# Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2013/2014

**Úloha č. 1:** *Máme prirodzené číslo $m$. Koľko rôznych zvyškov môžeme dostať, ak delíme číslo $m$ postupne všetkými prirodzenými číslami?*

Riešenie: (opravovala Betka)
Označme si číslo, ktorým budeme deliť, ako $N$. Rozoberieme si tri prípady (podrobnejšie to spravíme len pre párne $m$, pre nepárne sa to spraví podobne):

- V prípade, že $N > m$ je zvyšok vždy rovný $m$.
- Ďalej sa pozrime, čo sa stane, keď $m \geq N > \frac{m}{2}$. Tu postupne delíme číslami $m$, $m-1$, $m-2, \dots, \frac{m}{2}+1$, a teda dostávame zvyšky 0, 1, $2, \dots, \frac{m}{2}-1$. Je ich $\frac{m}{2}$.
- Posledný prípad tvoria $N$, pre ktoré $\frac{m}{2} \geq N$. Keď delíme takýmito číslami, dostaneme vždy zvyšky menšie ako $\frac{m}{2}$, pretože zvyšok po delení nejakým číslom je vždy menší ako to číslo. Avšak všetky tieto zvyšky sa nachádzajú už aj v predchádzajúcom prípade.

Celkovo máme teda $\frac{m}{2}+1$ zvyškov.
Ešte zostáva zistiť, čo s nepárnymi $m$, pretože zjavne počet zvyškov môže byť len celé číslo.
Pre nepárne $m$ vieme okrem zvyšku $m$ dostať zvyšky od 0 po $\frac{m-1}{2}$. Celkový počet zvyškov je teda $\frac{m+1}{2}+1$, čo je v podstate to isté, ako keď $\frac{m}{2}+1$ zaokrúhlime nahor.
Keď číslo $m$ vydelíme všetkými prirodzenými číslami, dostaneme $\left\lceil \frac{m}{2}+1 \right\rceil$ rôznych zvyškov.[1] Tento výsledok platí aj pre párne aj pre nepárne čísla.

**Úloha č. 2:** *V priestore je daná rovina $\alpha$ a priamka $p$, ktorá leží v rovine $\alpha$. Zvolíme v priestore bod $A$. Bod na priamke $p$, ktorý je najbližšie k bodu $A$ si označme $B$. Bod v rovine $\alpha$, ktorý je najbližšie k bodu $A$ označme $C$. Bod na priamke $p$, ktorý je najbližší k bodu $C$ označme ako $D$. Ako máme zvoliť bod $A$, aby vzdialenosť bodov $B$ a $D$ bola čo najväčšia?*

Riešenie: (opravovali Samo a KatkaJ)
V prvom rade si musíme uvedomiť, ako nájdeme najbližší bod na priamke alebo rovine k nejakému bodu $A$. Múdre knižky hovoria, že to bude päta kolmice (označme si ju $P$) na našu priamku, prípadne rovinu, prechádzajúcej cez bod $A$ (kolmicu na rovinu vieme jednoducho nájsť, bude to totiž priamka, ktorá je kolmá na dve nerovnobežné priamky z tejto roviny). Môžeme sa veľmi ľahko presvedčiť, že je to naozaj tak. Ak by sme totiž zobrali ľubovoľný iný bod $B$, $ABP$ by bol pravouhlý trojuholník, pričom $AP$ je jeho odvesna a $BP$ prepona. Odtiaľ máme $|AP| < |BP|$.
Vyzbrojení týmto poznatkom sa môžeme vrhnúť do riešenia našej úlohy. Pozrime sa najskôr na bod $D$. Označme si rovinu, ktorá prechádza cez tento bod a je kolmá na priamku $p$ ako $\beta$. Zrejme v nej potom leží aj bod $C$, keďže $D$ je päta kolmice na $p$ cez $C$. Vieme však, že $C$ leží v $\alpha$ a $\beta$ je kolmá na $\alpha$. Preto musí ležať aj bod $A$ v $\beta$ (keďže $C$ je pätou kolmice na $\alpha$ cez $A$).
Teraz sa poďme pozrieť na bod $B$. Je to päta kolmice na $p$ prechádzajúcej cez $A$. My už ale vieme, že $A \in \beta$ a tiež $p \perp \beta$. Z toho vyplýva, že aj bod $B$ leží v rovine $\beta$. Platí ale, že $\beta$ môže mať s priamkou $p$ práve jeden spoločný bod a preto musia byť body $B$ a $D$ totožné. Nezáleží teda na polohe bodu $A$.
Môžeme si všimnúť, že takéto riešenie funguje aj keď bude bod $A$ ležať na priamke $p$ alebo v rovine $\alpha$. Ak by sme si však napríklad rovinu $\beta$ definovali inak (napríklad pomocou troch bodov), mohli by sme naraziť na problém. V týchto okrajových prípadoch by nemusela byť jasne definovaná. Samozrejme, je veľmi jednoduché úlohu vyriešiť pre tieto prípady zvlášť, len na to netreba zabúdať.

[1]Tie zvláštne krivé zátvorky znamenajú zaokrúhľovanie nahor.

**Úloha č. 3:** *Nájdite všetky také prirodzené čísla $n$, že $14^n + 11$ je prvočíslo.*

Riešenie: (opravovala Barča)
Väčšinou prvé, čo vyskúšame, je dosadenie nejakých konkrétnych malých hodnôt $n$ do výrazu. Mnohí ste si hneď všimli, že vyčíslené výsledky boli na striedačku deliteľné raz číslom 3 a raz číslom 5. Poďme si teda overiť túto našu hypotézu.
Rozdeľme si riešenie na dva prípady, podľa parity $n$.

- V prípade, že $n$ je párne sa pozrieme, ako sa výraz $14^n + 11$ správa, keď ho delíme tromi.
  Číslo 14 vieme zapísať ako $3 \cdot 4 + 2$. Ak vynásobíme dve čísla, ktoré po delení 3 dávajú zvyšok 2, dostaneme výraz tvaru $(3k + 2)(3l + 2) = 9kl + 6k + 6l + 4$, z čoho vyplýva, že po delení 3 dáva zvyšok 1.
  Nás zaujíma párna mocnina 14, preto si ukážme, že keď ľubovoľne veľakrát vynásobíme čísla so zvyškom 1, súčin bude mať ten istý zvyšok: $(3k + 1)(3l + 1) = 9kl + 3k + 3l + 1$, čo je opäť číslo so zvyškom 1.
  Keďže ešte treba pričítať $11 = 3 \cdot 3 + 2$, dostaneme: $3k + 1 + 3 \cdot 3 + 2 = 3(k + 1) + 3$, čo je násobok čísla 3 a zjavne väčší ako 3, teda pre žiadne párne $n$ nebude výraz prvočíslom.
- Analogickú úvahu zopakujeme pre nepárne $n$, ale tu nás už zaujímajú zvyšky po delení číslom 5. Umocňujeme na nepárnu mocninu a zistíme, že v tomto prípade je zvyšok vždy 4.
  Po pripočítaní 11, čo má zvyšok 1 po delení číslom 5, opäť nedostaneme prvočíslo, ale číslo deliteľné 5 a väčšie ako 5, preto žiadne také $n$ neexistuje.

