošita) započítané viackrát. Uvedomme si však, že už pri napísaní čísla do tabuľky vieme povedať, koľkokrát bude dané číselko započítané vo výslednom súčte. Vieme to povedať práve preto, že v každom políčku v tabuľke bude nakoniec napísané nejaké číslo. Tým pádom vieme dostať výsledný súčet čísel v zošite aj postupom rôznym od postupu opísaného v zadaní úlohy: Po tom, ako napíšeme číselko n do tabuľky na priesečník i-teho riadku a j-teho stĺpca, sa pozrieme na počet voľných políčok r_n v i-tom riadku a počet voľných políčok s_n v j-tom stĺpci, a do druhého zošita zapíšeme $n \cdot (r_n + s_n)$.
Zrejme platí, že súčty čísel v prvom a druhom zošite sú rovnaké (ponechávame na rozmyslenie pre čitateľa).
Výsledný súčet teda bude

$$S = 1 \cdot (r_1 + s_1) + 2 \cdot (r_2 + s_2) + \cdots + 2014^2 \cdot (r_{2014^2} + s_{2014^2}). \tag{1}$$

Intuitívne teda chceme, aby sme väčšie čísla započítavali viac krát, teda aby boli hodnoty r_n a s_n pre väčšie n väčšie. Aké teda môžu hodnoty r_n a s_n byť?
Vieme, že potom ako napíšeme číslo n na priesečník i-teho riadku a j-teho stĺpca, tak v riadku aj stĺpci ostane najviac 2013 voľných políčok a najmenej 0 voľných políčok. A teda $0 \leq r_n, s_n \leq 2013$. A keďže máme 2014 riadkov a 2014 stĺpcov, medzi hodnotami r_n sa každé z čísel od 0 do 2013 nachádza 2014-krát, čo platí aj pre hodnoty s_n.
Takže našou úlohou teraz bude, aby sme rozdelili čísla

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{2014-krát}}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{2014-krát}}, \ldots, \underbrace{2013, 2013, \ldots, 2013}_{\text{2014-krát}} \tag{2}$$

medzi hodnoty $r_1, r_2, \ldots, r_{2014^2}$ (to isté aj s hodnotami s_n) tak, aby súčet S bol najväčší možný.
Teraz si spravíme malé teoretické okienko a naučíme sa jednoduchú nerovnosť, tzv. prerovnávaciu nerovnosť (angl. rearrangement inequality), ktorá hovorí, že

$$x_n y_1 + \cdots + x_1 y_n \leq x_{\sigma(1)} y_1 + x_{\sigma(2)} y_2 + \cdots + x_{\sigma(n)} y_n \leq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

pre všetky reálne čísla spĺňajúce

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n, \; y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$$

a pre každú permutáciu σ.
Inak povedané: súčet $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ je najväčší práve vtedy, keď $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ a $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$, tzn. pre čo najväčší súčet chceme „párovať“ väčšie číselká s väčšími a menšie s menšími.

Toto ale pre náš prípad znamená, že

$$\begin{aligned} 1 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 + \cdots + 2014^2 \cdot r_{2014^2} \leq 1 \cdot 0 + \cdots + 2014 \cdot 0 + 2015 \cdot 1 + \cdots + 4028 \cdot 1 + \cdots + \\ + (2013 \cdot 2014 + 1) \cdot 2013 + \cdots + 2014^2 \cdot 2013 \end{aligned}$$

pre všetky rozdelenia čísel (2) medzi premenné r_n. Tá istá nerovnosť platí aj v prípade, keď neznáme r_n nahradíme neznámymi s_n.
Sčítaním takýchto dvoch nerovností potom dostaneme

$$\begin{aligned} S = 1 \cdot (r_1 + s_1) + 2 \cdot (r_2 + s_2) + \cdots + 2014^2 \cdot (r_{2014^2} + s_{2014^2}) \leq \\ \leq 2 \cdot (1 \cdot 0 + \cdots + 2014 \cdot 0 + 2015 \cdot 1 + \cdots + 4028 \cdot 1 + \cdots + (2013 \cdot 2014 + 1) \cdot 2013 + \cdots + 2014^2 \cdot 2013) \end{aligned}$$

