Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2013/2014

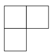
Úloha č. 1: *Počas putovania si Monty so Sinetuom vždy pred spaním vytiahli z plecniaka nekonečnú štvorčekovú sieť a ceruzku a zahrali sa nasledujúcu hru. Monty najskôr vyfarbil jeden zo štvorčekov. Potom si Sinetu vybral iný štvorček a tiež ho vyfarbil. Takto sa striedali, až kým nebolo vyfarbených šesť štvorčekov. Štvorčeky, ktoré pridávali, si však nemohli vyberať len tak ledabolo. Štvorček, ktorý pridali, musel spĺňať nasledujúce podmienky:*

- *nový štvorček musí susediť hranou s aspoň jedným už vyfarbeným štvorčekom (toto sa nevzťahuje na úplne prvý štvorček, ktorý vyfarbil Monty);*
- *nový štvorček nesmie spolu s nejakou trojicou už vyfarbených štvorčekov vytvoriť štvorec 2×2 (týmto sa nemusia trápiť, kým sú vyfarbené menej ako tri štvorčeky).*

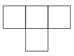
Nakoniec si útvar zložený z vyfarbených štvorčekov vystrihli. V prípade, že tento útvar tvoril plášť kocky,[1] *tak hru vyhral Sinetu, v opačnom prípade vyhral Monty. Dokážte, že pre Sinetua existuje víťazná stratégia (t.j., že vie vyhrať, nech hrá Monty akokoľvek) a aj ju popíšte.*

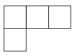
Riešenie: (opravovala Betka)
Sinetu vyhráva v prípade, že na konci po šiestich ťahoch vznikne na plániku sieť kocky. Aby sme zistili, či pre neho existuje víťazná stratégia, a aká je, prejdeme si jednotlivé ťahy a aké možnosti môžu nastať. (Za rôzne budeme považovať iba tie možnosti, ktoré nevieme dostať z iných pomocou otočenia a preklopenia.)
Nech už hrajú akokoľvek, po prvých troch ťahoch máme na plániku jednu z týchto dvoch situácií:


3a

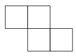

3b

Nakreslíme si aj možnosti po štvrtom ťahu:

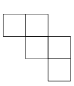

4a

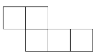

4b

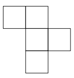

4c

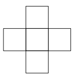

4d

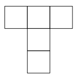
Stále z každej z nich môže vzniknúť sieť kocky. Teraz je na rade Monty, ktorý sa bude snažiť pridať štvorček tak, aby z toho už sieť kocky nevznikla.
Pozrime sa na všetky možnosti v piatom ťahu:

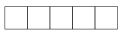

5a

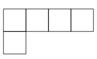

5b

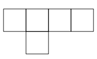

5c

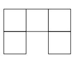

5d

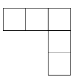

5e

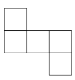

5f


5g


5h


5i


5j


5k

Môžeme si všimnúť, že jedine z možností 5f, 5i a 5j už nebude možné vytvoriť sieť kocky, nech už by Sinetu urobil čokoľvek v 6. ťahu.

[1] Útvar zo šiestich štvorčekov tvorí plášť kocky, ak sa doňho dá obaliť kocka s veľkosťou steny jeden štvorček, tak, že každý štvorček z útvaru pokrýva práve jednu stenu kocky.

Stačí teda, ak sa Sinetu vyhne v 4. ťahu tým možnostiam, ktoré Montymu dovolia urobiť 5f, 5i alebo 5j. A to sú možnosti 4b a 4c.
Potom, nech už Monty urobí čokoľvek, Sinetu to v šiestom ťahu vie vždy dorobiť na sieť kocky.
Výherná stratégia pre Sinetua existuje. Stačí, ak vo štvrtom ťahu pridá štvorček tak, aby nevznikla možnosť 4b ani 4c. To sa mu určite podarí, pretože z oboch možností v treťom ťahu vie vytvoriť možnosť 4a.

Úloha č. 2: *Počas svojej púte do New Orleans prešli Sinetu s Montym cez mnoho mestečiek. Každé mesto malo pred salónom tabuľu, kde sa pýšilo nielen svojím menom, ale aj počtom obyvateľov. Potom, čo prešli niekoľko miest, si Monty všimol, že počet obyvateľov každého z miest je nejaká mocnina trojky. Sinetu, ktorý síce nebol až tak zdatným algebraikom, no o to lepším pozorovateľom, si naopak všimol, že každé z týchto čísel malo na mieste desiatok párne číslo. Našich kamarátov ihneď napadla otázka, či to neplatí aj vo všeobecnosti. Potvrďte ich domnienku a dokážte, že každé číslo tvaru 3^n, kde n je prirodzené číslo väčšie než dva, má na mieste desiatok párne číslo.*

Riešenie: (opravovali murko a JeFo)
V nasledujúcom texte nájdi matematickú indukciu[2]:
Máme dokázať, že každé číslo tvaru 3^n, kde n je väčšie ako dva, má na mieste desiatok párnu cifru.

1° Začnime s najmenším vyhovujúcim číslom, a to je $3^3 = 27$. Cifra na mieste desiatok je párna.

Vrhnime sa ďalej a naše číslo si napíšme v tvare $3 \cdot 3^{(n-1)}$. Podozrivé, číslo $3^{(n-1)}$ je tiež mocnina trojky.

2° Skúsme na chvíľku predpokladať, že číslo $3^{(n-1)}$ má na mieste desiatok párnu cifru. (Však to platí pre 27, prečo by to neplatilo aj ďalej.) Toto je náš (indukčný) predpoklad.
Pozrime sa bližšie na súčin $3 \cdot 3^{(n-1)}$. Je to súčin čísla 3 s nejakou mocninou čísla 3. Pri súčine cifry činiteľov na mieste stoviek a cifry na vyšších miestach neovplyvňujú vo výsledku cifru na mieste desiatok (spomeňme si, ako nás učili násobiť v tretej triede). Budú nás teda zaujímať len posledné dve cifry čísla $3^{(n-1)}$.
Z (indukčného) predpokladu vieme, že cifra na mieste desiatok bude párna. Super, však to už je. Predsa keď vynásobím párne číslo trojkou dostanem párne číslo. A do kelu, možno to ešte nie je. Čo ak sa mi prenesie dáky nepodarok v podobe nepárneho čísla zo súčinu trojky a cifry na poslednom mieste? (Napríklad ak by číslo končilo cifrou 5, tak by sa mi pri násobení tromi preniesla jednotka.) Tak teda preskúmajme, čo sa nám môže preniesť pri násobení trojkou. Buď nič, jednotka alebo dvojka. To nie je také strašné až na tú jednotku, ešte tú by sa nám mohlo podariť dajak zašantročiť a máme to.
Naše číslo $3^{(n-1)}$ je mocnina trojky, tak sa skúsme pozrieť, akou cifrou sa bežne končia mocniny trojky. (Prosím, len nech sa nekončia číslami 4, 5, 6.) Násobím ako o život a ľaľa, prvá zdravá krava. Hotovo, jasáme a ideme na obed. A na čo sme to vlastne prišli? No predsa na to, že mocniny trojky končia len na čísla 3, 9, 7, alebo 1 a v takomto poradí sa aj striedajú. Teda pri násobení tromi sa prenesie buď obrovské nič alebo dvojka, čo je skvelé, lebo ak dvojku považujeme za párne číslo (obrovské nič je samozrejme párne číslo), tak súčet dvoch párnych čísel je párny a my máme na mieste desiatok párnu cifru.