**Úloha č. 4:** *V kruhu stojí 50 ľudí rôznych výšok. Človeka nazveme priemerným, ak je jeden z jeho susedov vyšší ako on a druhý nižší ako on. Nájdite všetky možné počty priemerných ľudí.*

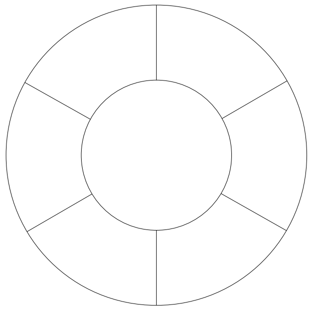
Riešenie: (opravoval Berenito)
Pre jednoduchosť si očíslujme ľudí podľa ich výšky — nech 50 označuje najvyššieho človeka a 1 najnižšieho. Vyššiu polovicu budeme označovať ako vysokí ľudia a nižšiu ako nízki ľudia.
Na začiatok by bolo fajn nájsť nejaký význačný počet priemerných ľudí, ktorý vieme dosiahnuť. Začnime najmenším počtom. Čo tak 0? To by znamenalo, že každý vysoký týpek je medzi dvomi malými a naopak. Stačí teda na párne pozície v kruhu umiestniť nízkeho človeka a na nepárne pozície vysokého. Teraz sa pozrime na najväčší možný počet. Vieme, že 1 a 50 nikdy priemerní nebudú, teda teoretické maximum je 48 priemerných ľudí, čo sa ľahko aj prakticky skonštruuje tak, že ich usporiadame od najmenšieho po najväčšieho.
Teraz vyvstáva otázka, či vieme dosiahnuť všetky počty medzi nimi alebo iba niektoré vybrané. Pozrime sa teda na to trochu všeobecnejšie. Každý človek má dvoch susedov, čo je dohromady 100 susedských vzťahov. Ak $A$ je vyšší ako jeho sused $B$, tak $B$ je nižší ako jeho sused $A$, a preto z týchto 100 susedských vzťahov musí byť 50-krát sused vyšší a 50-krát sused nižší. Priemerný človek má jedného suseda vyššieho a jedného nižšieho, nepriemerný má buď oboch vyšších alebo oboch nižších. Priemerný človek teda znamená nepárny počet susedských vzťahov oboch typov a nepriemerný znamená párny počet oboch typov. Keďže chceme dosiahnuť párny počet oboch typov, tak priemerných ľudí musí byť párny počet. (Ak nerozumiete prečo, tak si to poriadne premyslite.) Čiže nepárne počty vylúčime. O párnych počtoch žiadne takéto info nevieme, je teda rozumné očakávať, že ich budeme vedieť vytvoriť.
Na to aby sme skonštruovali správne rozostavenie pre všetky párne počty priemerných ľudí si vymyslíme napríklad nasledovný algoritmus rozostavovania:

- Nula — 26, 25, 27, 24, 28, 23 . . . , $k$, $51 - k$, . . . , 50, 1.
- Dvaja — 25, 26, 27, 24, 28, 23 . . . , $k$, $51 - k$, . . . , 50, 1 (priemerní sú 25 a 26).
- Štyria — 24, 25, 26, 27, 28, 23 . . . , $k$, $51 - k$, . . . , 50, 1 (priemerní sú 24, 25, 26 a 27).

A tak ďalej až po 48 priemerných ľudí. Začíname s rozostavením ako v prípade s nula priemernými ľuďmi — na nepárnych pozíciach rastú čísla od 26 po 50 a na párnych klesajú od 25 po 1. Ak chceme $2k$ priemerných ľudí, tak teraz ľudí na prvých $2k$ pozíciach usporiadame od najmenšieho po najväčšieho — títo budú priemerní, a budú to práve čísla od $26 - k$ po $25 + k$. Skúste si premyslieť, prečo to tak funguje.

**Úloha č. 5:** *Rozdeľte len s pomocou pravítka a kružidla kruh na 7 častí s rovnakým obsahom. Jednotlivé časti môžu mať aj rôzny tvar.*

Riešenie: (opravoval Hopko)
Podľa zadania máme rozdeliť kruh, len pomocou pravítka a kružidla, na sedem častí s rovnakým obsahom. Skúsme teda vymyslieť čo najjednoduchšiu konštrukciu. Ako prvé nás asi napadne vpísať do kruhu pravidelný sedemuholník a pospájať vrcholy so stredom. Snažíme sa spraviť to len pomocou pravítka a kružidla, no akosi to nejde. Problém je v tom, že sa to nedá (jeden múdry ujo to už dokázal). Po chvíľke rozmýšľania však prídeme na konštrukciu ako na Obr. 1.
Otázkou je, ako to spraviť (a či sa to dá spraviť). Pre začiatok skúsme nájsť stred kruhu, označme ho $S$. Využijúc fakt, že stred kruhu leží na osi ľubovoľnej tetivy to ale nie je problém. Nakreslíme si dve rôzne tetivy, ku každej dokreslíme jej os, a prienik týchto osí bude bod $S$. Problém môže nastať, ak prienik týchto osí nebude len jeden bod, ale priamka. V takomto prípade dokreslíme tretiu tetivu rôznu od predošlých, ktorej os nám už určí bod $S$.