Otázkou už len ostáva, či vieme takto postupne čísla do tabuľky zapisovať. A toto je už konštrukcia, na ktorú ste viacerí z vás prišli. Chceme do tabuľky umiestniť najväčších 2014 čísel tak, aby v každom riadku a aj stĺpci bolo práve jedno číslo, pretože vtedy ostane pre každé číslo 2013 voľných políčok v riadku aj stĺpci. Umiestnime ich teda napríklad na diagonálu. Ďalších najväčších 2014 čísel chceme zapísať tak, aby v každom riadku a stĺpci boli už po dve čísla (ostáva 2012 voľných políčok). To môžeme napríklad tak, že napíšeme 2013 z nich „pod diagonálu“ a jedno do ľavého horného rohu, a takto postupujeme ďalej, až kým nevyplníme celú tabuľku. Takýmto spôsobom naozaj nakoniec dostaneme najväčší možný súčet S.

[1] Keby sme v každom ťahu započítali aj práve napísané číslo, tak by sa zátvorky $(r_n + s_n)$ v súčte (1) zmenili na $(r_n + s_n + 2)$. Toto však nijakým spôsobom nepokazí odprezentované riešenie.

<u>Úloha č. 7:</u> *Máme daný trojuholník ABC. Stred strany BC označme M. Nech D je ľubovoľný bod na strane AB. Úsečky AM a CD sa pretínajú v bode P. Predpokladajme, že $|AD| = |DP|$. Dokážte, že $|AB| = |CP|$.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Kaťa)

Prišlo veľa pekných rôznych riešení, ukážeme si jedno z nich.

Zobrazme bod A v stredovej súmernosti podľa bodu M. Vznikne nám bod X. $|AM| = |MX|$ a zo zadania $|BM| = |MC|$, teda uhlopriečky štvoruholníka $ABXC$ sa rozpoľujú a preto je to rovnobežník.

Z predpokladu $|AD| = |PD|$ máme, že trojuholník APD je rovnoramenný s ramenami AD a PD, preto $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle APD|$. Ďalej vieme, že $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle PXC|$, lebo sú striedavé a $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPX|$, sú to vrcholové uhly. Trojuholník PXC je rovnoramenný s ramenami CP a CX, takže $|CP| = |CX|$. No $|CX| = |AB|$, lebo $ABXC$ je rovnobežník. Z toho plynie $|CP| = |AB|$, čo sme chceli dokázať.

<u>Úloha č. 8:</u> *Nájdite všetky štvorice rôznych prvočísel (p, q, r, s) také, že ich súčet je prvočíslo a čísla p^2+qr a p^2+qs sú druhé mocniny celých čísel.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mišo)

Máme štyri rôzne prvočísla p, q, r a s. Ich súčet je tiež prvočíslom a keďže je väčší ako 2, musí byť nepárny. Z toho vyplýva, že jedno z prvočísel je 2, inak by bol ich súčet párny.

Zo zadania ešte vieme, že nejaký výraz zložený z p, q, r, s je štvorcom celého čísla. Takže existujú také celé čísla k, l, že

$$
\begin{aligned}
p^2 + qr &= k^2,\\
p^2 + qs &= l^2.
\end{aligned}
$$

Čísla k, l sa vyskytujú iba v druhej mocnine, takže to, či sú kladné alebo záporné nič nezaváži. Budeme ich preto brať ako kladné.