Úloha č. 3: *Na pol ceste do New Orleans sa Monty so Sinetuom zastavili na celý deň v Brunchville, aby načerpali sily na druhú polovicu svojej výpravy. Odviedli svoje kone do stajní a vybrali sa do miestneho salónu. Zvesť o ich púti ich predbehla, a tak na nich v salóne čakal obrovský jablkový koláč, ktorý im upiekla manželka barmana. Keďže vedela, že Monty aj Sinetu obľubujú matematiku, tak sa nedala zahanbiť a koláč okorenila malou matematickou hádankou. Koláč mal tvar rovnobežníka $ABCD$. Stredy strán BC a CD boli postupne ozdobené dvoma marcipánovými ružami E a F. Čokoládovou polevou boli vyznačené úsečky AE, AF a BD. Do priesečníku úsečiek AE a BD bola zabodnutá sviečka M a do priesečníku úsečiek AF a BD sviečka N. Úlohou Montyho a Sinetua bolo dokázať, že sviečky delia úsečku BD na tretiny, t.j., že platí $|BM| = |MN| = |ND|$. Presvedčte sa, že dokážete rozmýšľať, aj keď myslíte na koláč, a dokážte to tiež.*

Riešenie: (opravovali CD a Kajo)
Ak si do pôvodného obrázku zo zadania narysujeme aj druhú uhlopriečku AC, rozdelí nám rovnobežník na dva identické trojuholníky: ABC, respektíve ACD. Označme priesečník uhlopriečok ako S. Keďže sa uhlopriečky v rovnobežníku pretínajú v polovici, úsečky BS a DS sú ťažnicami daných trojuholníkov. Úsečky AE a AF sú rovnako ťažnicami, teda priesečníky s BS a DS, body M a N, sú ťažiskami trojuholníkov a delia ťažnice BS a DS v pomere $2 : 1$. Čiže $|MB| : |SM| = |ND| : |SN| = 2 : 1$. Potom $|DN| = |BD|/3$, pretože úsečka DN tvorí dve tretiny z polovice uhlopriečky BD, podobne $|BM| = |BD|/3$. Zvyšnou tretinou je úsečka MN:

$$|MN| = |MS| + |SN| = 2 \cdot \frac{|BD|}{6} = \frac{|BD|}{3}.$$

Teda $|BM| = |MN| = |ND| = |BD|/3$.

[2] Tým, ktorí nevedia, čo to je matematická indukcia, odporúčame prečítať si vzorák úlohy č. 8, prvej zimnej série 2009/2010. Nájsť ho môžete na `http://www.kms.sk/docs/vzoraky/20092010/zim/seria1.pdf`.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Po výdatnom jedle a výdatnom spánku si dali Sinetu a Monty skorý obed a vyrazili z Brunchvillu do diaľav, za ktorými ležalo mesto New Orleans. Zanedlho stretli obchodníka, ktorý sa zúfalo prehrabával vo svojom dostavníku. Zistili od neho, že sa chystá odkúpiť salón v neďalekom mestečku. Cez telegram sa dohodol, že cena bude n kilogramov zlatých tehličiek. Ráno však zaspal, a tak sa len rýchlo obliekol a do dostavníka hodil n zlatých tehličiek, ktoré mal zrovna po ruke. Každá jeho tehlička má v kilogramoch celočíselnú hmotnosť a váži menej ako n kilogramov (t.j. najviac $n-1$ kilogramov). Navyše všetkých n tehličiek váži dokopy menej ako $2n$ kilogramov. Obchodník by chcel spomedzi týchto tehličiek vybrať niekoľko tak, aby vážili presne n kilogramov. Bojí sa však, že takáto hromada tehličiek nemusí existovať. Zdvihnite mu náladu a dokážte, že pre prirodzené číslo $n > 1$ vieme spomedzi n tehličiek spĺňajúcich podmienky v zadaní vybrať hromadu, ktorá bude dokopy vážiť presne n kilogramov. (Tehličky samozrejme nemôžeme lámať na menšie.)*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Berenito)
Monty sa pozrel na svoje tehličky na bruchu a zamyslel sa. Prvá vec, ktorú si všimol, je fakt, že keďže každá tehlička váži priemerne menej ako 2 kg, tak drvivá väčšina tehličiek bude naozaj ľahká. Pozrel sa teda bližšie na tehličky vážiace 1 kg, pretože nimi vie ľahko doplniť kôpku na požadovanú hmotnosť. Určite taká bude aspoň jedna, hraničný prípad je $(n-1)$ tehličiek vážiacich 2 kg a jedna vážiaca 1 kg. Ak máme tehličku, ktorá váži 3 kg, tak potom musíme mať aspoň dve tehličky vážiace 1 kg $(3 + (n-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2n-1)$. Podobne sa to dá rozšíriť na všeobecné tvrdenie, že ak je medzi našimi tehličkami nejaká, ktorá váži K kg, tak je medzi našimi tehličkami aspoň $(K-1)$ vážiacich 1 kg. Tak a teraz poďme na kôpku hádzať tehličky od najťažšej (ktorá má T kg), až kým nedôjdeme k situácii, že pridaním ďalšej tehličky už prekročíme n kg. Ľahko sa dá vidieť, že nám nemôže chýbať viac ako $(T-1)$ kg. Ale predsa sme si už ukázali, že máme k dispozícii $(T-1)$ tehličiek vážiacich 1 kg, z ktorých s veľkou pompou pridáme na kôpku toľko, koľko kg nám chýba do n.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *Jedného rána, keď si Monty robil volské oko, napadla Sinetua nasledujúca úloha. Monty mal panvicu, ktorá mala tvar kruhu s polomerom $R = 6$ cm. Na nej mal položené žĺtko, ktoré malo tvar kruhu s polomerom $r = 3$ cm a dotýkalo sa okraja panvice. Sinetua zaujíma, aký najväčší kus šunky vie zmestiť na panvicu. Šunka musí mať tvar obdĺžnika, nemôže sa prekrývať so žĺtkom (no dotýkať sa môžu) a nesmie vyčnievať z panvice (opäť sa však môže dotýkať okraja). Zistite aký najväčší obsah môže mať šunka spĺňajúca všetky kulinárske podmienky zo zadania.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Paľo)
Tak, pohodlne sa usaďte, do ľavej ruky si vezmite panvicu so žĺtkom, do pravej rozťahovaciu šunku, a pozorne čítajte tento recept. Síce nesľubujem, že raňajky nepripálite, ale vaša šunka bude mať aspoň maximálny obsah.
Na začiatok si musíme naše kulinárske dielo poriadne pooznačovať. Stred panvice označíme S, stred žĺtka Z. Ďalej okraj panvice, teda kružnicu, si označíme k a žĺtko nám bude reprezentovať kružnica z. A konečne bod dotyku žĺtka s okrajom panvice si označíme O.
Väčšina z vás mala správne tušenie, že taká maximálna šunka musí mať jednu stranu dotyčnicu ku žĺtku prechádzajúcu cez S a musí sa dotýkať dvoma vrcholmi okraja panvice. Všetky takéto šunky budeme ďalej nazývať *regulárne*. Lenže Sinetu je víťúz a potrebuje riadny dôkaz, prečo maximálna šunka bude určite regulárna. Našou ideou bude vziať si ľubovoľnú šunku vyhovujúcu zadaniu (teda neprekrývajúcu žĺtko ani okraj panvice) a dokázať, že pre takúto šunku existuje regulárna šunka s väčším obsahom. Potom bude stačiť hľadať maximálnu šunku na množine regulárnych šuniek, čím si úlohu značne zjednodušíme.
Prvým nápadom môže byť nasledujúca úvaha: Majme ľubovoľnú vhodnú šunku na panvici. Označme si ju bodmi A, B, C, D. Platí teraz, že naša šunka je prienikom dvoch pásov. Jeden pás je daný priamkami AB a CD, druhý priamkami BC a AD. Určite platí, že bod S neleží vo vnútri oboch pásov, inak by to znamenalo, že šunka prekrýva stred panvice, a teda nutne aj žĺtko. Teda existuje bez ujmy na všeobecnosti pás daný priamkami AB a CD, v ktorom S neleží. Nech AB je tá priamka z dvojice AB a CD, ktorá leží bližšie k žĺtku z.
Teraz si predstavme, ako naša panvica vlastne vyzerá. Šunka leží v kruhovom odseku danom priamkou AB. Vo zvyšnej časti panvice leží stred panvice. Teraz je zrejmé, že dokážeme chytiť žĺtko, a otočiť ho okolo S tak, aby bola priamka OS kolmá na AB. Z toho je zrejmé, že rovnaké rozloženie dostaneme otočením šunky okolo S o rovnaký uhol, len opačným smerom. Teda dokážeme otočiť šunku okolo S tak, aby mala dvojicu strán AB a CD kolmú na priamku OS, druhú dvojicu strán BC a AD máme zas rovnobežnú s OS. Samozrejme, obsah šunky sa otočením nezmenil.
Teraz si uvedomme, že môžeme šunku natiahnuť v páse danom priamkami AB, CD až po okraje panvice, lebo v tomto páse sa nenachádza stred a určite ani žĺtko, lebo priamka AB delí panvicu na dve časti — v jednej je šunka, v druhej žĺtko. Tým sme dostali šunku s väčším (prípadne rovnakým) obsahom ako pôvodná šunka, pričom táto nová šunka sa dotýka dvoma vrcholmi okraju panvice.
Ďalej platí, že AB je rovnobežná s dotyčnicou na žĺtko z cez S. Preto môžeme šunku roztiahnuť aj v druhom smere tak, že S bude ležať na strane AB. A hľa, teraz máme regulárnu šunku vyhovujúcu zadaniu s väčším (prípadne rovnakým) obsahom ako pôvodná šunka.
Teraz už stačí len zistiť, aký maximálny obsah môže mať obdĺžnik $ABCD$ vpísaný do polkruhu s polomerom 6 cm a stredom S tak, že vrcholy A, B ležia na priemere a vrcholy C, D na polooblúku. Táto časť sa dá už riešiť hocakým spôsobom. Buď si vyjadríme $|AB|$ ako $2x$, potom zrejme $|SB| = x$ a z Pytagorovej vety $|BC| = \sqrt{36 - x^2}$, a teda