Obr. 1

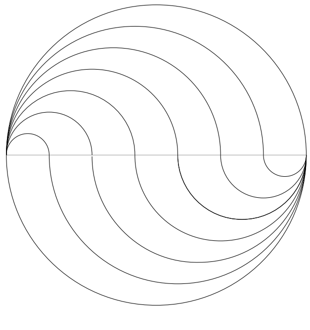
Na vytvorenie malého kruhu v strede potrebujeme určiť jeho polomer (stred je bod $S$). Polomer veľkého kruhu poznáme, je to vzdialenosť bodu $S$ od obvodu kruhu, označme ju $r$. Ľahko zrátame, že polomer malého kruhu bude $\frac{r}{\sqrt{7}}$. Všimnime si, že keby sme vedeli narysovať úsečku dĺžky $\sqrt{7}r$, tak po rozdelení na sedminy (rozmyslite si ako to spraviť) máme presne to, čo chceme, lebo

$$\frac{\sqrt{7}r}{7} = \frac{r}{\sqrt{7}}.$$

Poďme teda nájsť úsečku dĺžky $\sqrt{7}r$. Narysujeme rovnoramenný pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky $r$ (porozmýšľajte ako to spraviť). Prepona má dĺžku $\sqrt{2}r$. Teraz vieme nakresliť pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky $\sqrt{2}r$ a $r$. Jeho prepona bude mať dĺžku $\sqrt{3}r$. Takto budeme pokračovať, až kým dostaneme úsečku dĺžky $\sqrt{7}r$. Toto je všeobecný postup ako narysovať úsečku, ktorej dĺžka je odmocninu z akéhokoľvek prirodzeného čísla. Narysovali sme úsečku dĺžky $\sqrt{7}r$, pomocou nej narysujeme úsečku dĺžky $\frac{r}{\sqrt{7}}$, vďaka čomu nám nič nebráni nakresliť vnútorný kruh.

Ostáva už len rozdeliť medzikružie na šesť častí s rovnakým obsahom. K tomu, aby sme to spravili ako na obrázku, potrebujeme rozdeliť vnútornú kružnicu na šesť rovnakých častí šiestimi rôznymi bodmi. Najprv si nakreslíme jej priemer, označme ho $d$. Ten nám určuje dva deliace body. Pomocou pravítka a kružidla vieme narysovať rovnostranný trojuholník (premyslite si ako), a vďaka tomu vieme narysovať aj uhol veľkosti 60°. Narysujme teda obe priamky $p$, $q$ také, ktoré zvierajú s $d$ uhol 60° a pretínajú ju v bode $S$. Priamky $p$, $q$ pretínajú našu kružnicu v štyroch rôznych bodoch, ktoré sú zvyšné štyri hľadané deliace body. Nakoniec prieniky priamok $p$, $q$, $d$ s vonkajšou kružnicou sú deliace body vonkajšej kružnice. Už nám to stačí len vhodne pospájať, a máme rozdelený kruh na sedem častí s rovnakým obsahom.

<u>Poznámka:</u> Táto úloha mala viacero správnych riešení a každé z nich sa dalo narysovať viacerými spôsobmi. Konkrétne sa objavili tri typy správnych riešení, prvé ako vzorák, druhé je vytvorením sústredných kružníc (ako terč), a tretie ako na Obr. 2.



Obr. 2

**<u>Úloha č. 6:</u>** *V továrni na čokoládu je* 100 *strojov. Niektoré z nich sú spojené dopravnými pásmi, pričom každá dvojica je spojená najviac jedným pásom. Navyše platí, že medzi ľubovoľnou skupinou* 98 *strojov je vždy rovnaký počet dopravných pásov (z očividných dôvodov). Koľko pásov môže byť v továrni? Určte všetky možnosti.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval JeFo)

Na začiatok si poriadne premyslíme, čo hovorí zadanie. To, že každých 98 strojov je spojených rovnakým počtom pásov znamená aj to, že keď odoberieme zo sto dva stroje, tak vždy musíme odobrať rovnaký počet pásov (lebo všetkých pásov je konštantný počet). Pozerajme sa teda na to, koľko pásov odoberáme.

Najskôr si zjednodušme úlohu a predpokladajme, že z každého stroja vychádza rovnaký počet pásov, označme si tento počet $x$. Pozrime sa na prípad, keď odoberieme dva stroje, ktoré spolu spája pás. Zmizne $x + x - 1$ pásov (za každý stroj $x$ ale jeden spolu zdieľajú, teda je spoločný pre oba a aby sme ho nezapočítali dvakrát, treba ho

raz odpočítať). A čo ak existujú dva stroje, ktoré pás nespája a odoberieme tieto dva? Potom zmizne $x + x$ pásov. Keďže jahodový džem nie je malinový lekvár a $-1 \neq 0$ a teda $2x - 1 \neq 2x$, tak by nám v tomto prípade zmizli dva rôzne počty pásov, čo ale nevyhovuje. Naozaj nevyhovuje, nemôže tu nastať dáka výnimka? Jasné, že môže, inak by som sa na to nepýtal. Čo ak žiadne dva stroje nie sú spojené pásom, alebo čo ak je každý stroj spojený pásom so všetkými ostatnými? Áno, v týchto prípadoch nenastane vyššie zmienený problém a sú to riešenia, ktoré spomenieme na konci pri odpovedi.
No, zatiaľ toho nie je veľa, ale aspoň dačo (ostáva nám ešte prešetriť všetky prípady, keď aspoň z dvoch strojov vychádza rôzny počet pásov). Ďalej budeme stroje označovať $A$, $B$ a $C$ (vychádza z nich $a$, $b$ a $c$ pásov).
Zoberme dva stroje $A$ a $B$, ktoré majú rôzny počet pásov ($a \neq b$). Uvažujme stroj $C$, ktorý by bol spojený pásom aj so strojom $A$ aj so strojom $B$ (respektíve nebol spojený ani s jedným). V takomto prípade by sa $a$ muselo rovnať $b$, lebo by muselo platiť $a + c - 1 = b + c - 1$ (respektíve $a + c = b + c$). Toto ale neplatí, preto ľubovoľný iný stroj okrem $A$ a $B$ musí byť spojený pásom práve s jedným z týchto strojov.
Rozoberme dva prípady:

