Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2013/2014

Úloha č. 1: *Monty sa vybral na nákup do miestneho salónu. Mal so sebou zásobu všetkých možných mincí, ktoré sa na divokom západe používajú. Mince na divokom západe majú hodnoty — 1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c, 1\$, 2\$. Monty zistil, že nech sa akokoľvek snažil, tak cenu nákupu nevedel zaplatiť presne štyrmi (nie nutne rôznymi) mincami. Koľko najmenej mohol stáť Montyho nákup, ak viete, že stál aspoň 5 centov a Monty mal pri sebe desať kusov z každého druhu mincí?*

Riešenie: (opravovala Veronika a mojo)
V celom riešení budeme hovoriť len o sumách v centoch, tak to nebudeme stále zdôrazňovať.
Drvivá väčšina z riešiteľov prišla na to, že správne riešenie je 38. Riešenie teda spočíva v dvoch krokoch:

1. zdôvodniť, že suma 38 sa nedá zaplatiť štyrmi mincami.
2. ukázať, že všetky sumy menšie ako 38 sa rozložiť dajú.

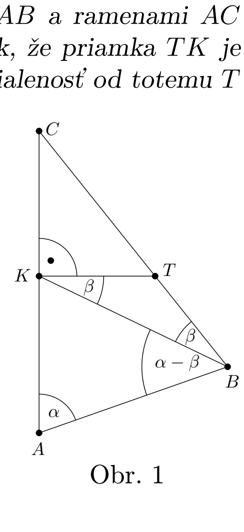
V prípade, že nepoužijeme mincu 20, tak najväčšia suma, ktorú môžeme dostať je 40 $(10 + 10 + 10 + 10)$ a druhá najväčšia suma je 35 $(10 + 10 + 10 + 5)$. Zjavne teda musíme na rozklad čísla 38 použiť mincu 20. Ak druhú mincu nepoužijeme 10, tak aby sme dostali čo najväčšie číslo, musíme použiť tri mince s hodnotou 5. To nám však dá len súčet 35 $(20 + 5 + 5 + 5)$. Druhá minca, ktorú musíme použiť je teda 10. Tým pádom by sme museli rozložiť 8 na dve mince a to sa nedá (dokážte si každý sám).
To, že všetky menšie hodnoty sa štyrmi mincami zaplatiť dajú, ilustruje nasledovná tabuľka.

5	$1+1+1+2$	6	$1+1+2+2$	7	$1+2+2+2$	8	$2+2+2+2$
9	$5+2+1+1$	10	$5+2+2+1$	11	$5+2+2+2$	12	$5+5+1+1$
13	$5+5+2+1$	14	$5+5+2+2$	15	$10+2+2+1$	16	$10+2+2+2$
17	$10+5+1+1$	18	$10+5+2+1$	19	$10+5+2+2$	20	$5+5+5+5$
21	$10+5+5+1$	22	$10+5+5+2$	23	$10+10+2+1$	24	$10+10+2+2$
25	$10+5+5+5$	26	$10+10+5+1$	27	$10+10+5+2$	28	$20+5+2+1$
29	$20+5+2+2$	30	$10+10+5+5$	31	$10+10+10+1$	32	$10+10+10+2$
33	$20+10+2+1$	34	$20+10+2+2$	35	$20+5+5+5$	36	$20+10+5+1$
37	$20+10+5+2$						

Tým sme jednoznačne určili hodnotu Montyho nákupu.

Úloha č. 2: *Po nákupe išiel Monty do indiánskej osady kmeňu Goniometrov pozrieť svojho kamaráta Sinetua. Územie, na ktorom osada leží, má tvar rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB a ramenami AC a BC. Navyše na strane BC sa nachádza totem T a na strane AC je zapichnutý kôl K tak, že priamka TK je kolmá na stranu AC. Taktiež platí, že vzdialenosť od kola K po totem T je rovnaká ako vzdialenosť od totemu T po vrchol B. Vedeli by ste len na základe týchto informácií zistiť veľkosť uhla KBA?*

Riešenie: (opravovala Foxie)
Ukážeme si jedno z jednoduchších riešení, pomôže nám aj náčrt úlohy na Obr. 1. Keďže trojuholník ABC je rovnoramenný, uhly BAK a ABT majú rovnakú veľkosť. Označíme si túto veľkosť α. Podobne z rovnoramennosti trojuholníka BTK vyplýva, že uhly KBT a BKT majú rovnakú veľkosť. Označme si ju β. Ešte si všimneme, že uhol AKT je pravý uhol. Keďže súčet vnútorných uhlov v štvruholníku (konkrétne $ABTK$) je $360°$ a súčet uhlov v trojuholníku BTK je $180°$, platia rovnice



Obr. 1

$$2\alpha + |\sphericalangle BTK| + 90° = 360°,$$
$$2\beta + |\sphericalangle BTK| = 180°.$$

Uhol, ktorý chceme vypočítať, má veľkosť $\alpha - \beta$. Túto hodnotu získame nasledujúcim spôsobom: Odpočítame druhú rovnicu od prvej a zbavíme sa tak uhla BTK.

$$2\alpha + |\sphericalangle BTK| + 90^\circ - 2\beta - |\sphericalangle BTK| = 360^\circ - 180^\circ$$

Získanú rovnicu si zjednodušíme na

$$2\alpha - 2\beta = 90^\circ.$$

Potom už len predelíme rovnicu dvomi a získame výsledok: $\alpha - \beta = 45^\circ$. Teda, veľkosť uhla KBA vieme zistiť a je rovná 45°.

Komentár: K úspešnému riešeniu mnohým z vás pomohol rozbor (náčrt zadania, napr. ako na Obr. 1) a taktiež vyjadrenie jednotlivých uhlov v trojuholníku pomocou dvoch-troch uhlov (napríklad pomocou uhlov α a β). Príliš veľa označených uhlov niektorým zneprehľadnilo postup. Takisto sa veľmi neosvedčilo zisťovanie uhlov meraním v narysovaných trojuholníkoch. Obrázok je len pomôcka, nenahrádza geometrickú úvahu.