hľadáme x tak, aby súčin $2x\sqrt{36-x^2}$ bol maximálny. Na toto môžeme použiť napríklad AG nerovnosť. Ak by sme sa chceli vyhnúť AG-čku, vždy si môžeme z pravouhlého trojuholníka SBC pomocou sínusu a kosínusu uhla CSB vyjadriť SB a BC a ďalej maximalizovať obsah, tu už AG-čko nebude potrebné. Avšak my si ukážeme, ako sa táto časť dá ľahko vyriešiť čisto geometricky.
Predstavme si celý kruh, pričom v hornej polovici máme obdĺžnik $ABCD$. Je zrejmé, že keď si obdĺžnik predĺžime na celý kruh, natiahnutím pásu určeného priamkami BC a AD, dostaneme obdĺžnik $A'B'CD$ s dvojnásobným obsahom, pričom je tiež zrejmé, že $|A'D| = 2|AD|$ a podobne $|B'C| = 2|BC|$. Teraz si vezmeme pravouhlý trojuholník $A'CD$. Úsečka $A'C$ je uhlopriečka obdĺžnika $A'B'CD$, teda obdĺžnik $A'B'CD$ má dvojnásobný obsah ako trojuholník $A'CD$ a teda obsahy trojuholníka $A'CD$ a obdĺžnika $ABCD$ sú rovnaké. Trojuholník $A'CD$ je pravouhlý, so stredom S na strane $A'C$. Stačí zistiť, kde na polooblúku $A'C$ leží bod D tak, aby výška z bodu D na stranu $A'C$ bola maximálna, keďže dĺžka strany $A'C$ je pevná (je to priemer kruhu, teda 12 cm). Teraz už je jasné, že bod D musí byť čo najďalej od strany $A'C$, teda trojuholník $A'CD$ bude rovnoramenný. Teda bude platiť $|CD| = |A'D| = 2|AD|$. Z Pytagorovej vety už teraz ľahko zrátame, že $|AD| = \sqrt{18}$, $|CD| = 2\sqrt{18}$, a obsah obdĺžnika $ABCD$ je $36\,\mathrm{cm}^2$.

<u>Úloha č. 6:</u> *Sinetu a Monty po dlhej púti konečne dorazili do New Orleans a ihneď vyhľadali miestneho šerifa. Povedali mu o pláne Drzohubých a o tom, že by ho za pomoci šerifových ľudí radi prekazili. Šerif nechcel nič nechať na náhodu, a preto sa rozhodol, že najskôr zistí, či on sám nie je lepší na organizáciu celej akcie. Ako je dobre známe, tak úspech každej akcie strážcov zákona závisí od troch kladných premenných $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Kvalita Montyho plánu je $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$, zatiaľ čo kvalita šerifovho plánu je $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$. Dokážte, že Montyho plán nikdy nie je horší, t.j., že pre všetky $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Taktiež nájdite všetky také hodnoty a, b, c, pre ktoré nastáva rovnosť.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Viktor)
Najprv sa zbavíme menovateľov prenásobením kladným číslom abc a dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2bc + 2ca - 2ab.$$

Potom prehodíme všetko na ľavú stranu:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca + 2ab \geq 0.$$

Teraz si stačí všimnúť, že ľavá strana sa dá napísať ako štvorec:

$$(a + b - c)^2 \geq 0,$$

čo zjavne platí pre všetky reálne čísla a, b, c. Týmto sme nerovnicu dokázali, lebo všetky úpravy boli ekvivalentné. A z toho ďalej pekne vidno, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a + b - c = 0$, čiže ak $a + b = c$.

<u>Iné riešenie:</u>
Nerovnicu $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \geq 2bc + 2ca$ môžeme po predelení číslom 2 upraviť na

$$\frac{(a + b)^2 + c^2}{2} \geq c(a + b).$$

To je AG nerovnosť pre dva (nezáporné) členy $(a + b)^2$ a c^2.

<u>Komentár:</u> Nerovnica sa dá dokázať viacerými spôsobmi, pričom ten vo vzoráku je asi najrýchlejší. Mnohí z vás zabudli dokázať, pre ktoré a, b, c nastáva rovnosť. Často ste nepísali, že úpravy, ktoré robíte sú ekvivalentné. Za to sme síce nestrhávali body, ale len kvôli tomu, že to boli triviálne ekvivalentné úpravy, ako napríklad vynásobenie kladným číslom, odčítanie, . . . , ale ak nie je zrejmé, že je to ekvivalentná úprava, treba zdôvodniť, prečo je ekvivalentná. V iných príkladoch by sa za to body mohli strhávať.

<u>Úloha č. 7:</u> *Šerifovi špehovia zistili, že na lúpeži sa podujme úplne celá banda Drzohubých. Každý člen bandy má jedinečné identifikačné číslo, ktoré je menšie ako $2^{2^{2^2}} = 2^{16}$ a v binárnom zápise neobsahuje ani trojicu za sebou idúcich núl, ani trojicu za sebou idúcich jednotiek. (Číslo $4 = 100_2$ vyhovuje, ale číslo $17 = 10001_2$ nemôže byť identifikačným číslom banditu, lebo v binárnom zápise obsahuje trojčíslie 000.) Navyše všetky povolené identifikačné čísla sú použité. Monty so Sinetuom by radi vedeli, koľko banditov môžu očakávať. Pomôžte im a zistite, koľko existuje rôznych identifikačných čísel medzi 1 a 2^{16}.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Hiphop a Mojo)
Skúsme si najprv vypísať prvých pár čísel. Jednociferné vyhovuje len jedno, a to 1. Dvojciferné sú dve: 10_2 a 11_2. Ďalej ľahko prídeme na to, že trojciferné sú tri, štvorciferných je päť, päťciferných osem, atď. To celkom nápadne pripomína Fibonacciho postupnosť[3]. Skúsme si to teda dokázať.
Označme počet vyhovujúcich n-ciferných identifikačných čísel ako $p(n)$. Pozrime sa, ako môže končiť nejaké identifikačné číslo. Máme dve možnosti:

[3] To je taká postupnosť čísel, ktorej člen sa vypočíta ako súčet predošlých dvoch členov. Prvé dva členy sú dve jednotky.