- Stroje $A$ a $B$ **nie sú** spojené pásom (ich odobratím zanikne $a + b$ pásov).
  Stroje, ktoré nie sú spojené so strojom $A$ (sú spojené s $B$) musia mať $b$ pásov. Ak totiž odoberieme stroje $A$ a $B$ zanikne $a + b$ pásov a rovnaký počet pásov musí zaniknúť aj ak s $A$ odoberieme iný stroj, ktorý s ním nie je spojený. Podobne stroje, ktoré nie sú spojené so strojom $B$ (sú spojené s $A$) musia mať $a$ pásov.
  Vezmime stroj $A$ a jeden stroj s ním spojený a zanikne $a + a - 1$ pásov. V prípade stroja $B$ a jedného stroja s ním spojeného zanikne $b + b - 1$, z čoho ale vyplýva, že by sa $a$ muselo rovnať $b$, čo je spor.
  Pozor toto ešte nie je všetko, mohlo by sa ešte stať, že $A$ alebo $B$ nie je spojené so žiadnym iným strojom, teda náš argument v poslednom odstavci sa nedá použiť (na predchádzajúce argumenty to ale vplyv nemá). Tento prípad si určite dokážete dokončiť sami.
- Stroje $A$ a $B$ **sú** spojené pásom (ich odobratím zanikne $a + b - 1$ pásov).
  Tento prípad je veľmi podobný predchádzajúcemu prípadu a preto sa ho pokúste najskôr spraviť sami.
  Stroje, ktoré nie sú spojené so strojom $A$ (sú spojené s $B$) musia mať $b - 1$ pásov a naopak stroje, ktoré nie sú spojené so strojom $B$ (sú spojené s $A$) musia mať $a - 1$ pásov.
  Vezmime stroj $A$ a jeden stroj s ním spojený a zanikne $a + a - 2$ pásov. V prípade stroja $B$ a jedného stroja s ním spojeného zanikne $b + b - 2$, z čoho ale vyplýva, že by sa $a$ muselo rovnať $b$, čo je spor.
  Opäť si treba dať pozor a ešte ošetriť prípad ak $A$ (respektíve $B$) má len jeden pás, ten do stroja $B$ (respektíve $A$). Určite to zvládnete dokončiť sami.

Ako sme sľúbili, v odpovedi sa vrátime k dvom nájdeným prípadom, a to:

i) Žiadne dva stroje nie sú spojené pásom, teda celkovo je nula pásov.

ii) Každý stroj je spojený so všetkými ostatnými strojmi, teda má 99 pásov. V takomto prípade máme dokopy $(100 \cdot 99)/2 = 4950$ pásov, lebo každý stroj má 99 pásov a máme sto strojov, ale každý pás má dva konce, teda sme každý zarátali dvakrát.

**Úloha č. 7:** *Máme čísla $a_1$, $a_2$, $a_3, \dots$, $a_n$ také, že pre ľubovoľnú dvojicu čísel rôznych $k$, $l$ dáva číslo $a_k - a_l$ iný zvyšok po delení číslom $n$ ako číslo $k - l$. Dokážte, že $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ je deliteľné číslom $n$.*

Riešenie: (opravoval Cvrki)
Vrámci celej úlohy budeme s každým číslom narábať tak, že budeme brať iba jeho zvyšok po delení číslom $n$. Môžeme to spraviť? A načo nám to bude dobré?
Odpoveď na prvú otázku znie áno. Ak už ste niekedy počuli o kongruenciách, tak je vám určite jasné prečo. Ak nie, tak sa skúste zamyslieť, prečo to bude fungovať. Viac o kongruenciách sa môžete dočítať napríklad tu `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/tc2006/tc.pdf` na stranách 29 až 36.
A načo nám to teda bude dobré? Z matematického hľadiska budeme robiť úplne tie isté úvahy a výpočty, ako by sme robili bez tohto zlepšováku, no všetky zápisy budú vďaka tomu vyzerať oveľa prehľadnejšie a jednoduchšie :)
Od teraz teda platí, že ak napíšeme $a = b$, tak tým myslíme, že dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $n$.
Našou úlohou je ukázať, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ je deliteľné $n$. V našom jazyku to znamená, že tento súčet má dávať po delení $n$ zvyšok nula, t.j. chceme dokázať, že $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$. Čísel $a_1$, $a_2, \dots$, $a_n$ je dokopy $n$. To je rovnako ako počet všetkých možných rôznych zvyškov po delení číslom $n$, a preto by nás mohlo napadnúť dokázať, že čísla $a_1$, $a_2, \dots$, $a_n$ sú všetky navzájom rôzne.
Nápad je to trúfalý, no veľmi rýchlo zistíme, že nesprávny. Napríklad pre $n = 4$ spĺňajú $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$ a $a_4 = 2$ podmienky zo zadania, no pritom nie sú všetky rôzne. Naopak pre $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$ a $a_4 = 1$ vidíme, že sú všetky rôzne, no v súčte nám nedajú 0 ale 2 (ak by aj náhodou spĺňali podmienky zo zadania, tak máme dôkaz, že tvrdenie neplatí. Podmienky však nie sú splnené, napr. $a_3 - a_1 = 3 - 1$).
Tento nápad však nie je ďaleko od nápadu, ktorý nám nakoniec vyrieši celú úlohu. Nevedeli by sme nájsť inú $n$-ticu čísel, o ktorej by platilo, že sú všetky rôzne? Podmienka zo zadania nám vraví $a_k - a_l \neq k - l$. Prirátaním $a_l - k$ k obom stranám dostávame $a_k - k \neq a_l - l$ pre ľubovoľnú dvojicu $k$ a $l$. Ináč povedané, čísla $a_1 - 1$, $a_2 - 2, \dots$, $a_n - n$

sú všetky navzájom rôzne, a preto to musia byť čísla 0, 1, 2, …, $n-1$ v nejakom pomiešanom poradí, každé práve raz. Platí teda

$$\begin{aligned} a_1 - 1 + a_2 - 2 + \cdots + a_n - n &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1), \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= 0 + (1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + \cdots + n - 1) + n = \\ &= 0 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \\ &= 0 + n(n-1) + n = 0. \end{aligned}$$

Ak teda uveríme tomuto výpočtu, tak sme úlohu dokázali.
Hneď prvá rovnosť platí vďaka tomu, že $a_1-1$, $a_2-2, \ldots, a_n-n$ a 0, 1, 2, …, $n-1$ sú tie isté (možno premiešané) $n$-tice čísel, a preto budú mať rovnaký súčet. Potom sme už len využili vzorec na súčet čísel od 1 do $(n-1)$ a to, že zvyšok násobku čísla $n$ po delení $n$ je vždy 0.
Tým je úloha dokázaná.

Poznámka: Väčšinou sa to, že $a$ a $b$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom $n$ značí takto:

$$a \equiv b \mod n.$$

No v prípadoch, kedy sa celý čas pracuje so zvyškom po delení jedným daným číslom je zvykom pre jednoduchosť písať $a = b$ (samozrejme o tom treba čitateľa na začiatku článku/vzoráku/riešenia/skrípt… vždy oboznámiť).