Úloha č. 3: *Keď Monty dorazil do osady, ostal zarazený ako kôl do zeme. Celá osada bola totiž ľudoprázdna. Až po chvíli hľadania našiel celý kmeň zbehnutý okolo šamana. Ten sa totiž rozhodol vzdelávať súkmeňovcov svojským spôsobom. Zakopal fajku mieru (dôležitý predmet pri diplomatických aj voľnočasových aktivitách indiánov) a je ochotný ju vrátiť, až keď vyriešia nasledujúci hlavolam. Majú nájsť všetky také päťciferné čísla s ciferným zápisom $\overline{abcde}$, pre ktoré platí, že ich zvyšok po delení 2 je a, zvyšok po delení 3 je b, zvyšok po delení 4 je c, zvyšok po delení 5 je d a zvyšok po delení 6 je e. Pomôžte indiánom nájsť všetky takéto čísla.*

Riešenie: (opravoval Berenito a Kajo)
Toto je typický typ príkladu, pri ktorom sa najprv pokúsime čo najviac zúžiť počet kandidátov na správne riešenie a potom pre každé z nich overíme, či spĺňa to, čo sa od neho očakáva. Čiže sa budeme snažiť zistiť o číslach a, b, c, d, e najviac, ako je možné.
Začneme od a. Je to zvyšok po delení 2, čiže je to buď 0 alebo 1, no zároveň je to aj prvá cifra čísla, teda je nutne rovná 1. Ďalšie cifry sa však tak jednoznačne určiť nedajú hneď, preto ich musíme skúšať. Stále však môže existovať medzi nimi istá závislosť. V našom prípade platí, že ak vieme aký je zvyšok po delení 6 (e), tak vieme zvyšok po delení 3 (b) — pri zvyšku 0 resp. 3 je zvyšok po delení tromi 0 a podobne pre zvyšky 1 a 4 je to 1, pre 2 a 5 je to 2. Podobne, ak poznáme poslednú cifru, vieme určiť zvyšok po delení 5 (d). Keď už poznáme d a e, tak vďaka tomu, že tvoria posledné dve cifry nášho čísla, vieme určiť zvyšok po delení 4 (c). Teda ak by sme postupne volili všetky možné e, tak by sme jednoznačne vedeli doplniť b, d a následne aj c.
Cifra e môže byť rovná 1, 3 alebo 5, keďže naše číslo je nepárne ($a = 1$). Ostali nám 3 možné riešenia.

1. Pre $e = 1$ vieme, že $b = 1$, $d = 1$ a z deliteľnosti číslom 4 máme $c = 3$, teda dostávame číslo 11311.
2. Pre $e = 3$ vieme, že $b = 0$, $d = 3$ a $c = 1$, teda dostávame číslo 10133.
3. Pre $e = 5$ vieme, že $b = 2$, $d = 0$ a $c = 1$, teda dostávame číslo 12105.

Je však ešte potrebné overiť či sedí zvyšok po delení 6 (pretože ten sme nijako nezabezpečili). Ostatné zvyšky sme skonštruovali tak, že musia byť správne. Zvyšok po delení 3 je zabezpečený zo zvyšku po delení 6. Zvyšky po delení 5 a 4 sme zabezpečili voľbou cifier (d) a (c). Chvíľku overujeme a dostávame konečný výsledok, že jediným vyhovujúcim je číslo 11311. A medzi indiánmi môže opäť zavládnuť mier. Howgh!

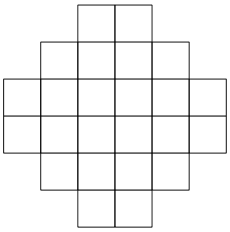
Komentár: Niektorí riešitelia nesprávne predpokladali, že cifry a, b, c, d, e sú navzájom rôzne. To však v zadaní nebolo. Dobrá rada: nepredpokladajte nič, čo nie je v zadaní. A keď je niečo nejasné, nebojte sa opýtať vedúcich, napr. mailom na `kms@kms.sk`.

Úloha č. 4: *Od šamana sa Monty spolu so Sinetuom vybrali za miestnym geometrom Rysuetom. Ten mal v piesku pred sebou vyznačené dva rôzne body A a B. Snažil sa nájsť bod C tak, aby body A, B a C tvorili pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A. Má k dispozícii kružidlo, do ktorého vie nabrať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi a narysovať kružnicu s nabraným polomerom a zvoleným stredom. Niekde však stratil svoje pravítko, a tak nevie rysovať rovné čiary. Pomôžte mu nájsť bod C len s pomocou jeho kružidla a vášho umu.*

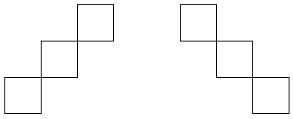
Riešenie: (opravovala Kaťa a Barča)
Prišlo nám veľa rôznych riešení. Mnohým z vás pri slovách pravouhlý trojuholník a kružnica napadla Thalesova kružnica, tak si ukážeme postup, pri ktorom ju využijeme.
Chceme, aby body B, C tvorili priemer kružnice a aby bod A na nej ležal. Vtedy bude trojuholník ABC pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Ako na to?
Jediná dĺžka, ktorú poznáme, je dĺžka strany AB. Spravme teda kružnice s polomerom $|AB|$ z bodov A (k_1) a B (k_2). Tieto kružnice sa nám pretnú v dvoch bodoch, pracujme však len s jedným a ten označme S ako stred našej Thalesovej kružnice.
Keďže $|AB| = |AS| = |BS|$, trojuholník ABS je rovnostranný. Ak chceme, aby BC bol priemer kružnice so stredom S, musí platiť $|BS| = |CS|$ a body B, S, C musia ležať na jednej priamke, preto $|\sphericalangle CSB| = 180^\circ$. Rovnostranný

trojuholník má uhly veľkosti 60°, ak by sa nám podarilo dostať tri takéto trojuholníky správne vedľa seba, získali by sme priamy uhol. Poďme teda narysovať ďalšie rovnostranné trojuholníky. Polomer v kružidle nechajme $|AB|$. Spravme kružnicu z bodu S (k_3), jej prienik s k_1 rôzny od bodu B nazvime D.
Teraz z bodu D narysujeme kružnicu k_4, ktorej prienik s k_3 sú dva body, jeden je bod A a druhý — tadá — bod, ktorý leží na priamke s bodmi S a B — náš bod C. Vznikli nám totiž tri rovnostranné trojuholníky a preto $|\sphericalangle CSD| = |\sphericalangle DSA| = |\sphericalangle ASB| = 60°$, čo znamená, že $|\sphericalangle CSB| = 180°$.
Zároveň $|SC| = |SB| = |SA|$, takže BC je naozaj priemer kružnice k_3, na ktorej leží aj bod A.
Z Thalesovej vety teda vieme, že uhol pri vrchole A je pravý. Rysueto má po probléme!