Po odčítaní p^2 dostaneme

$$
\begin{aligned}
qr &= k^2 - p^2 = (k + p)(k - p),\\
qs &= l^2 - p^2 = (l + p)(l - p).
\end{aligned}
$$

Čísla r a s sú rôzne, takže budú rôzne aj k a l. Ľavá strana je súčin dvoch prvočísel. To isté číslo je aj pravá strana rovníc. Preto ak žiaden z činiteľov nie je 1, každá zo zátvoriek musí byť jedným prvočíslom. Navyše vieme, že ich rozdiel je $2p$.

Ako vieme, jedno z prvočísel je 2.

Čo ak je dvojkou p? Na pravej strane nedostaneme jednotku, lebo k aj l musia byť aspoň 5 (rozmyslite si prečo). Preto je qr aj qs súčinom dvoch čísel, ktorých rozdiel je $2p = 4$. Keďže r a s sú rôzne a sú zadané symetricky, môžeme si povedať, že $r < s$. (Na konci ale nesmieme zabudnúť riešenia pre $r > s$.)

Rozdiel q, r aj q, s je 4 a $r < s$. Z toho vyplýva, že $r + 4 = q = s - 4$. Všetky tri sú prvočíslami a dávajú rôzne zvyšky po delení troma. Jedno z nich bude preto 3 a môže ním byť iba r. Keby ním nebolo najmenšie z q, r, s, muselo by nejaké byť -1, čo nemôže. Dostávame tak štvoricu $(p, q, r, s) = (2, 7, 3, 11)$ ktorá vyhovuje.

Nech teraz p nie je 2. Stále uvažujeme $r < s$. Potom je s priveľké a dvojkou môže byť iba q alebo r. Pozrime sa na rovnicu $qr = (k + p)(k - p)$. Ľavá strana je párna a mocnina dvojky je tam 1. Pravá je súčin dvoch čísel, ktorých rozdiel je $2p$, čo je párne, takže majú rovnakú paritu. Nepárne byť nemôžu, lebo ľavá strana je párna. Ak sú obe párne, tak mocnina dvojky je na pravej strane aspoň 2. To je priveľa, žiadne riešenie pre p rôzne od 2 teda neexistuje.

Jediným riešením p, q, r, s sú štvorice prvočísel $2, 7, 3, 11$ a $2, 7, 11, 3$.

<u>Úloha č. 9:</u> *Máme 1000 normálnych mincí, z ktorých každá váži 10 gramov a 1000 falošných, z ktorých každá váži 9,9 gramu. Máme k dispozícii superpresné dvojramenné váhy. Potrebujeme spraviť dve kôpky mincí, pričom v oboch je rovnaký počet mincí, no súčet hmotností mincí v týchto kôpkach je rôzny. Koľko najmenej vážení potrebujeme na to, aby sme s istotou vedeli takéto dve skupiny nájsť?*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Vodka a Hopko)

Ako sa riešia takéto úlohy? Nuž, treba nájsť postup ako sa to dá na niekoľko vážení a ukázať, že na menej vážení sa to nedá. Pri riešení často natrafíme na problém. Po chvíli hrania sa s príkladom ľahko nájdeme postup, ako sa to dá na 4 váženia, no nedarí sa nám dokázať, že na menej vážení to spraviť nejde. Zrazu prídeme na to, že to ide aj na 3 váženia. Otázka je, že či treba skúšať vymyslieť lepší postup, alebo lepší dôkaz, že to na menej vážení nepôjde. To býva často problém. Dobrý postup je skúšať raz z jednej a raz z druhej strany. Snáď sa nám časom podarí dôjsť k výsledku.