**Úloha č. 8:** *Lojzo hrá hru s kockou kým nevyhrá. Ak hodí jednotku v prvom ťahu, hneď vyhral. V každom ďalšom ťahu hodí kockou, a ak padne menšie číslo ako v predošlom ťahu, vyhral. Koľkokrát priemerne musí Lojzo hodiť kockou, kým vyhrá hru?*

Riešenie: (opravovali Vodka a mojo)
Keď chce Lojzo niekedy počas hry vedieť, koľko hodov bude ešte potrebovať na výhru, tak to jasne závisí len od posledného hodeného čísla. Označme preto $H_i$ priemerný počet hodov, ktoré bude ešte potrebovať, ak naposledy hodil číslo $i$. Tak, a teraz skúsme napísať nejaké vzťahy, ktoré platia pre $H_i$.
Ak hodil naposledy 6, tak hodí kockou (čo iné by už teda mohol robiť). Má pravdepodobnosť $\frac{5}{6}$, že hodí menej ako 6, čím hra skončí (a teda už potrebuje 0 hodov). Ale s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ hodí 6. Koľko hodov bude potom priemerne potrebovať? No predsa $H_6$. Z toho dostávame vzťah $H_6 = 1 + \frac{1}{6}H_6$. Teraz ľahko vypočítame, že $H_6 = \frac{6}{5} = 1,2$.
Pokračujeme ďalej. Ak naposledy hodil 5, tak keď hodí kockou, tak s pravdepodobnosťou $\frac{4}{6}$ skončí. S pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ hodí 5, preto bude potrebovať priemerne $H_5$ hodov a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ hodí 6 a bude potrebovať $H_6$ hodov. Čiže $H_5 = 1 + \frac{1}{6}H_6 + \frac{1}{6}H_5$. Keďže vieme, že $H_6 = \frac{6}{5}$, tak dopočítame $H_5 = \frac{36}{25} = 1,44$.
Úplne analogicky zostavíme rovnice pre $H_2$ až $H_4$ a vypočítame, že

$$H_4 = 1 + \frac{1}{6}H_6 + \frac{1}{6}H_5 + \frac{1}{6}H_4 \Rightarrow H_4 = \frac{216}{125} = 1,728,$$

$$H_3 = 1 + \frac{1}{6}H_6 + \frac{1}{6}H_5 + \frac{1}{6}H_4 + \frac{1}{6}H_3 \Rightarrow H_3 = \frac{1296}{625} = 2,0736,$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{6}H_6 + \frac{1}{6}H_5 + \frac{1}{6}H_4 + \frac{1}{6}H_3 + \frac{1}{6}H_2 \Rightarrow H_2 = \frac{7776}{3125} = 2,48832.$$

No a teraz sa presuňme na začiatok hry. Lojzo neočakávane hodí kockou. Potom s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$ (podľa toho, čo padlo) bude potrebovať priemerne ešte 0 (ak padla 1), resp. $H_i$ (ak padlo $i \geq 2$). Teda, ak označíme $H$ počet hodov, za ktoré priemerne skončí od začiatku, tak dostaneme vzťah

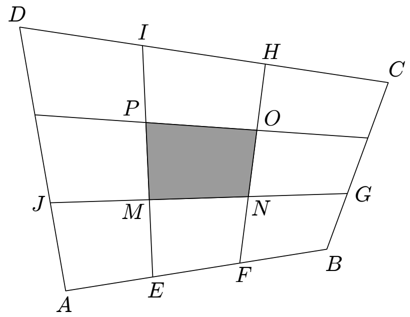
$$H = 1 + \frac{1}{6}H_6 + \frac{1}{6}H_5 + \frac{1}{6}H_4 + \frac{1}{6}H_3 + \frac{1}{6}H_2 \Rightarrow H = \frac{7776}{3125} = 2,48832.$$

Teda toto nádherné číslo je hľadaný priemerný počet hodov kockou.

**Úloha č. 9:** *Strany konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozdelíme na tretiny, a vyznačíme si príslušné body. Pospájame ich aby nám vznikla „krivá“ mriežka $3 \times 3$, ako na obrázku. Vieme, že obsah štvoruholníka $ABCD$ je 1. Aký bude obsah stredného (sivého) štvoruholníka našej mriežky?*

Riešenie: (opravoval Viktor Lukáček)
Označíme si body ako na obrázku. Zavedieme si nejakú súradnicovú sústavu a pod symbolom $\overrightarrow{X}$, budeme rozumieť súradnice bodu $X$. Dohodnime sa, že obsah trojuholníka $XYZ$ budeme označovať $S_{\triangle XYZ}$ a podobne aj pre štvoruholníky.
Najprv dokážeme, že bod $M$ je v tretine úsečky $EI$. Vyjadríme si body $E$, $I$ ako

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\right), \quad \overrightarrow{I} = \overrightarrow{D} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}\right).$$




Teraz si môžeme bod, ktorý je v tretine úsečky $EI$, smerom bližšie k $E$, vyjadriť ako

$$\overrightarrow{E} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{I} - \overrightarrow{E}\right).$$

Keď dosadíme do tohto vzťahu predošlé rovnice a upravíme, tak dostaneme $\frac{4}{9}\overrightarrow{A} + \frac{2}{9}\overrightarrow{B} + \frac{2}{9}\overrightarrow{D} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C}$. Teraz si môžeme všimnúť, že ak analogicky vyjadríme bod, ktorý je v tretine úsečky $JG$, smerom bližšie ku $J$, dostaneme rovnaký výraz. Z toho nám plynie, že priesečník úsečiek $EI$ a $JG$, čiže bod $M$, je presne v tretine úsečky $EI$ a $JG$.
Ďalej ukážeme, že obsah štvoruholníka $EFHI$ je tretina z obsahu štvoruholníka $ABCD$. Pozrime sa na trojuholníky $AED$, $EFI$ a $FBH$. Tieto trojuholníky majú rovnako veľkú základňu. A čo ich výška? Ich výšky sú vlastne vzdialenosti bodov $D$, $I$, $H$ od priamky $AB$. Keďže body $D$, $I$, $H$ sú na rovnakej priamke a majú medzi sebou rovnaké rozostupy, tak výška stredného trojuholníka je priemerná hodnota výšok krajných dvoch trojuholníkov. Z toho dostávame

$$S_{\triangle EFI} = \frac{S_{\triangle AED} + S_{\triangle EFI} + S_{\triangle FBH}}{3}.$$

Analogicky môžeme vyjadriť

$$S_{\triangle IHF} = \frac{S_{\triangle DIE} + S_{\triangle IHF} + S_{\triangle HCB}}{3}.$$