Úloha č. 5: *Potom, čo Monty so Sinetuom pomohli Rysuetovi, vybrali sa pozrieť kamarátku Parabollu. Tá práve ušila indiánsku deku skladajúcu sa z 24 malých štvorcov (pozri Obr. 2). Niektoré z týchto štvorčekov chce vyfarbiť špeciálnou indiánskou farbou. Miestny šaman ju však varoval: musí to urobiť tak, aby nevznikla žiadna trojica vyfarbených štvorčekov idúcich za sebou v diagonálnom smere (pozri Obr. 3), inak by mohla privolať zlých duchov. Koľko najviac štvorčekov môže byť vyfarbených?*

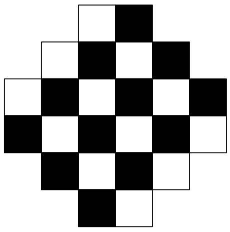


Obr. 2



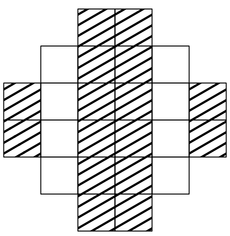
Obr. 3

Riešenie: (opravovala Plutvička a Hago)
Predtým, než začneme vyfarbovať špeciálnou indiánskou farbou, predstavme si, že ju máme vyfarbenú ako šachovnicu (Obr. 4). O bielych políčkach vieme povedať, že z hľadiska vyfarbovania diagonálnych trojíc nesúvisia s čiernymi (pretože žiadne biele políčko sa nenachádza v diagonálnej trojici s čiernym), a naopak.

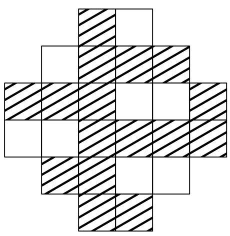


Obr. 4

Teraz poďme vyfarbovať špeciálnou indiánskou farbou biele políčka. Máme tu štyri trojice diagonálne susediacich políčok (smerom zľava-dole do prava-hore). V žiadnej diagonálnej trojici nemôžu byť vyfarbené všetky 3 políčka, preto môžeme z každej trojice vyfarbiť maximálne dve políčka. Trojice sú štyri, takže máme vyfarbených $2 \cdot 4 = 8$ políčok.
To isté poďme spraviť pre čierne políčka. Všimnime si, že tu máme opäť štyri trojice diagonálne susediacich políčok (len sú otočené o 90°, takže idú smerom zľava-hore do prava-dole). Opäť môžeme vyfarbiť len 2 políčka z každej trojice, takže spolu môžeme z čiernych vyfarbiť maximálne $2 \cdot 4 = 8$ políčok.
Ukázali sme, že teoreticky vieme špeciálnou indiánskou farbou vyfarbiť najviac $8 + 8 = 16$ políčok. Ešte treba nájsť konkrétne riešenie, v ktorom overíme, že to skutočne ide (vyšrafované políčka sú vyfarbené špeciálnou indiánskou farbou). Dá sa to napríklad ako na Obr. 5 a 6.



Obr. 5



Obr. 6

<u>**Úloha č. 6:**</u> *Po návšteve indiánskej osady sa Monty vrátil späť do Oakvillu. Ihneď si všimol, že z miestnej banky stúpa kúdol čierneho dymu. Šerif, ktorý už bol na mieste činu, oboznámil Montyho s tým, že sa jedná o bankovú lúpež. Banditi ukradli z trezoru dve vrecia so zlatými tehličkami. V prvom vreci bolo a tehličiek a v druhom vreci b tehličiek. Navyše si bankár, vášnivý počtár, zapamätal, že číslo $a + 11b$ je deliteľné číslom 13, a že číslo $a + 13b$ je deliteľné číslom 11. Lúpež ho však natoľko zaskočila, že zabudol na to, koľko tehličiek bolo v jednotlivých vreciach. Zaujímalo by ho, aký najmenší lup si mohli banditi odniesť. Pomôžte mu a zistite, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať súčet $a + b$, ak viete, že čísla a a b sú kladné, celé a spĺňajú vzťah, ktorý si zapamätal bankár.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Lindtka)
Vieme, že $13 \mid a + 11b$ a $11 \mid a + 13b$, pričom a, b sú kladné celé čísla. Využime teraz to, že ak máme dve čísla, ktoré sú obe deliteľné číslom k, tak aj ich súčet bude deliteľný číslom k. Keďže $13 \mid a + 11b$ a zároveň $13 \mid 13b$, tak $13 \mid (a + 11b) + 13b$. Obdobne platí, že $11 \mid (a + 13b) + 11b$. Ukázali sme teda, že $13 \mid a + 24b$ a $11 \mid a + 24b$. Keďže sú čísla 11 a 13 nesúdeliteľné, tak nutne $13 \cdot 11 = 143 \mid a + 24b$. Z toho vyplýva, že $a + 24b = 143k$ pre nejaké kladné celé číslo k.
Pozrime sa na konkrétne prípady:

- Ak $k = 1$, tak $a + 24b = 143$. Vieme, že $143 : 24 = 5$ zv. 23 a náš minimálny súčet $a + b$ dosiahneme práve vtedy, keď $b = 5$ (celá časť) a $a = 23$ (zvyšok po delení). Ak by sme sa totiž rozhodli b zmenšiť o nejaké kladné celé číslo l, tak by sme museli a zväčšiť o $24 \cdot l$, čo nám ale zvýši súčet $a + b$. Ak by sme chceli b zväčšiť, muselo by a byť záporné číslo, čo nie je možné. Čiže minimálny súčet $a + b = 28$.
- Čo ak $k \geq 2$? Podobným spôsobom nájdeme a, b. Čiže b bude celá časť a a bude zvyšok $143k$ po delení 24.
  $k = 2, \quad a = 22, \quad b = 11, \quad a + b = 22 + 11 = 33$
  $k = 3, \quad a = 21, \quad b = 17, \quad a + b = 21 + 17 = 38$
  $k = 4, \quad a = 20, \quad b = 23, \quad a + b = 20 + 23 = 43$
  $k = 5, \quad a = 19, \quad b = 29, \quad a + b = 19 + 29 = 48$
- Ak budeme k ďalej zvyšovať, bude sa aj b zvyšovať. Pre hodnotu $k = 5$ ale máme $b = 29$, čiže samotné b je väčšie ako náš zatiaľ najmenší súčet $a + b = 28$.