Po takomto drsnom úvode sa konečne pozrime na našu úlohu. Keď sa nám nedarí dokázať, že dvomi váženiami nevieme nájsť dve rôzne ťažké skupiny s rovnakým počtom prvkov, môžeme skúsiť dokázať, že sa to nedá ani na jedno váženie. No ani to sa nám akosi nedarí. Jeden z dvoch dôvodov prečo sa nám niečo nedarí dokázať je, že to neplatí. (Druhý je, že sa málo snažíme.) V našom prípade to naozaj neplatí. Keď sa nad tým zamyslíme a pohráme

sa s príkladom, určite nás osvieti. Rozdelíme mince zhruba na tretiny. Do kôpky A dáme 667 mincí, do kôpky B dáme 667 mincí a do kôpky C dáme 666 mincí. Naše magické váženie bude porovnanie kôpok A a B. Ak nie sú v rovnováhe, našli sme hľadané skupiny mincí.
Ak sú v rovnováhe, tak z A uberieme jednu mincu, tým dostaneme A' a tvrdíme, že naše dve hľadané množiny mincí sú A' a C. Prečo by to malo fungovať? Kôpky A a B obsahujú rovnako veľa falošných mincí. Ak obsahujú aspoň 334 falošných mincí, tak v kôpke C je ich najviac 332. Preto v kôpke A' je určite viac falošných mincí ako v kôpke C. Na druhej strane ak ich je menej ako 334, v kôpke C ich je aspoň 334, a preto aj v kôpke A' bude menej falošných mincí ako v kôpke C. Teda to naozaj funguje.
A nejaké poučenie na záver? Nedokazujte niečo, čo neplatí :)

Úloha č. 10: *Nájdite všetky funkcie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *také, že pre všetky* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

Riešenie: (opravoval CD)
(podľa *Radovana Švarca*)
Vo väčšine funkcionálnych rovníc hrajú podstatnú úlohu nulové body funkcie — body, v ktorých funkcia naberá nulu. V tejto rovnici to bola taktiež podstatná časť riešenia. Na pravej strane rovnice si môžeme všimnúť súčin, ktorý by sme radi vynulovali, aby sme na ľavej strane dostali nulový bod funkcie. Podstatným krokom teda bolo zistiť, pre ktoré body platí $f(x) = -\frac{1}{2}$, pretože to sú všetky hodnoty, ktoré nulujú pravú stranu.
Uvedomiť si toto bol asi najpodstatnejší krok celej úlohy, s týmto stanoveným cieľom sa už úloha dala doviesť do víťazného konca. Pre vedomostichtivých riešiteľov odporúčame prerátať s týmto cieľom ešte raz zadanú úlohu.
Pre ostatných uvádzame riešenie Radovana Švarca, ktoré veľmi elegantným spôsobom dokazuje všetky kroky. Všimnite si hlavne, že súčasťou každého sporu je dosadenie, ktoré by sa bez sporného predpokladu nedalo urobiť.
Ako prvý krok dosadíme do zadania hodnotu $y = -1$, z čoho dostaneme:

$$f(f(-1)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(-1) + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Rozoberieme teraz dva prípady:

- Ak $f(-1) \neq -\frac{1}{2}$, mohli by sme si rovnicu (1) predelením upraviť na

$$f(x) = \frac{f(f(-1))}{f(-1) + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2},$$

  čo by znamenalo, že f je konštantná funkcia. Dostávame $f(x) = c$, pre nejaké $c \in \mathbb{R}$. Dosadením do zadania dostaneme pre c rovnicu $c = (c + \frac{1}{2})^2$, pre ktorú ľahko overíme, že nemá riešenie pre žiadne $c \in \mathbb{R}$.
- Druhá možnosť je, že platí $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Priamo z rovnice (1) dostávame dosadením tejto hodnoty aj $f(-\frac{1}{2}) = 0$. Pre ďalšiu časť riešenia budeme nutne potrebovať, že ak $f(y) = -\frac{1}{2}$, tak $y = -1$.
  Predpokladajme, že exstuje také $t \neq -1$, že $f(t) = -\frac{1}{2}$. Do rovnice zo zadania dosadíme hodnoty $x = \frac{t+\frac{1}{2}}{t+1}$ a $y = t$. Toto môžeme urobiť, keďže predpokladáme $t \neq -1$. Dostaneme

$$f\left(\frac{t + \frac{1}{2}}{t + 1} + \frac{t + \frac{1}{2}}{t + 1} \cdot t + f(t)\right) = \left(f\left(\frac{t + \frac{1}{2}}{t + 1}\right) + \frac{1}{2}\right)\left(f(t) + \frac{1}{2}\right).$$