Sčítaním týchto dvoch rovností zistíme, že

$$S_{\square EFHI} = S_{\triangle EFI} + S_{\triangle IHF} = \frac{S_{\triangle AED} + S_{\triangle EFI} + S_{\triangle FBH} + S_{\triangle DIE} + S_{\triangle IHF} + S_{\triangle HCB}}{3} = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}$$

Keďže sme si v druhom odseku ukázali, že bod $M$ je v tretine úsečky $EI$ (a analogicky to platí aj pre body $N$, $O$, $P$), tak môžeme zopakovať rovnakú úvahu na štvoruholníky $MNOP$ a $EFHI$ a dostaneme, že

$$S_{\square MNOP} = \frac{1}{3} S_{\square EFHI} = \frac{1}{9} S_{\square ABCD}.$$

__Úloha č. 10:__ *Pre reálne čísla $x \geq y \geq 0$ dokážte nerovnosť:*

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^3 + y^3} + \sqrt[4]{x^4 + y^4} \leq 3x + y.$$

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mišo)
Všimnime si, že keď $y = 0$, platí vždy rovnosť, a keď $y = x$, tak nerovnosť platí tiež, ale už bez rovnosti (okrem prípadu, že $x = y = 0$). Ukážeme, že keď zvýšime $x$, nerovnosť platiť ostane. Keďže pre minimálne $x$ (tj. $x = y$) to platí a zvolením počiatočného $y$ a zvýšením $x$ vieme dosiahnuť akúkoľvek dvojicu $x$, $y$, dokážeme tak celú nerovnicu.
Predpokladajme, že pre nejakú dvojicu $x$, $y$ platí

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^3 + y^3} + \sqrt[4]{x^4 + y^4} \leq 3x + y.$$

Teraz zvýšme $x$ na $x + h$ a dokážme, že platí nerovnosť

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt[3]{(x+h)^3 + y^3} + \sqrt[4]{(x+h)^4 + y^4} \leq 3(x+h) + y = 3x + y + 3h.$$

Pravú stranu odhadneme zdola nahradením $3x + y$ ľavou stranou prvej nerovnosti. Chceme ukázať, že

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt[3]{(x+h)^3 + y^3} + \sqrt[4]{(x+h)^4 + y^4} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^3 + y^3} + \sqrt[4]{x^4 + y^4} + 3h.$$

Z pravej strany odčítame odmocniny a rovnaké mocniny na ľavej strane dajme k sebe, dostaneme

$$\left(\sqrt{(x+h)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) + \left(\sqrt[3]{(x+h)^3 + y^3} - \sqrt[3]{x^3 + y^3}\right) + \left(\sqrt[4]{(x+h)^4 + y^4} - \sqrt[4]{x^4 + y^4}\right) \leq 3h.$$

Našim cieľom je ukázať, že každá dvojica je menšia ako $h$. Našťastie sa všetky časti správajú rovnako, takže ich môžeme vyriešiť všeobecne. Čísla 2, 3, 4 nám nahradí $n$.
Ak $y = 0$, tak sa odmocniny vybijú s mocninami a nastáva rovnosť. Keď $y > 0$, tak náš problém má tvar

$$\sqrt[n]{(x+h)^n + y^n} - \sqrt[n]{x^n + y^n} \leq h.$$

Pravú stranu vieme upraviť do tvaru

$$\sqrt[n]{(x+h)^n + y^n} - \sqrt[n]{x^n + y^n} \leq \sqrt[n]{(x+h)^n} - \sqrt[n]{x^n}.$$

Teraz by to už malo byť zrejmé. Vieme, že $n$-tá odmocnina je konkávna funkcia. To znamená, že čím je jej argument väčší, tým menej rastie. Na pravej strane máme rozdiel, kde sú argumenty $(x + h)^n$ a $x^n$. Na ľavej máme tie isté argumenty, len posunuté o $y^n$. Vďaka konkávnosti vidíme, že ľavá strana bude menšia.
Ukázali sme, že každý rozdiel odmocnín je menší ako $h$. Keď vrátime odmocniny bez $h$ na pravú stranu, dostaneme

$$\sqrt{(x+h)^2 + y^2} + \sqrt[3]{(x+h)^3 + y^3} + \sqrt[4]{(x+h)^4 + y^4} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^3 + y^3} + \sqrt[4]{x^4 + y^4} + 3h \leq 3(x+h) + y.$$

To znamená, že ak zvýšime $x$, nerovnosť ostane platiť. Keďže platí pre najmenšie možné $x$ (tj. $x = y$), bude platiť pre všetky možné $x$. Úloha je dokázaná.