- Ak naše číslo končí dvoma rovnakými číslicami, tak si všimnime, že ak tie dve (posledné) číslice odstránime, dostaneme vyhovujúce $(n-2)$-ciferné číslo. A naopak, každému $(n-2)$-cifernému číslu vieme na koniec pridať dve rovnaké číslice rôzne od poslednej a dostaneme vyhovujúce n-ciferné číslo končiace dvoma rovnakými číslicami. Teda počet vyhovujúcich čísel končiacich dvoma rovnakými číslicami je $p(n-2)$.
- Podobne, ak naše číslo končí dvoma rôznymi číslicami, tak ak odstránime poslednú číslicu, dostaneme vyhovujúce $(n-1)$-ciferné číslo. A naopak, každému $(n-1)$-cifernému číslu vieme na koniec pridať číslicu rôznu od poslednej a dostaneme vyhovujúce n-ciferné číslo končiace dvoma rôznymi číslicami. Teda počet vyhovujúcich čísel končiacich dvoma rôznymi číslicami je $p(n-1)$.

Dokopy máme $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$, a keďže $p(1) = 1$ a $p(2) = 2$, je jasné, že $p(n) = F(n+1)$ (kde $F(n)$ je n-té Fibonacciho číslo). Keďže číslo 2^{16} je 17-ciferné (v binárnej sústave), chceme zrátať súčet

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(16) = F(2) + F(3) + \cdots + F(17).$$

To sa už dá zrátať priamo alebo sa dá jednoducho indukciou ukázať (skúste si), že

$$F(1) + F(2) + \cdots + F(n) = F(n+2) - 1,$$

a teda stačí zrátať $F(19) - 1 - F(1)$. Monty so Sinetuom teda môžu očakávať 4179 banditov.

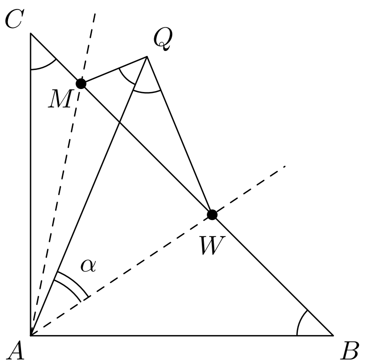
Komentár: Niektorí riešitelia po vypočítaní prvých pár členov odvážne vyhlásili, že sa jedná o Fibonacciho postupnosť. Aby sme však takéto tvrdenie mohli použiť v riešení, musíme ho aj dokázať. Chýbajúci dôkaz mal za následok značnú zrážku bodov.

Úloha č. 8: *Sinetu s Montym nachystali na Drzohubých dokonalú pascu. Dva najvzácnejšie body galérie dali do jednej malej miestnosti. Dosť malej na to, aby okolo nej zvládli nainštalovať skryté bezpečnostné mreže. Jeden z bodov (slávny Whistlerov bod) bol navyše upevnený na špeciálnom závite, na ktorého odšróbovanie treba presne toľko ľudí, koľko má celá banda Krivozubého Tonyho. Večer pred lúpežou sa Monty schoval v miestnosti s dvoma vzácnymi bodmi (druhým z bodov bola vzácna Mona Bod s potmehútskym úsmevom), aby mohol v správny čas spustiť mreže. Miestnosť mala tvar rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s pravým uhlom pri bode A. Oba vzácne body W a M ležali na strane BC. Navyše si Montyho zrak pravého kovboja všimol dve zaujímavosti. Za prvé to, že platilo $|WM|^2 = |WB|^2 + |MC|^2$ a za druhé, že $|\sphericalangle WAM| = 45°$. Dokážte, že to nie je náhoda, t.j., že $|WM|^2 = |WB|^2 + |MC|^2$ práve vtedy, keď $|\sphericalangle WAM| = 45°$.*

Riešenie: (opravovala Lindtka)

Pozrime sa najprv na prípad, keď $|\sphericalangle WAM| = 45°$. Označme si bod Q, ktorý vznikne preklopením bodu B cez os WA. Z osovej súmernosti dostávame $|\sphericalangle BAW| = |\sphericalangle WAQ|$. Označme si $\alpha = |\sphericalangle WAQ|$.

Vieme, že $|\sphericalangle WAM| = 45°$, čo znamená, že $|\sphericalangle QAM| = 45° - \alpha$. Vieme, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAW| + |\sphericalangle WAQ| + |\sphericalangle QAM| + |\sphericalangle MAC| = \alpha + \alpha + (45° - \alpha) + |\sphericalangle MAC|$, z čoho nám vyplýva, že $|\sphericalangle MAC| = 45° - \alpha$. Keďže $|BA| = |QA| = |CA|$, tak Q nie je len obraz B po preklopení cez os WA, ale je aj obraz bodu C po preklopení cez os MA (premyslite si). Z týchto osových súmerností dostávame $|\sphericalangle WQA| = |\sphericalangle WBA| = 45°$ a $|\sphericalangle MQA| = |\sphericalangle MCA| = 45°$. Všimnime si, že $|\sphericalangle WQM| = |\sphericalangle WQA| + |\sphericalangle MQA| = 45° + 45° = 90°$. Keďže trojuholník WQM je pravouhlý, platí preň Pytagorova veta, čiže $|WQ|^2 + |QM|^2 = |WM|^2$. Ale $|BW| = |WQ|$ a $|CM| = |MQ|$, čiže $|BW|^2 + |CM|^2 = |WM|^2$, čo sme chceli dokázať.



Obr. 1

Teraz rozoberme prípad, keď neplatí $|\sphericalangle WAM| = 45°$.

Ak by $|\sphericalangle WAM| > 45°$, tak vnútri úsečky WM existuje bod W' taký, že $|\sphericalangle W'AM| = 45°$. Z toho, čo sme pred chvíľou dokázali, potom platí $|BW'|^2 + |CM|^2 = |W'M|^2$. Avšak $|BW| < |BW'|$ a $|W'M| < |WM|$ a keď to dáme dokopy, dostaneme

$$|BW|^2 + |CM|^2 < |BW'|^2 + |CM|^2 = |W'M|^2 < |WM|^2.$$

Podobne, ak by $|\sphericalangle WAM| < 45°$, tak $|BW|^2 + |CM|^2 > |WM|^2$. Preto ak neplatí $|\sphericalangle WAM| = 45°$, neplatí ani $|BW|^2 + |CM|^2 = |WM|^2$.
Čiže $|BW|^2 + |CM|^2 = |WM|^2$ práve vtedy, keď $|\sphericalangle WAM| = 45°$.

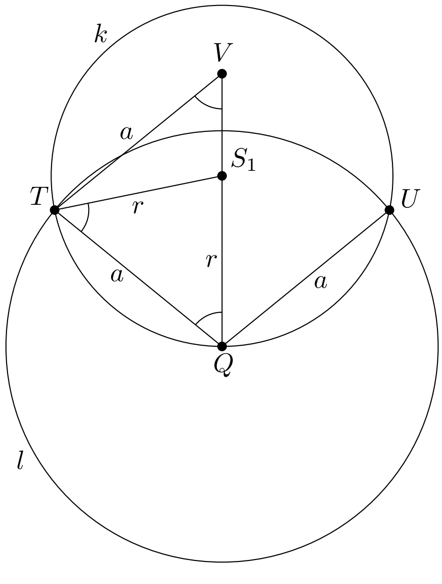
Poznámka: Ako si niektorí všimli, toto nie je vždy pravda. Body na úsečke BC musia byť v poradí B, W, M, C. Inak by rovnosť $|BW|^2 + |CM|^2 = |WM|^2$ nemohla nastať (premyslite si prečo). Čiže aj keby $|\sphericalangle WAM| = 45°$, ale poradie by bolo B, M, W, C, tak nie je pravda, že $|BW|^2 + |CM|^2 = |WM|^2$. V našom dôkaze sme potichu predpokladali správne poradie (skúste nájsť kde).