Čiže 28 je najmenšia hodnota, ktorú môže nadobúdať súčet $a + b$.

<u>**Úloha č. 7:**</u> *Šerif nechal v okradnutej banke svojho zástupcu a vydal sa s Montym na prechádzku po meste. Toho po chvíli rozhovoru zaujal nový šerifov odznak. Na rozdiel od klasických hviezdicových odznakov mal tento odznak tvar päťuholníka $ABCDE$. Navyše mal niekoľko zaujímavých vlastností. Strany AB a EA mali rovnakú dĺžku, uhly pri vrcholoch B a E boli pravé a zvyšné tri strany BC, CD a DE mali tiež rovnakú dĺžku (ale nie nutne rovnakú ako strany AB a EA). Dokážte, že pre odznak s takýmito vlastnosťami platí, že vzdialenosť od vrchola A k vrcholu B je rovnaká, ako vzdialenosť od vrchola A k priesečníku priamok BD a CE.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Petržlen a Hopko)
Označme si prienik BD a CE ako X, a prienik AX a CD ako Y. Všimnime si najprv, že obrázok je symetrický podľa osi $\sphericalangle BAE$ (stačí si predstaviť ako nakreslíme takýto 5-uholník: z A-čka kreslíme 2 rovnaké úsečky symetricky vzhľadom na os, na ich koncoch sa otočíme o pravý uhol smerom k osi, a opäť kreslíme 2 rovnaké úsečky symetricky vzhľadom na os, a ich konce spojíme). Teda X leží na osi $\sphericalangle BAE$ a $AY \perp CD$.
Ako dokážeme, že dve úsečky sú rovnako dlhé? Jednou možnosťou je ukázať, že tvoria rovnoramenný trojuholník. Preto nám stačí ukázať, že $|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle AXB|$.
Poďme teda spočítať nejaké uhly pomocou $|\sphericalangle ABX|$. Zjavne $|\sphericalangle CBD| = 90° - |\sphericalangle ABX|$. Trojuholník BCD je rovnoramenný, preto $|\sphericalangle CDB| = 90° - |\sphericalangle ABX|$, teda aj $|\sphericalangle YDX| = 90° - |\sphericalangle ABX|$. Keďže $|\sphericalangle DYX| = 90°$, z trojuholníka DYX máme $|\sphericalangle YXD| = |\sphericalangle ABX|$. Nakoniec $|\sphericalangle YXD| = |\sphericalangle AXB|$ a teda $|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle AXB|$.

<u>Komentár:</u> Viacerí z vás dokazovali, že A má byť stred kružnice opísanej trojuholníku BEX (rozmyslite si, že to stačí), a to sa dá pomerne jednoducho využitím vety o úsekovom uhle.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Monty so šerifom išli do salónu na pivo. Pri vedľajšom stole si všimli starého Harryho, ako hrá sám pexeso. Pexeso sa hrá nasledovne. Harry najskôr rozloží na stôl $2n$ kartičiek pexesa otočených obrázkom dole.*[1] *V každom ťahu hráč postupne otočí dve kartičky. Ak sú rovnaké, zoberie si ich. Ak sú rôzne, otočí ich naspäť. Harry sa snažil pozbierať všetky kartičky na čo najmenej ťahov. Koľko najmenej ťahov potrebuje Harry, ktorý má mimo iného perfektnú pamäť, na to, aby pozbieral všetky kartičky, nech je pexeso na začiatku rozložené akokoľvek?*

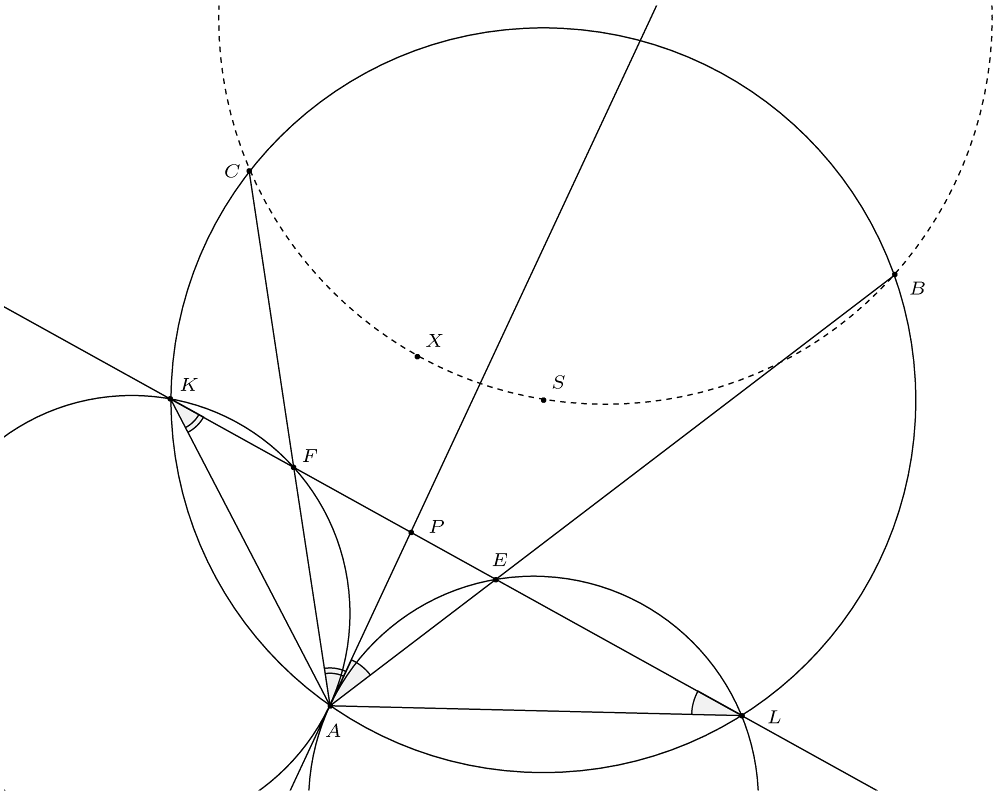
<u>Riešenie:</u> (opravovala Baša a Mišo)
Harry vie určite skončiť na $2n$ ťahov, keď si najprv všetky kartičky na n ťahov objaví a potom si ich na n ťahov pozbiera. Navyše, po $n - 1$ objavovacích ťahoch mu ostali posledné 2 neobjavené kartičky. Buď sú pár, alebo pár ku každej z nich už Harry videl. Každopádne mu stačí o jeden ťah menej. Ešte nám treba ukázať, že existuje také rozloženie kartičiek, že by $2n - 1$ ťahov naozaj potreboval.
Harry môže hrať akokoľvek dobre, nikdy nevie, čo sa ukrýva pod ešte neodkrytou kartičkou. Mohlo by sa stať, že by prvým ťahom objavil 2 nové kartičky a v každom ďalšom ťahu by objavil najprv jednu novú kartičku, a jednu,