  Roznásobením a využitím, že $f(t) = -\frac{1}{2}$ dostávame na ľavej strane hodnotu $-\frac{1}{2}$ a na pravej strane hodnotu 0, čo je očividný spor.
  Posledné dosadenie, ktoré potrebujeme urobiť, urobíme za predpokladu, že $y \neq -1$, aby sme za premennú x mohli v rovnici zo zadania dosadiť hodnotu $x = -\frac{f(y)+\frac{1}{2}}{y+1}$. Dostaneme

$$f\left(-\frac{f(y) + \frac{1}{2}}{y + 1} - \frac{f(y) + \frac{1}{2}}{y + 1} \cdot y + f(y)\right) = \left(f\left(-\frac{f(y) + \frac{1}{2}}{y + 1}\right) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

  Opäť roznásobením a použitím vzťahu $f(-\frac{1}{2}) = 0$ dostávame na ľavej strane hodnotu 0. Na pravej strane máme súčin dvoch členov. Keďže $y \neq -1$, tak z predošlého odstavca $f(y) + \frac{1}{2} \neq 0$. Preto platí, že

$$f\left(-\frac{f(y) + \frac{1}{2}}{y + 1}\right) + \frac{1}{2} = 0.$$

  Jednoduchou úpravou dostávame

$$f\left(-\frac{f(y) + \frac{1}{2}}{y + 1}\right) = -\frac{1}{2},$$

kde opäť z predošlého odstavca vieme, že jediným riešením tejto rovnice je

$$-\frac{f(y)+\frac{1}{2}}{y+1} = -1.$$

Po prenásobení $-(y+1)$ dostávame vzťah, že pre $y \neq -1$ musí funkcia f spĺňať vzťah $f(y) = y + \frac{1}{2}$. My navyše vieme, že pre $y = -1$ je hodnota funkcie $f(-1) = -\frac{1}{2}$, čo spolu zhodou okolností dáva jediného kandidáta na riešenie funkciu $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

Z rozobratia prípadov sme dostali jediného kandidáta na riešenie, a to funkciu $f(x) = x + \frac{1}{2}$. Na záver overíme, či je táto funkcia aj riešením pôvodnej rovnice (musíme to spraviť pri každej funkcionálnej rovnici), keďže všetky úpravy doteraz boli dôsledkové. Dosadením predpisu do zadania dostávame

$$f(x + xy + f(y)) = x + xy + y + 1 = (x+1)(y+1) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right),$$