Úloha č. 9: *S úderom polnoci začul Monty tlmený výbuch a časom mnoho tichých krokov rozliehajúcich sa po galérii. Netrvalo dlho a prvý bandita vkročil aj do miestnosti s dvoma najvzácnejšími exponátmi. Monu Bod hneď odmontoval, no s Whistlerovým bodom mal problém. Postupne do miestnosti vchádzalo viac a viac banditov a spoločnými silami sa snažili odmontovať tento vzácny bod. Monty potichu počítal. Keď dnu vkročil posledný z Drzohubých, tak Monty nenápadne vyliezol z úkrytu aj z miestnosti a spustil bezpečnostnú mrežu. S rachotom dopadla na zem a do galérie sa začali valiť šerifovi ľudia aj s pripravenými putami. Drzohubí padli Sinetuovi s Montym na lep. Zatýkanie nechal Monty na šerifa a jeho ľudí a rozhodol sa, že si prezrie galériu. V celej galérii bolo $2n+1$ črepníkov, kde n je prirodzené číslo. V každom črepníku bolo racionálne množstvo hliny. Navyše ľubovoľných $2n$ z týchto črepníkov sa dá rozdeliť na dve n-tice tak, že v oboch bude rovnaké množstvo hliny. Dokážte, že vo všetkých črepníkoch bolo rovnako veľa hliny.*

Riešenie: (opravovali Mišo a Vodka)
Najprv sa pozrime do črepníkov a zistime, koľko je v nich hliny. Záporné množstvá sa nám nepáčia, tak do každého črepníka prisypme toľko, koľko nám chýba do nuly v najprázdnejšom črepníku. Ak je všade nezáporné množstvo hliny, tak toľko odsypeme. Takto si zaistíme, že črepník, v ktorom je najmenej hliny, je prázdny. Navyše, zo všetkých črepníkov sme odsypali rovnako, takže rovnosti sa nám nepokazia, lebo súčet n-tíc sa predtým rovnal a na obe strany sme pridali rovnako.
Dosiahli sme, že v črepníkoch je nezáporné množstvo hliny. Ešte by sa nám páčilo, keby to boli celé čísla a nie racionálne. Tak si zoberme najmenší spoločný násobok všetkých menovateľov (menovateľ čísla nula je jedna, lebo je kladná, nenulová a nesúdeliteľná s nulou). Množstvo hliny v každom črepníku ním vynásobíme. Každý menovateľ toto číslo delí, takže v črepníkoch dostaneme celočíselné množstvá hliny. Rovnosti sa zase zachovajú. Keď platili predtým, tak budú platiť aj po tom, ako obe strany rovnosti vynásobíme rovnakým číslom.
Po tom, ako sme si hlinu pekne urovnali, môžeme s ňou aj niečo urobiť. Vieme, že keď si zoberieme ľubovoľný črepník, tak zvyšné sa dajú rozdeliť na dve n-tice, ktoré budú mať rovnaké množstvo hliny. Vyberme teda črepník, ktorý je prázdny (hlinu sme urovnávali tak, že v črepníku s najmenším množstvom hliny je presne nulové množstvo). Zvyšné črepníky vieme rozdeliť na dve n-tice. Každá n-tica je tvorená celými číslami, takže súčet n-tíc bude tiež celé číslo. Keďže sú n-tice dve a črepník, ktorý sme nepoužili je prázdny, dokopy vo všetkých $2n+1$ črepníkoch je párne množstvo hliny.
V každom črepníku musí preto byť párne množstvo hliny. Ak by totiž množstvo v niektorom z črepníkov bolo nepárne, tak po odobratí tohto črepníka by ostalo nepárne množstvo hliny a zvyšok by sa nedal rozdeliť na vyhovujúce n-tice. Keďže v každom črepníku je párne množstvo hliny, vyberme odvšadiaľ polovicu. Ako pri násobení menovateľov, ani tu predelenie dvoma neoporuší rovnice.
Pozrime sa na hlinu po predelení: nula zostala nulou a ostatné množstvá sú stále celé čísla. Môžeme teda znova zopakovať úvahu, ktorú sme urobili po urovnaní. Znovu vieme vybrať nulu, ukázať že množstvo všetkej hliny je párne číslo, a teda aj množstvo v každom jednom črepníku je párne. Z každého črepníka opäť vezmeme polovicu a znovu môžme celú úvahu zopakovať. A znovu a znovu.
Ako je možné, že tento proces uberania vieme stále opakovať? Množstvo hliny v každom z črepníkov je celé číslo. A jediné také celé číslo, ktoré vieme doomrzenia deliť dvoma a pritom stále ostane celé, je číslo nula (premyslite si, ako by ste vedeli toto vcelku jasné tvrdenie poriadne zdôvodniť). Preto je nutne každý črepník prázdny.
Na začiatku sme ale menili množstvo hliny v črepníkoch, takže množstvá nemusia byť samé nuly. Ľahko si však uvedomíme, že hore popísaným urovnaním dostaneme samé nuly iba v prípade, že vo všetkých črepníkoch bude na začiatku rovnaké množstvo hliny. Ak by bolo totiž v niektorých dvoch črepníkoch na začiatku rôzne množstvo hliny, tak v nich bude rôzne množstvo aj po urovnávaní, takže nebudú oba prázdne. Vo všetkých črepníkoch teda muselo byť rovnako veľa hliny.

Úloha č. 10: *Monty bol práve v severnom krídle galérie, keď za ním dobehol zadýchaný Sinetu. Krivozubému Tonymu sa podarilo utiecť! Prehrýzol svoje putá (nenadarmo sa volá Krivozubý), schmatol dva vzácne body a utiekol do mesta. Monty, Sinetu a šerif išli po jeho stopách až ku starému chrámu boha Intiho. V ňom Tonyho objavili a šerif mu okamžite nasadil putá. Dva neoceniteľné exponáty však pri sebe nemal. Ihneď povedal, že ich zakopal v chráme, a že Monty so Sinetuom ich nikdy nenájdu. Ak by totiž v chráme začali kopať na zlom mieste, tak sa starí indiánski bohovia nahnevajú a celý chrám sa zrúti. Potrebujú teda nájsť presne tie dve miesta, kde Tony body zahrabal. V chráme bola na zemi nakreslená kružnica k a na nej boli vyznačené dva rôzne body A a B. Šaman spravujúci tento chrám si všimol, že Tony zahrabal body presne do stredov oboch oblúkov AB kružnice k. Hneď čo sa to dozvedeli, vybehol Monty von a o chvíľu sa už vracal s kružidlom a pravítkom. Spolu so Sinetuom* *sa išli pustiť do hľadania, no nestihli ani začať a pravítko vzplanulo. Monty ho rýchlo hodil na zem a sledoval ako pomaly ľahne popolom. Šaman im povedal, že boh Inti neuznáva nič rovné, a tak v jeho chráme nie je možné používať pravítko, ani nič iné čo by vedelo narysovať rovnú čiaru. Pomôžte Montymu so Sinetuom zachrániť dva vzácne body a nájdite stredy oboch oblúkov AB kružnice k len za pomoci kružidla.*[4]