## Výsledková listina

### kategória BETA

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Bialas Filip | 1. | GOp Praha | 3 | 9 | 8 | 9 | 9 | | | 9 | | 44 | 134 |
| 2. | Švarc Radovan | 3. | Česká Třebová | 7 | | 9 | 9 | 9 | | 9 | 9 | | 45 | 128 |
| 3. | Hanzely Slavomír | 2. | GJAR PO | 5 | | 8 | 9 | 9 | 4 | 9 | 9 | | 44 | 122 |
| 4. | Svoboda Jakub | 4. | G Hav CR | 7 | | 8 | 9 | 9 | 7 | | 8 | | 41 | 109 |
| 5. | Hronkovičová Nina | 3. | GKom PE | 6 | | 9 | 5 | 9 | 6 | 9 | | | 38 | 105 |
| 5. | Semanišinová Žaneta | 2. | GAlej KE | 5 | | 9 | 9 | 9 | 3 | 5 | | | 35 | 105 |
| 7. | Puza Marko | 4. | GPoš KE | 10 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | 45 | 104 |
| 8. | Lipovský Mário | 4. | GJH BA | 8 | | | 9 | 9 | 9 | 5 | 8 | | 40 | 102 |
| 9. | Mišlanová Kristína | 2. | GAlej KE | 5 | | 9 | 9 | | 4 | 4 | 9 | | 35 | 101 |
| 10. | Pišťák Daniel | 2. | GChD Praha | 3 | 8 | 9 | 1 | | | 5 | | | 23 | 97 |
| 11. | Súkeník Peter | 2. | GVar ZA | 4 | 9 | 8 | 9 | 9 | | | | | 35 | 95 |
| 12. | Oravkin Eduard | 2. | 1SG BA | 5 | | 8 | 9 | 2 | 2 | | | | 21 | 92 |
| 13. | Kopf Daniel | 2. | G Slez ČR | 5 | | 8 | 9 | | 8 | | 9 | | 34 | 91 |
| 13. | Psota Miroslav | 4. | GHlin ZA | 11 | | | 9 | 9 | 8 | | 4 | | 30 | 91 |
| 15. | Stankovič Miroslav | 4. | GPoš KE | 13 | | | 9 | 9 | | | 9 | | 27 | 88 |
| 16. | Krakovská Ema | 3. | Gamča BA | 6 | | 9 | 9 | | 4 | 1 | 9 | | 32 | 87 |
| 17. | Krajčiová Katarína | 3. | GAlej KE | 8 | | 9 | | 9 | 7 | 9 | | | 25 | 85 |
| 17. | Molčan Samuel | 2. | GJAR PO | 4 | 8 | 9 | 7 | 9 | | | | | 33 | 85 |
| 19. | Králik Matej | 3. | GJH BA | 8 | | | 3 | 6 | 9 | 5 | 0 | | 23 | 80 |
| 20. | Bodík Juro | 2. | Gamča BA | 5 | | 5 | 9 | 3 | 1 | | 9 | | 27 | 77 |
| 20. | Onduš Daniel | 2. | GAlej KE | 4 | 9 | 8 | 2 | 2 | 2 | | | | 23 | 77 |
| 22. | Nepšinská Silvia | 3. | GJH BA | 7 | | 7 | 9 | 9 | 1 | | | | 26 | 73 |
| 22. | Šimková Ľudmila | 4. | GPár NR | 12 | | | 9 | | | | | | 9 | 73 |
| 24. | Batmendijn Eduard | 3. | CGsvM SL | 11 | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | | 45 | 72 |
| 24. | Halabrin Juraj | 2. | GJH BA | 5 | | 1 | 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 13 | 72 |
| 24. | Kulla Filip | 2. | BiG Sučany | 5 | | 8 | 3 | | | 5 | | | 16 | 72 |
| 24. | Truc Lam Bui | 3. | Gamča BA | 10 | | | | | | | | | 0 | 72 |
| 28. | Murin Marek | 2. | GJH BA | 5 | | 9 | 4 | | | 0 | 9 | | 22 | 71 |
| 29. | Dargaj Jakub | 4. | GPoš KE | 7 | | | 9 | 9 | | | | | 18 | 68 |
| 30. | Bednárik Ivan | 2. | Gamča BA | 2 | 3 | 8 | 1 | | 1 | | 7 | | 20 | 67 |
| 30. | Micheľová Henrieta | 2. | GAlej KE | 5 | | 0 | 9 | | 1 | | 0 | | 10 | 67 |
| 32. | Frankovská Zuzana | 2. | Gamča BA | 4 | | | | | | | | | 0 | 64 |
| 33. | Liu Zhen Ning Dávid | 3. | GJH BA | 10 | | | | | | | | | 0 | 63 |

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34. | Hollý Dominik | 3. | ŠPMNDG BA | 5 | | 7 | 6 | 1 | | 0 | | | 14 | 61 |
| 35. | Bohdal Ondrej | 3. | GJH BA | 8 | | | | | | | | | 0 | 60 |
| 36. | Sládeček Michal | 2. | GVar ZA | 4 | | | | | | | | | 0 | 59 |
| 37. | Prešinská Kristína | 3. | GPár NR | 7 | | 8 | 4 | 1 | 1 | | | | 14 | 58 |
| 38. | Choma Matej | 2. | Gamča BA | 5 | | | 7 | | | | | | 7 | 55 |
| 39. | Veselá Simona | 3. | GJH BA | 3 | | | 2 | | 9 | | | | 11 | 51 |
| 40. | Dráček František | 3. | GŠkol PB | 7 | | 7 | 2 | | | 5 | 1 | | 15 | 50 |
| 41. | Kluvanec Roman | 3. | GPár NR | 5 | | | | | | | | | 0 | 49 |
| 42. | Žídek Matěj | 2. | Frýdlant ČR | 5 | | | | | | | | | 0 | 43 |
| 43. | Pilňan Branislav | 3. | GJH BA | 4 | | | | | | | | | 0 | 40 |
| 43. | Tesař Emanuel | 2. | GBST LC | 5 | | 6 | 9 | | 1 | | | | 16 | 40 |
| 45. | Magyarová Zuzana | 4. | GBST LC | 10 | | | | | | | | | 0 | 37 |
| 46. | Kašša Ladislav | 2. | G Šamorín | 5 | | | | | | | | | 0 | 36 |
| 47. | Santrová Michaela | 3. | GMH Trstená | 8 | | | 2 | | 4 | | | | 6 | 35 |
| 48. | Sučíková Katarína | 2. | BMA, Essex | 4 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 49. | Krasula Dominik | 1. | Krnov ČR | 2 | 7 | | | | | | | | 7 | 33 |
| 50. | Horváth Samuel | 4. | GPár NR | 10 | | | | | | | | | 0 | 30 |
| 50. | Krakovská Hana | 4. | Gamča BA | 8 | | | | | | | | | 0 | 30 |
| 50. | Ralbovský Peter | 2. | ŠPMNDG BA | 5 | | | | | | | | | 0 | 30 |
| 53. | Kňaze Adam | 3. | GJCh BR | 7 | | | | | | | | | 0 | 26 |
| 54. | Macháčová Laura | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | 7 | 8 | | | | | 9 | | 24 | 24 |
| 55. | Krajmerová Barbora | 2. | G Šurany | 4 | 7 | 4 | | | | | | | 11 | 23 |
| 56. | Staňo Roman | 3. | GPoš KE | 4 | | | | | | | | | 0 | 22 |
| 57. | Kubala Milan | 2. | GJGT BB | 3 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 57. | Pavlus Matúš | 2. | GBST LC | 5 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 59. | Poppr Marián | 3. | GJN - Praha | 3 | | | | | | | | | 0 | 20 |
| 60. | Ženčuchová Andrea | 3. | GJAR PO | 4 | | | | | | | | | 0 | 19 |
| 61. | Tóthová Andrea | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | 3 | 3 | 1 | | 1 | | | | 8 | 17 |
| 62. | Hrivová Ivona | 4. | GVO ZA | 11 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 62. | Suchý Daniel | 3. | Gamča BA | 3 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 62. | Vančo Šimon | 2. | GsvM PO | 3 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 65. | Pavčík Richard | 2. | GJGT BB | 3 | | | | | | | | | 0 | 15 |
| 65. | Petráš Peter Pavel Arthur | 2. | ŠPMNDG BA | 5 | | | | | | | | | 0 | 15 |
| 67. | Majtán Martin | 1. | GPdC PN | 1 | | | | | | | | | 0 | 14 |
| 68. | Kudelčíková Martina | 2. | GVO ZA | 5 | | | | | | | | | 0 | 13 |
| 69. | Terem Tomáš | 2. | GJGT BB | 2 | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 70. | Škrlec Adam | 2. | GJH BA | 4 | | | | | | | | | 0 | 6 |
| 71. | Čepan Zdenko | 1. | GKom PE | 2 | | | | | | | | | 0 | 4 |
| 72. | Krajča Filip | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | 3 | | | | | 0 | | | 3 | 3 |