[1] Na každom pexese je práve jeden obrázok. Obrázkov je n a každý z nich je práve na dvoch pexesách.

ktorej pár už niekde videl. Takto by mal stále 2 načaté páry a aspoň jeden nenačatý, kým by nespravil $n-1$ ťahov (aj s prvým ťahom). Potom už žiadne nenačaté páry nemá, takže keď otočí hociktorú ešte neotočenú kartičku, vie kde je jej pár. Na pozbieranie spotrebuje ďalších n ťahov, teda dokopy $2n-1$.
Ukázali sme, že $2n-1$ ťahov Harrymu vždy stačí a tiež, že by mu menej stačiť nemuselo. Najmenej ťahov, ktoré Harrymu stačí, nech by bolo pexeso rozložené akokoľvek, je preto $2n-1$.

Úloha č. 9: *Zo salóna sa Monty so šerifom vydali späť do nedávno vykradnutej banky. Tam práve šerifov zástupca za pomoci bankára dokreslil skicu tváre jedného z banditov podieľajúceho sa na krádeži. Monty z obrázku ihneď rozpoznal Krivozubého Tonyho, šéfa bandy Drzohubých. Bola to už ich tretia lúpež za posledný mesiac, a tak sa Monty rozhodol, že skúsi týchto nebezpečných kriminálnikov dostať za mreže. Ihneď sa vybral do miestnych stajní po svojho koňa. Tam si všimol zaujímavú hru jedného z kovbojov. Na veľkej kruhovej ohrade mal vyznačené tri rôzne body A, B a C. Dnu do ohrady si na zem nakreslil bod X. Priesečníky priamok BX a CX s ohradou rôzne od B a C si označil postupne K a L. Priesečníky priamky LK s priamkami AB a CA si označil postupne E a F. Nakoniec si zistil, či sa kružnice opísané trojuholníkom AFK a AEL dotýkajú. Ak sa dotýkali, tak miesto, kde ležal bod X, vyfarbil červenou farbou. Potom zmazal všetky body okrem bodov A, B a C, zvolil si nový vnútorný bod ohrady a pustil sa do hry znova. Monty sa zamyslel nad tým, ktoré body vnútra ohrady by boli vyfarbené na červeno, ak by si kovboj za bod X postupne zvolil všetky vnútorné body ohrady. Pomôžte Montymu zodpovedať jeho otázku.*

Riešenie: (opravoval Ondro a Vodka)
Na začiatok si nakreslíme obrázok. Budeme rátať uhly a označíme si štandardne $|\sphericalangle BAC| = \alpha$.



Obr. 7

Kedy sa dve kružnice dotýkajú v bode A? Napríklad práve vtedy, keď vieme bodom A viesť spoločnú dotyčnicu k obom kružniciam. No keď P je priesečník tej dotyčnice s KL, tak z úsekových uhlov platí: $|\sphericalangle ELA| = |\sphericalangle EAP|$ a $|\sphericalangle FKA| = |\sphericalangle FAP|$, spolu $|\sphericalangle ELA| + |\sphericalangle FKA| = \alpha$. A je jasné, že to platí aj naopak: ak $|\sphericalangle ELA| + |\sphericalangle FKA| = \alpha$, tak vieme nájsť taký bod P, aby sa uhly rovnali a AP bola spoločná dotyčnica.
Vzťah $|\sphericalangle ELA| + |\sphericalangle FKA| = \alpha$ je z trojuholníka AKL ekvivalentný s $|\sphericalangle KAL| = 180° - \alpha$ a z toho $|\sphericalangle KBL| = \alpha$. Vieme, že $|\sphericalangle BLC| = \alpha$ (obvodové uhly). Preto z trojuholníka LXB máme $|\sphericalangle BXL| = 180° - \alpha - \alpha$, odkiaľ $|\sphericalangle BXC| = 2\alpha$. Takže podmienka o veľkosti uhla KAL je ekvivalentná s $|\sphericalangle BXC| = 2\alpha$.
Keďže všetky úvahy sme robili oboma smermi, vidno, že tie kružnice sa dotýkajú práve vtedy, keď $|\sphericalangle BXC| = 2\alpha$, to znamená, že X leží na kružnici opísanej BSC, kde S je stred opísanej kružnice ABC.
To sme rozobrali jeden prípad. Môže sa však stať, že oba body K, L ležia na oblúku AB (resp. AC). Situácia vyzerá trochu inak. No opäť tým istým postupom (dotyčnica a úsekové uhly) dostaneme, že sa dotýkajú práve vtedy, keď $|\sphericalangle ELA| + |\sphericalangle FKA| = 180° - \alpha \Leftrightarrow |\sphericalangle KAL| = |KBL| = \alpha$. A už rovnako dokončíme, že je to vtedy, keď X je na kružnici opísanej BSC.