Riešenie: (opravovali Maťo a Hago)
Jediné, čo dokážeme s kružidlom robiť, sú kružnice s nejakým stredom a nejakým polomerom. Za stred môžeme zobrať bod zo zadania, prienik nejakých už narysovaných kružníc, prípadne len tak náhodný bod. Ako polomer si môžeme zvoliť vzdialenosť dvoch bodov, ktoré poznáme, alebo iba takú náhodnú dĺžku.
Vyzerá to tak, že budeme rysovať veľa kružníc, tie sa budú pretínať, a ich prieniky resp. vzdialenosti medzi ich prienikmi budeme voliť za nové stredy resp. polomery nových kružníc. Toto budeme robiť, až kým sa nestane zázrak a nedosiahneme, čo sme chceli. Rysovať presne nie je až také ľahké a zábavné, ako by mohlo na prvé počutie znieť. Preto je dobré si pomáhať nejakým počítačovým programom, vhodné sú napríklad Cabri alebo Geogebra. Dosť bolo rečí, pusťme sa do rysovania.
Začnime s ľahšou úlohou, ktorú vám dávame na rozmyslenie: Máme zadané tri rôzne body A, B, C, neležiace na jednej priamke. Nájdite bod D tak, aby bol štvoruholník $ABCD$ rovnobežníkom. Ďalej sa na túto konštrukciu budeme odvolávať, tak si ju naozaj premyslite.
Všimnime si, že podľa zadania nepoznáme stred kružnice k. Ten by sa nám ale mohol zísť, tak teraz si dajme za úlohu zostrojiť ku kružnici k jej stred S. Ako na to?
Zvolíme si na kružnici k nejaký bod a označíme ho Q. Do bodu Q zapichneme kružidlo a narysujeme kružnicu l s ľubovoľným polomerom (časom uvidíme, že až taký ľubovoľný byť nemôže). Kružnice k a l sa pretnú v dvoch bodoch T a U. Nájdime bod V tak, aby bol štvoruholník $TQUV$ rovnobežníkom. Zostrojme kružnicu m so stredom v bode V, prechádzajúcu bodom Q. Jej dva body prieniku s kružnicou l si označme P a R. Doplnením na rovnobežník $PQRS$ získame náš hľadaný stred S.
Dúfame, že ste nám to len tak nezožrali. To, že sme nejaký bod nazvali S, ešte neznamená, že je stredom kružnice. Budeme to musieť aj dokázať. Najprv si uvedomme, že oba rovnobežníky, ktoré sme dopĺňali ($TQUV$ aj $PQRS$) sú v skutočnosti kosoštvorce, a preto $\overrightarrow{QV}$ rozpoľuje uhol TQU a $\overrightarrow{QS}$ rozpoľuje uhol PQR.



Obr. 2

Upriamte svoju pozornosť na Obr. 2. Označili sme si S_1 skutočný stred kružnice k, jej polomer r a polomer kružnice l si označme a. Bod S_1 bude určite ležať na $\overrightarrow{QV}$, pretože stred kružnice leží na osi obvodového uhla TQU. Skúsme zistiť, aký polomer bude mať kružnica m, čo je vlastne dĺžka úsečky VQ. Vieme, že $|QT| = |QU| = a$ a $|S_1T| = |S_1Q| = r$. Štvoruholník $TQUV$ je rovnobežník, čiže aj $|TV| = |QU| = a$. Trojuholník TQV je rovnoramenný a teda $|\sphericalangle TQV| = |\sphericalangle QVT|$. Takisto aj trojuholník S_1TQ je rovnoramenný, z čoho vyplýva, že $|\sphericalangle S_1TQ| = |\sphericalangle TQS_1|$. Práve

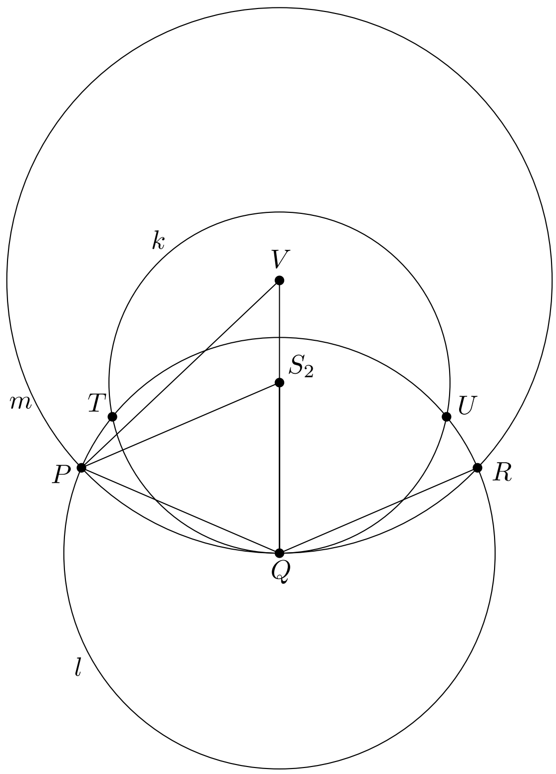
[4] Ak si nie si istý, čo to znamená za pomoci kružidla, tak si pozri zadanie úlohy 4 z prvej série alebo úlohy 7 z druhej série tohto semestra KMS. Zadania nájdeš na stránke `kms.sk/archiv`.

sme odhalili, že trojuholníky TQV a S_1TQ sú podobné podľa vety uu. Z podobnosti platí

$$\frac{|VQ|}{|QT|} = \frac{|QT|}{|TS_1|},$$
$$\frac{|VQ|}{a} = \frac{a}{r},$$
$$|VQ| = \frac{a^2}{r}.$$

Teraz sa budeme rozprávať o Obr. 3. Označili sme si S_2 bod, o ktorom tvrdíme, že je stredom kružnice k, teda v poslednom kroku konštrukcie doplníme body P, Q, R do rovnobežníka $PQRS_2$. Bod V bude určite ležať na $\overrightarrow{QS_2}$, pretože stred kružnice leží na osi obvodového uhla TQV. To ale znamená, že aj bod S_2 leží na $\overrightarrow{QV}$. Podobne ako na Obr. 2 aj tu rýchlo objavíme dva podobné trojuholníky VPQ a PQS_2 a z podobnosti odvodíme

$$\frac{|S_2Q|}{|PS_2|} = \frac{|QP|}{|VQ|},$$
$$\frac{|S_2Q|}{a} = \frac{a}{\frac{a^2}{r}},$$
$$|S_2Q| = r.$$



Obr. 3

Body S_1 a S_2 ležia oba na $\overrightarrow{QV}$ a v rovnakej vzdialenosti od bodu Q, to znamená, že sú totožné. Takže sme naozaj našli stred kružnice k a je ním bod $S_1 = S_2 = S$.

Spomeňme si, že sme tak nejak predpokladali, že dvojice kružníc k, l a l, m majú po dva prieniky, to sa však nemusí stať. Ak sa nám ale podarí zvoliť „ľubovoľný“ polomer a tak, aby $r/2 < a < 2r$, tak budú mať dva prieniky. (Dolné ohraničenie je kvôli druhej dvojici a horné kvôli prvej.) Môžeme veriť, že trafíme správne a, ale dá sa vymyslieť aj postup, ako z nesprávneho časom vyrobiť správne.

Konečne sa môžeme pustiť do úlohy zo zadania. Budeme sa tváriť, že už máme zadaný aj stred S kružnice k, pretože si ho tak či tak vieme zostrojiť.

Nájdeme si body C a D tak, aby boli štvoruholníky $SBAC$ a $BASD$ rovnobežníkmi. Zostrojíme kružnice k_1 resp. k_2 so stredmi v bodoch C resp. D a obe s polomerom $|CB| = |DA|$. Kružnice k_1 a k_2 sa pretnú v bode E. Teraz si do kružidla zoberieme polomer $|SE|$ a zostrojíme kružnicu l_1 so stredom v bode C. Kružnica l_1 pretne kružnicu k v našich hľadaných stredoch oblúkov.