takže funkcia $f(x) = x + \frac{1}{2}$ je riešením a je jediným riešením tejto funkcionálnej rovnice.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	3	9	9	9	9	9				45	90
2.	Švarc Radovan	3.	Česká Třebová	7		9		9	9	2	9		38	83
3.	Hanzely Slavomír	2.	GJAR PO	5		9	6	9	8	1	0		33	78
4.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	3	9	7	5		9	9			39	74
5.	Truc Lam Bui	3.	Gamča BA	10			9	9	9				27	72
6.	Oravkin Eduard	2.	1SG BA	5		3	5	9	9		4		30	71
7.	Semanišinová Žaneta	2.	GAlej KE	5		9	5	9	9	2			34	70
8.	Svoboda Jakub	4.	G Hav CR	7			6	9	9	1	4		29	68
9.	Hronkovičová Nina	3.	GKom PE	6		7	5	9	4	0	3		28	67
10.	Mišlanová Kristína	2.	GAlej KE	5		9	5	9	9	2			34	66
11.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	4	9	4		9					22	64
11.	Šimková Ľudmila	4.	GPár NR	12			7	9	8		5		29	64
13.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	GJH BA	10				9		9			18	63
14.	Lipovský Mário	4.	GJH BA	8			9	9	9	0	1		28	62
15.	Psota Miroslav	4.	GHlin ZA	11			2	4	8		8		22	61
15.	Stankovič Miroslav	4.	GPoš KE	13			9	9	7	4			29	61
17.	Bohdal Ondrej	3.	GJH BA	8			5	9	9		4		27	60
17.	Krajčiová Katarína	3.	GAlej KE	8		5		9	9	9			27	60
17.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	4	1	3		4	5	3			16	60
20.	Halabrin Juraj	2.	GJH BA	5		3	5	9	7	4			28	59
20.	Puza Marko	4.	GPoš KE	10			9	9	7	4			29	59
20.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	4		2	5		7				14	59
23.	Kopf Daniel	2.	G Slez ČR	5		4	5	4	8	4			25	57
23.	Králik Matej	3.	GJH BA	8			6	9	7	9	3		34	57
23.	Micheľová Henrieta	2.	GAlej KE	5		3	7	9	9	0	1		29	57
26.	Kulla Filip	2.	BiG Sučany	5		4	3	9	6	0			22	56
27.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	4		3	3	9	7		0		22	54
28.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	4		2	3	9	4	0			18	52
29.	Bodík Juro	2.	Gamča BA	5		1	5	1	7		0		14	50
29.	Dargaj Jakub	4.	GPoš KE	7			5	9	5				19	50
31.	Kluvanec Roman	3.	GPár NR	5		4		9	5				18	49
31.	Murin Marek	2.	GJH BA	5		3		9	7	9	1		29	49
33.	Choma Matej	2.	Gamča BA	5		4	2	9	7		0		22	48
34.	Bednárik Ivan	2.	Gamča BA	2	9	1	2	9	7				28	47

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
34.	Hollý Dominik	3.	ŠPMNDG BA	5		3	3	9	3	2			20	47
34.	Nepšinská Silvia	3.	GJH BA	7		6		9	7		1		23	47
37.	Krakovská Ema	3.	Gamča BA	6		3	5	9	9	2			28	46
38.	Prešinská Kristína	3.	GPár NR	7		4	5	9	6		1		25	44
39.	Žídek Matěj	2.	Frýdlant ČR	5			5	9	4				18	43
40.	Pilňan Branislav	3.	GJH BA	4		4	5						9	40
40.	Veselá Simona	3.	GJH BA	3			2	9	7	9	2		29	40
42.	Magyarová Zuzana	4.	GBST LC	10			6	9	5	0			20	37
43.	Kašša Ladislav	2.	G Šamorín	5		3		9	4				16	36
44.	Dráček František	3.	GŠkol PB	7		2	1		5	0	1		9	35
45.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	4	9		3			1			13	34
46.	Horváth Samuel	4.	GPár NR	10									0	30
46.	Ralbovský Peter	2.	ŠPMNDG BA	5		3	3			0	0		6	30
48.	Santrová Michaela	3.	GMH Trstená	8									0	29
49.	Batmendijn Eduard	3.	CGsvM SL	11									0	27
50.	Kňaze Adam	3.	GJCh BR	7		4	3			1			8	26
50.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	2									0	26
52.	Tesař Emanuel	2.	GBST LC	5									0	24
53.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	4									0	22
54.	Krakovská Hana	4.	Gamča BA	8			5		7				12	21
54.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	3									0	21
54.	Pavlus Matúš	2.	GBST LC	5	9	3	3	8	6	1			21	21
57.	Poppr Marián	3.	GJN - Praha	3									0	20
58.	Ženčuchová Andrea	3.	GJAR PO	4									0	19
59.	Hrivová Ivona	4.	GVO ZA	11									0	16
59.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3									0	16
59.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	3	9								9	16
62.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	3									0	15
62.	Petráš Peter Pavel Arthur	2.	ŠPMNDG BA	5									0	15
64.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1									0	14
65.	Kudelčíková Martina	2.	GVO ZA	5									0	13
66.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	4									0	12
67.	Terem Tomáš	2.	GJGT BB	2									0	10
68.	Tóthová Andrea	2.	ŠPMNDG BA	2		4	3			2			9	9
69.	Škrlec Adam	2.	GJH BA	4									0	6
70.	Čepan Zdenko	1.	GKom PE	2							0		0	4