Môžeme si všimnúť, že tieto výsledky nedávajú zmysel pre tupouhlé trojuholníky, lebo by $|\sphericalangle BXC| > 180°$. Preto je tu ešte jedna možnosť, a to že X (a teda aj K, L) leží v opačnej polrovine k BC ako bod A. To sa však opäť vyrieši rovnako cez dotyčnicu. Dotýkajú sa práve vtedy, keď $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle FEA| + |\sphericalangle EFA| = 180° - \alpha$. No teraz aj $|\sphericalangle BLC| = 180° - \alpha$. Preto nám vyjde, že je to práve vtedy, keď $|\sphericalangle BXC| = 360° - 2\alpha$. Toto sa zase nikdy nestane pre ostrouhlé trojuholníky. A pre tupouhlé sú to zasa body na kružnici opísanej BSC.
Aké prípady nám ešte ostali? Už len jeden a to taký, že $\alpha = 90°$. Vtedy to vyjde úsečka BC (množina bodov, kde $|\sphericalangle BXC| = 180°$). No zrejme nemá zmysel sa baviť o bodoch na tejto úsečke, lebo potom $E \equiv L, F \equiv K$. A tie kružnice, čo sa majú dotýkať, potom nie sú jasne zadané. No je jasné, že žiaden iný bod nemôže byť zafarbený.
Záver je, že zafarbené sú body na kružnici (teda na oblúku vnútri kružnice opísanej ABC) opísanej BSC, okrem bodov B, C. A pre pravouhlý trojuholník (s pravým uhlom pri A), nie je zafarbené nič.

<u>Úloha č. 10:</u> *Pred odchodom sa ešte Monty zastavil v svojej chatrči na kraji mesta, aby si zbalil veci na cestu. Našiel skoro všetko čo potreboval, no nenašiel žiadny zo svojich obľúbených polynómov. Pre každý z Montyho obľúbených polynómov $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ platí, že koeficient a_n je nenulový a n je aspoň jedna. Ďalej platí, že všetky koeficienty $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ sú racionálne čísla, a že $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Posledné, čo vieme o polynóme $p(x)$ je to, že je najmenšieho možného stupňa (t.j. n je najmenšie možné). Nájdite aspoň jeden Montyho obľúbený polynóm. Nezabudnite dokázať, že je najmenšieho možného stupňa.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Cvrki)
Na začiatok si dokážme jedno užitočné tvrdenie. Tvrdíme, že rovnica

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = d, \tag{1}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, má jediné riešenie $a = b = c = d = 0$.

Poďme si to dokázať. Na začiatok si predeľme celú rovnicu (1) číslom a (tu predpokladáme, že $a \neq 0$). Keď ešte spravíme substitúciu $e = b/a,\ f = c/a$ a $g = d/a$, tak dostaneme rovnicu

$$\sqrt{2} + e\sqrt{3} + f\sqrt{6} = g, \tag{2}$$

kde $e, f, g \in \mathbb{Q}$ (čísla $a,\ b,\ c,\ d$ sú racionálne, a teda aj čísla $e,\ f,\ g$ sú racionálne). Odčítajme od oboch strán výraz $f\sqrt{6}$ a trošku upravme obe strany:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + e\sqrt{3} &= g - f\sqrt{6}\\ (\sqrt{2} + e\sqrt{3})^2 &= (g - f\sqrt{6})^2\\ 2 + 2e\sqrt{6} + 3e^2 &= g^2 - 2gf\sqrt{6} + 6f^2\end{aligned}$$

Poslednú rovnicu môžeme upraviť na tvar $2(e + gf)\sqrt{6} = g^2 + 6f^2 - 3e^2 - 2$. Ak by sme mohli rovnicu predeliť výrazom $2(e+gf)$, tak by sme naľavo dostali $\sqrt{6}$ a napravo nejaké racionálne číslo. To je zjavne spor, čiže výrazom $2(e + gf)$ nemôžeme deliť (a teda musí byť nula). Z toho dostávame, že $e + gf = 0$. Rovnicu (2) môžeme upraviť podobným spôsobom ak od oboch strán odčítame výraz $e\sqrt{3}$. Obdobný postup nás dovedie k tomu, že $2f + ge = 0$ (vyskúšajte si to). Nakoniec môžeme od oboch strán (2) odčítať $\sqrt{2}$. Takto dospejeme k podmienke $3ef + g = 0$.
Dostali sme tri pekné rovnice $e + gf = 0$, $2f + ge = 0$ a $3ef + g = 0$. Tie majú spĺňať racionálne čísla $e,\ f$ a g. Ľahko sa presvedčíme (skúste sa presvedčiť sami ;)), že jediná vyhovujúca trojica je $e = f = g = 0$. Jediné možné riešenie rovnice (2) je teda $(e, f, g) = (0, 0, 0)$, to však zjavne nevyhovuje. To znamená, že a sa nutne rovná nule (v opačnom prípade nemá rovnica (2), a teda ani rovnica (1) riešenie).
Vieme teda, že $a = 0$. Rovnica (1) sa nám zmení na rovnicu $b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = d$. No jediná trojica racionálnych čísel spĺňajúca túto rovnicu je nulová trojica (skúste si to dokázať sami, stačí sa inšpirovať predošlou časťou riešenia :)).
Spoločnými silami sme teda ukázali platnosť tvrdenia na začiatku riešenia. Toto tvrdenie budeme volať (1) a teraz ho veľakrát využijeme.

Postupne ukážeme, že stupne Montyho obľúbeného polynómu nemôžu byť $1,\ 2$ ani 3. Nezabúdajme, že $p(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$, a že vedúci koeficient musí byť nenulový:

- Ak $p(x) = ax + b$, tak $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = a\sqrt{2} + a\sqrt{3} + b = 0$. Z tvrdenia (1) vyplýva, že $a = b = 0$, čo je spor s nenulovosťou a.
- Ak $p(x) = ax^2 + bx + c$, tak $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5a + 2a\sqrt{6} + b\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c = 0$. Z (1) dostaneme $a = 0$, čo je spor.
- Ak $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tak $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 11a\sqrt{2} + 9a\sqrt{3} + 5b + 2b\sqrt{6} + c\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d = 0$. Z (1) dostaneme $c + 11a = c + 13a = 0$, z čoho máme $a = 0$ a opäť spor.