**kategória ALFA**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Hanesz Zoltán | 1. | GPoš KE | 1 | 8 | 8 | 8 | | 5 | 3 | | | 32 | 108 |
| 2. | Drotár Pavol | 1. | GPoš KE | 1 | 9 | 7 | 9 | | 8 | 1 | | | 34 | 106 |
| 3. | Bialas Filip | 1. | GOp Praha | 3 | | | | 9 | 8 | 9 | 9 | | 35 | 98 |
| 4. | Kopfová Lenka | -1. | G Slez ČR | -1 | 9 | | 9 | | | | | | 18 | 94 |
| 5. | Pándy Michal | 1. | GPoš KE | 1 | 9 | 2 | 8 | | | | | | 19 | 88 |
| 6. | Hladká Ľubica | 1. | GJGT BB | 1 | 8 | | 9 | 4 | 5 | | | | 26 | 87 |
| 7. | Genči Jakub | 1. | GPoš KE | 2 | | 9 | 9 | 6 | | 1 | | | 25 | 85 |
| 7. | Jurčík Matej | 1. | GVPT MT | 1 | 9 | 4 | 5 | | 0 | | | | 18 | 85 |
| 9. | Pišťák Daniel | 2. | GChD Praha | 3 | | | 9 | 8 | 9 | 1 | | | 27 | 82 |
| 10. | Bednárik Ivan | 2. | Gamča BA | 2 | | 8 | 9 | 3 | 8 | 1 | | | 29 | 74 |
| 11. | Král Adam | 2. | GVar ZA | 3 | | | 9 | 5 | 8 | | 3 | | 25 | 72 |
| 12. | Polačková Adela | 1. | GJAR PO | 2 | | | 8 | 6 | 5 | 1 | | | 20 | 67 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $\kappa$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13. | Mičko Juraj | 1. | GPoš KE | 1 | 9 | 9 | 9 | 1 | | | | | 28 | 66 |
| 14. | Pokrývka Milan | 1. | G Bánovce | 2 | | | | | | | | | 0 | 64 |
| 15. | Porubsky Michal | 2. | GsvCM NR | 2 | | | 9 | | | | | | 9 | 54 |
| 16. | Krasula Dominik | 1. | Krnov ČR | 2 | | | 9 | 7 | | | | | 16 | 47 |
| 17. | Halamová Lucia | 0. | BiG Sučany | 1 | 9 | 4 | | 4 | | | | | 17 | 41 |
| 18. | Veselá Simona | 3. | GJH BA | 3 | | 0 | 6 | | | 2 | | | 8 | 39 |
| 19. | Krutek Robert | 1. | GJGT BB | 1 | 8 | 0 | 6 | | 7 | | | | 21 | 36 |
| 20. | Kaintz Matúš | 1. | GPoš KE | 1 | 7 | | 2 | | | | | | 9 | 29 |
| 20. | Petruš Pavol | 1. | GPoš KE | 1 | | | | | | | | | 0 | 29 |
| 20. | Tóthová Andrea | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | | 2 | | 3 | 3 | 1 | | | 9 | 29 |
| 23. | Koľ Daniel | 1. | GPoš KE | 1 | 7 | | 8 | 2 | | | | | 17 | 28 |
| 24. | Eller Peter | 1. | GJH BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 24. | Hruška Rajmund | 1. | GPoš KE | 1 | | | 5 | | | | | | 5 | 25 |
| 24. | Petrová Simona | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | | | 3 | 0 | | | | | 3 | 25 |
| 27. | Kollárová Sára | 1. | GJGT BB | 2 | | | | 4 | 8 | 1 | | | 13 | 24 |
| 27. | Vančo Šimon | 2. | GsvM PO | 3 | | | 6 | | | | | | 6 | 24 |
| 29. | Novák Matej | 1. | GGol NR | 1 | | | | | | | | | 0 | 22 |
| 30. | Daniš Dávid | 1. | GCSL BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 30. | Kubala Milan | 2. | GJGT BB | 3 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 32. | Korman Andrej | 1. | G Hlohovec | 1 | 7 | 2 | 8 | 3 | 0 | | | | 20 | 20 |
| 32. | Macháčová Laura | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | | | 5 | 7 | 8 | | | | 20 | 20 |
| 32. | Zeman Matúš | 2. | 1SG BA | 3 | | | | | | | | | 0 | 20 |
| 35. | Hreuzek Ján | 1. | GCSL BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 18 |
| 36. | Čepan Zdenko | 1. | GKom PE | 2 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 36. | Horňáková Kristína | 1. | GPár NR | 2 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 36. | Pavčík Richard | 2. | GJGT BB | 3 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 36. | Terem Tomáš | 2. | GJGT BB | 2 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 40. | Šajanek Adrián | 1. | GCSL BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 15 |
| 41. | Suchý Daniel | 3. | Gamča BA | 3 | | | | | | | | | 0 | 14 |
| 41. | Šouc Ján | 1. | GJH BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 14 |
| 43. | Majtán Martin | 1. | GPdC PN | 1 | | | | | | | | | 0 | 13 |
| 44. | Krajča Filip | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | | 0 | 9 | 3 | | | | | 12 | 12 |
| 44. | Martinka Matej | 2. | SŠsvFA | 3 | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 44. | Poppr Marián | 3. | GJN - Praha | 3 | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 47. | Nguyen Linh | 1. | GJH BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 47. | Safko Michal | 1. | GJAR PO | 2 | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 49. | Sanigová Lucia | 3. | GVar ZA | 3 | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 50. | Roch Oliver | 3. | G Bytca | 3 | | | | | | | | | 0 | 7 |
| 51. | Nadova Ingrid | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | 1 | | 5 | | | | | | 5 | 5 |
| 51. | Páleník Michal Alexander | 2. | ŠPMNDG BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 5 |
| 53. | Németh Richard | 2. | GCSL BA | 2 | | 0 | 4 | | | | | | 4 | 4 |