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Hanesz Zoltán	1.	GPoš KE	1	8	9	8		3		9		37	76
1.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1	9	9		9	4		4		35	76
3.	Drotár Pavol	1.	GPoš KE	1	9	9	6	9		1	9		42	72
4.	Pándy Michal	1.	GPoš KE	1	9	9	9	2	2				31	69
5.	Jurčík Matej	1.	GVPT MT	1	9	7	6	9	1				32	67
6.	Pokrývka Milan	1.	G Bánovce	2		9	6	9	1		9		34	64
7.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	3				9	9	9	9		36	63
8.	Hladká Ľubica	1.	GJGT BB	1	6	9	5		3	1			24	61
9.	Genči Jakub	1.	GPoš KE	2		7	4	9	4	1			25	60
10.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	3			9	9	7	5			30	55
11.	Král Adam	2.	GVar ZA	3			4	9	4				17	47
11.	Polačková Adela	1.	GJAR PO	2		8	5			3			16	47
13.	Bednárik Ivan	2.	Gamča BA	2		9	4	9	1	2	9		33	45
13.	Porubsky Michal	2.	GsvCM NR	2		9	4	9	3	3			28	45
15.	Mičko Juraj	1.	GPoš KE	1	9	9	5	9		6			38	38
16.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	2		5							5	31

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
16.	Veselá Simona	3.	GJH BA	3		9	8			2	9		19	31
18.	Petruš Pavol	1.	GPoš KE	1	6	9	4	7	3	3			29	29
19.	Eller Peter	1.	GJH BA	2									0	25
20.	Halamová Lucia	0.	BiG Sučany	1	7		*	4					11	22
20.	Novák Matej	1.	GGol NR	1									0	22
20.	Petrová Simona	2.	ŠPMNDG BA	2		5		9	0				14	22
23.	Daniš Dávid	1.	GCSL BA	1			4		4	5	8		21	21
23.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	3									0	21
25.	Hruška Rajmund	1.	GPoš KE	1		9	4	7					20	20
25.	Kaintz Matúš	1.	GPoš KE	1									0	20
25.	Tóthová Andrea	2.	ŠPMNDG BA	2		9	4		4	3			20	20
25.	Zeman Matúš	2.	1SG BA	3					3	3			6	20
29.	Hreuzek Ján	1.	GCSL BA	1							8		8	18
29.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	3			5	9					14	18
31.	Čepan Zdenko	1.	GKom PE	2	9		5						5	16
31.	Horňáková Kristína	1.	GPár NR	2									0	16
31.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	3									0	16
31.	Terem Tomáš	2.	GJGT BB	2									0	16
35.	Krutek Robert	1.	GJGT BB	1		9	5		0	1			15	15
35.	Šajanek Adrián	1.	GCSL BA	2			3		0	1	1		5	15
37.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3									0	14
37.	Šouc Ján	1.	GJH BA	1									0	14
39.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1									0	13
40.	Martinka Matej	2.	SŠsvFA	3			5	2		1			8	12
40.	Poppr Marián	3.	GJN - Praha	3									0	12
42.	Koľ Daniel	1.	GPoš KE	1									0	11
42.	Kollárová Sára	1.	GJGT BB	2	9	9	2		0				11	11
42.	Nguyen Linh	1.	GJH BA	2									0	11
42.	Safko Michal	1.	GJAR PO	2									0	11
46.	Sanigová Lucia	3.	GVar ZA	3									0	10
47.	Roch Oliver	3.	G Bytca	3									0	7