Už teda vieme, že stupeň Montyho obľúbeného polynómu je aspoň štyri. Tak ho skúsme pre tú štvorku nájsť. Zjednodušme si život a predpokladajme, že vedúci koeficient je jedna. Máme teda $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Po chvíľke umocňovania zistíme, že $p(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 20\sqrt{6}+49+11a\sqrt{2}+9a\sqrt{3}+5b+2b\sqrt{6}+c\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d = 0$. Buď

môžeme chvíľu rozmýšľať a vymyslieť ako napasovať koeficienty, tak aby sme naozaj dostali nulu, alebo môžeme opäť použiť tvrdenie (1). To nám povie, že $p(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$ práve vtedy, keď $20+2b = 11a+c = 13a+c = 49+5b+d = 0$. Z toho už ľahko dopočítame, že $a = c = 0$, $b = -10$ a $d = 1$. Našli sme teda vyhovujúci polynóm $p(x) = x^4-10x^2+1$ a zároveň sme ukázali, že vyhovujúci polynóm nižšieho stupňa neexistuje.
Podarilo sa nám teda nájsť jeden Montyho obľúbený polynóm $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ a sme hotoví :)

Komentár: Niektorí z vás v riešeniach buď mlčky predpokladali platnosť tvrdenia (1) alebo ho prehlásili za zrejmé. To však nie je moc dobré. Ak totiž chcete nejaké tvrdenie v riešení nedokazovať, tak by malo byť buď triviálne (to má mať dôkaz približne na riadok a nie na stranu), alebo dobre známe (napr. veta o obvodovom uhle) alebo treba do riešenia napísať odkaz na literatúru/web stránku, kde je toto tvrdenie dokázané. Do budúcna na to myslite ;)

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	2	9	9	9	9	9				45	45
1.	Mišlanová Kristína	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9	9				45	45
1.	Semanišinová Žaneta	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9	9				45	45
1.	Švarc Radovan	3.	Česká Třebová	6		9	9	9	9	9	9		45	45
5.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	3	8	9	9	9	7				42	42
5.	Krajčiová Katarína	3.	GAlej KE	7		8	9	7	9	9			42	42
5.	Micheľová Henrieta	2.	GAlej KE	4	9	9	9	7	8				42	42
5.	Oravkin Eduard	2.	1SG BA	4	9	9	8	7	9				42	42
5.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	3	9	9	6	9	9				42	42
5.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	3	9	9	6	9	9				42	42
5.	Tódová Lucia	2.	GPár NR	4	9	9	6	9	9				42	42
12.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	3	8	9	9	6	9				41	41
13.	Bodík Juro	2.	Gamča BA	4	8	9	9	7	7				40	40
13.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	GJH BA	9			9	9	9	6	7		40	40
13.	Sklenka Marek	2.	BiG Sučany	2	6	9	9	8	8				40	40
16.	Bohdal Ondrej	3.	GJH BA	7		9	6	9	9		5		38	38
16.	Hanzely Slavomír	2.	GAP SB	4	7	9	6	7	9				38	38
16.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	3	8	9	6	7	8				38	38
19.	Darmovzal Ondřej	3.	Brno ČR	3		6	9	9	3		9		36	36
19.	Halabrin Juraj	2.	GJH BA	4	9	9	9	6	3				36	36
19.	Hronkovičová Nina	3.	GKom PE	5		9	9	9	9				36	36
19.	Kulla Filip	2.	BiG Sučany	4	5	9	7	8	7				36	36
19.	Mojžišová Karolína	4.	Gamča BA	7		9	9	9	9				36	36
24.	Krakovská Ema	3.	Gamča BA	5		9	9	7	9	1			35	35
24.	Petráš Peter Pavel Arthur	2.	ŠPMNDG BA	4	6	9	4	7	9				35	35
24.	Psota Miroslav	4.	GHlin ZA	10			9	9	3	7	7		35	35
27.	Hollý Dominik	3.	ŠPMNDG BA	4	7	9	9	8	1				34	34
27.	Chabanová Barbora	2.	GJGT BB	4	8	5	6	8	7				34	34
27.	Choma Matej	2.	Gamča BA	4	8	9	3	7	7				34	34
27.	Králik Matej	3.	GJH BA	7		9	5	9	9		2		34	34
27.	Pieš Adrián	4.	ŠPMNDG BA	6		9	9	9	7				34	34
27.	Ralbovský Peter	2.	ŠPMNDG BA	4		9	5	9	7		4		34	34
27.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	3	9	7	9		9				34	34
34.	Horváth Samuel	4.	GPár NR	9			9	9	9		6		33	33
34.	Kluvanec Roman	3.	GPár NR	5		9	7	9	8	0			33	33
34.	Krasula Dominik	1.	???	1	8	9	8	0	8				33	33
34.	Šimková Ľudmila	4.	GPár NR	11			9	9	9	6			33	33
34.	Trenčanská Tereza	2.	Gamča BA	3	6	9	9	1	8				33	33
39.	Bui Truc Lam Michal	3.	Gamča BA	9			9	9	7	7			32	32
39.	Dráček František	3.	GŠkol PB	6		9	9	0	9		5		32	32