Už nám zostáva len dokázať, že to tak naozaj je. Ak si to neviete predstaviť, tak Obr. 4 by mohol poslúžiť. Označme si b dĺžku úsečky AB, polomer kružnice k samozrejme r a ozajstné stredy oblúkov M a N. Pomocou kosínusovej vety v trojuholníku ACS odvodíme kosínus uhla ACS:

$$
\begin{aligned}
|SA|^2 &= |CS|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |CS| \cdot |AC| \cdot \cos|\sphericalangle ACS|,\\
r^2 &= b^2 + r^2 - 2br\cos|\sphericalangle ACS|,\\
\cos|\sphericalangle ACS| &= \frac{b}{2r}.
\end{aligned}
$$

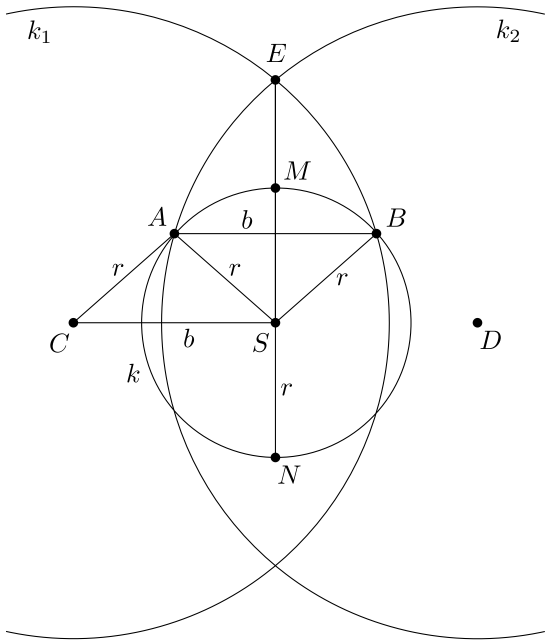
Z toho, ako funguje kosínus, vieme, že

$$\cos|\sphericalangle CSB| = -\cos(180^\circ - |\sphericalangle CSB|) = -\cos|\sphericalangle ACS| = -\frac{b}{2r}.$$

Keď poznáme kosínus uhla CSB, z kosínusovej vety v trojuholníku CSB vieme, že

$$|CB| = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos|\sphericalangle CSB|} = \sqrt{b^2 + r^2 + 2br\frac{b}{2r}} = \sqrt{2b^2 + r^2}.$$

Následne z Pytagorovej vety v trojuholníku CSE odvodíme, že $|ES| = \sqrt{b^2 + r^2}$, a taká by podľa inej Pytagorovej vety (trojuholníky CSM a NSC) mala byť aj vzdialenosť medzi C a stredmi oblúkov. Na Pytagorove vety potrebujeme pravé uhly, a to konkrétne $\sphericalangle CSE$, $\sphericalangle CSM$ a $\sphericalangle NSC$. Ich pravosť je zjavná z toho, že náš obrázok je krásne ľavo-pravo[5] symetrický a body C, S, D ležia na jednej priamke.



Obr. 4

[5]Matematicky presnejšie: podľa osi $\overleftrightarrow{NM}$, na ktorej ležia aj body S a E.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	2	9	9	9	9	9				45	135
1.	Švarc Radovan	3.	Česká Třebová	6		9	9	9	9	9	9		45	135
3.	Oravkin Eduard	2.	1SG BA	4	5	6	9	9	6		9		39	126
4.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	3		8	9	9	6	9			41	123
5.	Liu Zhen Ning Dávid	3.	GJH BA	9			9	9	9	9	4		40	116
6.	Puza Marko	4.	GPoš KE	9			9	8	9	9	9		44	109
7.	Micheľová Henrieta	2.	GAlej KE	4	5	7	9	9					30	108
8.	Bodík Juro	2.	Gamča BA	4	8	5	7	9		9			38	106
8.	Krajčiová Katarína	3.	GAlej KE	7		8	9	9	9	9			44	106
8.	Mišlanová Kristína	2.	GAlej KE	4		7	9	9					25	106
11.	Kulla Filip	2.	BiG Sučany	4	9	8	7	3			4		31	105
11.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	3	9	4	9	4	6				32	105
13.	Králik Matej	3.	GJH BA	7		6	9	9		9	7		40	101
13.	Semanišinová Žaneta	2.	GAlej KE	4		8	9		3				20	101
15.	Horváth Samuel	4.	GPár NR	9			7	8	9		4		28	100
15.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	3		3	9	3		9			24	100
17.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	3	9	8	9	9					35	99
18.	Bohdal Ondrej	3.	GJH BA	7		7	9	9	6		9		40	97
18.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	3		3	7			9	5		24	97
18.	Chabanová Barbora	2.	GJGT BB	4		6	9	4		9	5		33	97
18.	Psota Miroslav	4.	GHlin ZA	10			1	9	9	9	9		37	97
22.	Hanzely Slavomír	2.	GJAR PO	4	3	7	9	3	9				31	96
23.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	3	7	3	9	9					28	95
23.	Tesař Emanuel	2.	GBST LC	4		2	9	9		9			29	95
25.	Kopf Daniel	2.	G Slez ČR	4	9	6	7	8					30	94
25.	Ralbovský Peter	2.	ŠPMNDG BA	4	9	6	9	0					24	94
27.	Svoboda Jakub	4.	G Hav CR	6		5	9	9	9		5		37	91
28.	Sklenka Marek	2.	BiG Sučany	2	9	6	9						24	89
29.	Nepšinská Silvia	3.	GJH BA	6		6	9	9		0	4		28	88
29.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	2	9	4	9	9					31	88
31.	Pavlus Matúš	2.	GBST LC	4		5	9	6	9				29	87
32.	Halabrin Juraj	2.	GJH BA	4	3	7	9	0	3				22	86
32.	Krakovská Ema	3.	Gamča BA	5		6	9	4			2		21	86
32.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	3	3		7	9			4		23	86
35.	Dráček František	3.	GŠkol PB	6		5	9	8		8	9		39	85
35.	Hollý Dominik	3.	ŠPMNDG BA	4	6	5	9	9	5				34	85
37.	Petráš Peter Pavel Arthur	2.	ŠPMNDG BA	4	9	5	9	0					23	84
38.	Murin Marek	2.	GJH BA	4	9	7	9	8	8	0	4		41	83
39.	Bačinská Irena	4.	ŠPMNDG BA	7		6		9	9				24	82
39.	Bui Truc Lam Michal	3.	Gamča BA	9			7		9	8			24	82
39.	Tódová Lucia	2.	GPár NR	4			9						9	82
42.	Lipovský Mário	4.	GJH BA	8			9	9	4				22	80
42.	Murin Martin	3.	GJH BA	6		6	9	8	5		4		32	80
44.	Hronkovičová Nina	3.	GKom PE	5			7	9		6			22	79
45.	Dujava Matej	3.	SPŠE Prešov	3	3	6		2		0	9		20	78
46.	Šimková Ľudmila	4.	GPár NR	11			7	6	6	1	1		21	77
47.	Batmendijn Eduard	3.	CGsvM SL	10			9	9		8			26	76
47.	Pieš Adrián	4.	ŠPMNDG BA	6		6	9	4					19	76
47.	Stankovič Miroslav	4.	GPoš KE	13			9	9	9	9			36	76
47.	Steinhauser Václav	0.	G Dacice	0	3	6	7		5				21	76
51.	Szalay Erik	4.	ŠPMNDG BA	6		6	9	2					17	73