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
39.	Konček Marián	3.	G1.máj MA	5		9	7	9	7				32	32
39.	Puza Marko	4.	GPoš KE	9			9	7		9	7		32	32
43.	Dujava Matej	3.	SPŠE Prešov	3	9	9		7	6	0			31	31
43.	Kojda Jakub	2.	ŠPMNDG BA	4	9	4	7	8	3				31	31
43.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1	8	9		9	5				31	31
43.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	3	7	9	5	7	3				31	31
43.	Szalay Erik	4.	ŠPMNDG BA	6		9	6	7	9				31	31
43.	Tesař Emanuel	2.	GBST LC	4	8	9	2	9	3				31	31
49.	Kopf Daniel	2.	G Slez ČR	4	9	9	2	7	3				30	30
49.	Lipovský Mário	4.	GJH BA	8			9	9	9		3		30	30
49.	Murín Marek	2.	GJH BA	4	8	4	5	7	6				30	30
49.	Nepšinská Silvia	3.	GJH BA	6		9	7	9	1		4		30	30
49.	Pavlus Matúš	2.	GBST LC	4	5	9		7	9				30	30
49.	Svoboda Jakub	4.	G Hav CR	6			7	9	9		5		30	30
55.	Kudelčíková Martina	2.	GVO ZA	4	8	4	3	7	7				29	29
55.	Kurimský Ján	2.	GsvMo	4	9	9		8	3				29	29
55.	Santrová Michaela	3.	GMH Trstená	7		9	2	9	9				29	29
55.	Steinhauserová Anna	4.	G Dacice	5		9	6	0	9		5		29	29
59.	Murin Martin	3.	GJH BA	6		4	6	8	7		3		28	28
59.	Žídek Matěj	2.	Frýdlant ČR	4	9	9	9			1			28	28
61.	Bačinská Irena	4.	ŠPMNDG BA	7		9	9	9					27	27
61.	Kováčová Barbora	4.	ŠPMNDG BA	7		9	9		9				27	27
61.	Prešinská Kristína	3.	GPár NR	6		5	7	8	7				27	27
64.	Tomašec Samuel	4.	GVar ZA	8		9	9	9	8				26	26
65.	Kral Adam	2.	GVar ZA	2	5	4	9	1	6				25	25
65.	Madro Oskar	2.	ŠPMNDG BA	2	9	4	2	7	3				25	25
67.	Dargaj Jakub	4.	GPoš KE	7			2	9	9		4		24	24
67.	Krakovská Hana	4.	Gamča BA	8			9	7	7	1			24	24
67.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	2	6	8	2		8				24	24
70.	Batmendijn Eduard	3.	CGsvM SL	10			9		9		5		23	23
70.	Burian Benjamín	4.	ŠPMNDG BA	4	6	2	5	6	4				23	23
70.	Ženčuchová Andrea	3.	GJAR PO	4		4	5	7	6		1		23	23
73.	Kováčová Mária	3.	GsvCM NR	4	8	5	2		7				22	22
73.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3	5	2	9		6				22	22
75.	Balážová Michaela	4.	G Bánovce	5		9	1	1	9	0			20	20
75.	Pecko Marcel	2.	GBST LC	4	6	3		8	3				20	20
77.	Hrivová Ivona	4.	GVO ZA	10			6	9	3	1			19	19
77.	Magyarová Zuzana	4.	GBST LC	9			2	9	3	0	5		19	19
77.	Matejovičová Tatiana	4.	GJH BA	10			5	7	7				19	19
80.	Fabšíková Nina	2.	1SG BA	4	8	6	4						18	18
81.	Kašša Ladislav	2.	G Šamorín	4	6	9		0	1				16	16
81.	Kobák Michal	4.	Gamča BA	7				7	9				16	16
81.	Koščo Marek	4.	GVar ZA	6		4		7	5	0			16	16
81.	Štefkovič Ján	4.	G Bánovce	5		9			7				16	16
85.	Gašpárek Miroslav	4.	SG ZA	4	9	3	2		1				15	15
85.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	3	9	3			3				15	15
87.	Kňaze Adam	3.	GJCh BR	6		4		9	1				14	14
87.	Stankovič Miroslav	4.	GPoš KE	13				7		7			14	14
89.	Camara Anna	3.	GMet BA	3	6	4			3				13	13
90.	Polovka Maroš	4.	GKuk PP	5				9	3				12	12
91.	Abaffyová Adela	4.	G Tvrdošín	4							9		9	9
91.	Kuchár Martin	4.	G Šamorín	4	9								9	9
93.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	2	5				3				8	8
94.	Iždinská Dominika	4.	GJH BA	6				6					6	6

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1	9	9	9	8	9		9		45	45
1.	Steinhauser Václav	0.	G Dacice	0	9	9	9	9	9	9	0		45	45
3.	Pokrývka Milan	1.	G Bánovce	1	8	9	9	9	9				44	44
4.	Genči Jakub	1.	GPoš KE	1	9	9	9	7	9				43	43
5.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	2		9	5	7	9		9		39	39
6.	Horňáková Kristína	1.	GPár NR	1	9	9	9	7	4				38	38
7.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	3			9	7	9	5	7		37	37
8.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	2				9	9	9	9		36	36
9.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	3				8	9	9	9		35	35
9.	Zeman Matúš	2.	1SG BA	2			9	9	9	1	7		35	35
11.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	3			9	9	7	9			34	34
12.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	3				9	9	6	9		33	33
12.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	3		9		9	9	6	9		33	33
14.	Sklenka Marek	2.	BiG Sučany	2				6	9	9	8		32	32
14.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	3				8	9	9	6		32	32
16.	Lihotský Samuel	2.	1SG BA	2		9	9	8	4				30	30
16.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	3				8	9	6	7		30	30
18.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	2		7	9	7	1	5			29	29
18.	Šajanek Adrián	1.	GCSL BA	1	4	9	4	5	4	1	7		29	29
20.	Daniš Dávid	1.	GCSL BA	1		9		6	4	1	7		27	27
21.	Dujava Matej	3.	SPŠE Prešov	3				9	9		7		25	25
21.	Krasula Dominik	1.	???	1				8	9	8	0		25	25
21.	Trenčanská Tereza	2.	Gamča BA	3				6	9	9	1		25	25
24.	Darmovzal Ondřej	3.	Brno ČR	3					6	9	9		24	24
24.	Kollárová Sára	1.	GJGT BB	1	9	4		7	4		0		24	24
24.	Včelková Veronika	3.	GPOH DK	3			9	9	4	2			24	24
27.	Jankovich Juraj	1.	GJGT BB	1	9	2	7	1	4				23	23
27.	Martinka Matej	2.	SŠsvFA	2		9			9	5			23	23
29.	Madro Oskar	2.	ŠPMNDG BA	2				9	4	2	7		22	22
29.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1	1	4	7	9		1			22	22
31.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	3			9	9	3				21	21
31.	Ľuptáková Sára	1.	GsvFA ZA	1	9	5	3		4				21	21
33.	Hreuzek Ján	1.	GCSL BA	1		9	4	6			0		19	19
33.	Kral Adam	2.	GVar ZA	2				5	4	9	1		19	19
33.	Škrlec Adam	2.	GJH BA	3			7	5	3	4			19	19
36.	Koľ Daniel	1.	GPoš KE	1	9		1	7					17	17
37.	Camara Anna	3.	GMet BA	3			6	6	4				16	16
37.	Halamová Lucia	1.	BiG Sučany	1	9	7	3	8	4				16	16
37.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	2				6	8	2			16	16
37.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3				5	2	9			16	16
37.	Szabo Michal	2.	GAM TT	3			9	2	4	1			16	16
42.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	2		9	1	5					15	15
43.	Escherová Eva	2.	G Bánovce	2			9	4					13	13
44.	Roch Oliver	3.	G Bytca	3			5	3	4				12	12
45.	Bátrna Jozef	3.	G Bytca	3			6	4					10	10
46.	Michálek Tomáš	3.	G Bytca	3				6			0		6	6
47.	Podstavek Daniel	1.	1SG BA	1				4	1				5	5
48.	Kocan Kristián	2.	SPŠE Prešov	2					4				4	4
49.	Sůra Tomáš	2.	1SG BA	2									0	0
49.	Šimová Mária	1.	EGMT	1									0	0