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
52.	Darmovzal Ondřej	3.	Brno ČR	3									0	72
52.	Steinhauserová Anna	4.	G Dacice	5		7	9	0	5	1			22	72
54.	Kluvanec Roman	3.	GPár NR	5		5	7		3		2		17	71
54.	Kudelčíková Martina	2.	GVO ZA	4		6	9			0			15	71
56.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	3		6	9	9		9			33	70
56.	Žídek Matěj	2.	Frýdlant ČR	4							9		9	70
58.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	1	7	5	9	0		1			22	69
58.	Santrová Michaela	3.	GMH Trstená	7		6	9			0	2		17	69
58.	Tomašec Samuel	4.	GVar ZA	8			8	9			9		26	69
58.	Ženčuchová Andrea	3.	GJAR PO	4	2	2	9	9	5				27	69
62.	Magyarová Zuzana	4.	GBST LC	9			9	9	4	9			31	67
62.	Prešinská Kristína	3.	GPár NR	6		6	9	3	3	0			21	67
64.	Kašša Ladislav	2.	G Šamorín	4		5	7	9		9	7		37	65
65.	Mojžišová Karolína	4.	Gamča BA	7							4		4	63
66.	Choma Matej	2.	Gamča BA	4									0	62
66.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1			9	8					17	62
68.	Kral Adam	2.	GVar ZA	2	0	4	1	5		0			10	60
69.	Trenčanská Tereza	2.	Gamča BA	3									0	59
70.	Kurimský Ján	2.	GsvMo	4									0	57
71.	Hrivová Ivona	4.	GVO ZA	10			9	8			7		24	54
71.	Kojda Jakub	2.	ŠPMNDG BA	4									0	54
73.	Konček Marián	3.	G1.máj MA	5									0	52
74.	Koščo Marek	4.	GVar ZA	6		5	7		2		4		18	49
75.	Kobák Michal	4.	Gamča BA	7									0	43
76.	Polovka Maroš	4.	GKuk PP	5			9						9	42
77.	Krakovská Hana	4.	Gamča BA	8			9				4		13	41
78.	Kováčová Mária	3.	GsvCM NR	4									0	40
79.	Pecko Marcel	2.	GBST LC	4			4						4	34
80.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	2		3	9						12	33
81.	Abaffyová Adela	4.	G Tvrdošín	4									0	27
81.	Kováčová Barbora	4.	ŠPMNDG BA	7									0	27
83.	Kňaze Adam	3.	GJCh BR	6									0	26
83.	Le Anh Dung	4.	Tachov ČR	7				8	9	9			26	26
85.	Madro Oskar	2.	ŠPMNDG BA	2									0	25
86.	Dargaj Jakub	4.	GPoš KE	7									0	24
87.	Burian Benjamín	4.	ŠPMNDG BA	4									0	23
88.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3									0	22
89.	Balážová Michaela	4.	G Bánovce	5									0	20
89.	Štefkovič Ján	4.	G Bánovce	5									0	20
91.	Matejovičová Tatiana	4.	GJH BA	10									0	19
92.	Fabšíková Nina	2.	1SG BA	4									0	18
92.	Kuchár Martin	4.	G Šamorín	4									0	18
94.	Gašpárek Miroslav	4.	SG ZA	4									0	15
95.	Camara Anna	3.	GMet BA	3									0	13
96.	Iždinská Dominika	4.	GJH BA	6									0	6
97.	Svitková Patricia	4.	GLN BA	6									0	5

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Kopfová Lenka	-1.	G Slez ČR	-1	7	9	9			9	8		42	127
2.	Steinhauser Václav	0.	G Dacice	0	6	9	9	3	6	7			37	125
3.	Horňáková Kristína	1.	GPár NR	1	6	9	9		6	9			39	122
4.	Pokrývka Milan	1.	G Bánovce	1	7	9	9	0	6				31	115
5.	Onduš Daniel	2.	GAlej KE	3				7	3	9	9		28	110
6.	Bialas Filip	1.	GOp Praha	2				9	9	9	9		36	99

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
7.	Staňo Roman	3.	GPoš KE	3			9	3		7	9		28	97
8.	Kubala Milan	2.	GJGT BB	2		9				9			18	95
9.	Krasula Dominik	1.	Krnov ČR	1	3	9	9	7	5	9	0		39	92
10.	Genči Jakub	1.	GPoš KE	1	7	9		0					16	90
10.	Sládeček Michal	2.	GVar ZA	3				9	8	9	9		35	90
10.	Súkeník Peter	2.	GVar ZA	3					8	9	9		26	90
13.	Molčan Samuel	2.	GJAR PO	3				9	4	9	4		26	89
13.	Pišťák Daniel	2.	GChD Praha	2				9	4	9	9		31	89
15.	Sklenka Marek	2.	BiG Sučany	2				9	6	9			24	88
16.	Sučíková Katarína	2.	BMA, Essex	3					3	9	3		15	82
17.	Frankovská Zuzana	2.	Gamča BA	3					3	7			10	76
18.	Krajmerová Barbora	2.	G Šurany	3					6	9	9		24	70
18.	Pavčík Richard	2.	GJGT BB	2		9		1		9			19	70
18.	Vančo Šimon	2.	GsvM PO	2		9	9		3	9			30	70
21.	Halamová Lucia	1.	BiG Sučany	1	7	9	1		1				18	69
21.	Zeman Matúš	2.	1SG BA	2			9	1	3	3			16	69
23.	Dujava Matej	3.	SPŠE Prešov	3				3	6		2		11	63
24.	Kollárová Sára	1.	GJGT BB	1	7	9	1		2				19	62
25.	Darmovzal Ondřej	3.	Brno ČR	3									0	60
25.	Ľuptáková Sára	1.	GsvFA ZA	1	7						0		7	60
25.	Škrlec Adam	2.	GJH BA	3			9	0	2	9			20	60
28.	Šajanek Adrián	1.	GCSL BA	1		9	1	1	1	1	0		13	56
29.	Kral Adam	2.	GVar ZA	2				0	4	1	5		10	54
30.	Jankovich Juraj	1.	GJGT BB	1	6		7		5				18	53
31.	Trenčanská Tereza	2.	Gamča BA	3									0	51
32.	Szabo Michal	2.	GAM TT	3			7		1	7			15	49
33.	Daniš Dávid	1.	GCSL BA	1									0	47
34.	Terem Tomáš	2.	GJGT BB	2		9				9			18	44
35.	Koľ Daniel	1.	GPoš KE	1		9		0	2				11	43
36.	Hreuzek Ján	1.	GCSL BA	1					2				2	33
37.	Escherová Eva	2.	G Bánovce	2									0	32
37.	Petrová Simona	2.	ŠPMNDG BA	2		4	9	0	6				19	32
39.	Martinka Matej	2.	SŠsvFA	2					6	1	1		8	31
39.	Petruš Pavol	1.	GPoš KE	1									0	31
41.	Lihotský Samuel	2.	1SG BA	2									0	30
42.	Včelková Veronika	3.	GPOH DK	3									0	24
43.	Roch Oliver	3.	G Bytca	3				0		1			1	23
44.	Madro Oskar	2.	ŠPMNDG BA	2									0	22
44.	Majtán Martin	1.	GPdC PN	1									0	22
46.	Bátrna Jozef	3.	G Bytca	3			1		1				2	17
47.	Camara Anna	3.	GMet BA	3									0	16
47.	Suchý Daniel	3.	Gamča BA	3									0	16
49.	Sůra Tomáš	2.	1SG BA	2									0	13
50.	Podstavek Daniel	1.	1SG BA	1									0	11
51.	Pásková Tina	2.	GCSL BA	2									0	7
51.	Šimová Mária	1.	EGMT	1	0	1	1		1		0		3	7
53.	Michálek Tomáš	3.	G Bytca	3									0	6
54.	Kocan Kristián	2.	SPŠE Prešov	2									0	4
55.	Mičko Juraj	1.	GPoš KE	1									0	0