Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2014/2015

Úloha č. 1: *Ľudka našla vo výťahu nakresenú tabuľku 3×3, ktorá mala v každom štvorčeku prirodzené číslo. Zapamätala si, že v každom riadku boli 3 rôzne čísla, súčet čísel v každom riadku bol rovnaký a zároveň súčin čísel v každom riadku bol rôzny. Ľudka by chcela zistiť, akú najmenšiu hodnotu mohol mať súčet všetkých čísel v tabuľke. Pomôžte jej s týmto výpočtom.*

Riešenie: (opravoval Kubo)

Predpokladajme, že súčet čísel v každom riadku je s. Potom súčet čísel v celej tabuľke je $3s$. Našou úlohou je doplniť čísla do tabuľky tak, aby ich celkový súčet bol najmenší možný. To znamená, že chceme nájsť najmenšie také číslo s, ktoré vieme zapísať ako súčet troch rôznych trojíc čísel, pričom žiadna z nich nemôže obsahovať dve rovnaké čísla. Prečo to musia byť rôzne trojice? Dôvodom je to, že ak by sa niektoré dve trojice rovnali, tak budú mať aj rovnaký súčin, čo je v spore so zadaním.

Pustime sa teda do toho! Uvažujme trojice čísel a, b, c také, že $a < b < c$. Môžeme povedať, že najmenšie číslo s, pre ktoré vieme nájsť 3 rôzne čísla, ktorých súčet bude práve s je $6 = 1 + 2 + 3$. Iným spôsobom to už však nejde (jedným z čísel by musela byť aspoň 4-ka a zostatok 2 nevieme zapísať ako súčet dvoch rôznych čísel). Každé väčšie číslo vieme napísať ako súčet troch rôznych prirodzených čísel. Rozpíšeme si koľkými možnosťami to ide.

- 7 - iba jedna trojica 1, 2, 4. Ak by bolo číslo $c = 3$, tak súčet $s = a + b + c$ je najviac 6. Ak by bolo $c = 5$, tak nám do 7 ostáva dva, čo nevieme napísať ako súčet dvoch rôznych prirodzených čísel a pre $c = 4$ existuje len jeden spôsob ako dostať 3 ako súčet dvoch rôznych prirodzených čísel
- 8 - dve trojice 1, 2, 5 a 1, 3, 4; pre $c \leq 3$ je súčet čísel $s < 6$. Pre $c = 4$ resp. $c = 5$ nám ostáva zostatok 4 resp. 3, pre ktoré existuje len jedna možnosť. Pre $c \geq 6$ je ostatok najviac 2 čo sa nedá zapísať ako súčet dvoch rôznych čísel.
- 9 - máme tri trojice 1, 2, 6; 1, 3, 5; a 2, 3, 4.

Tieto trojice nám aj vyhovujú keďže ich súčiny sú naozaj rôzne čísla

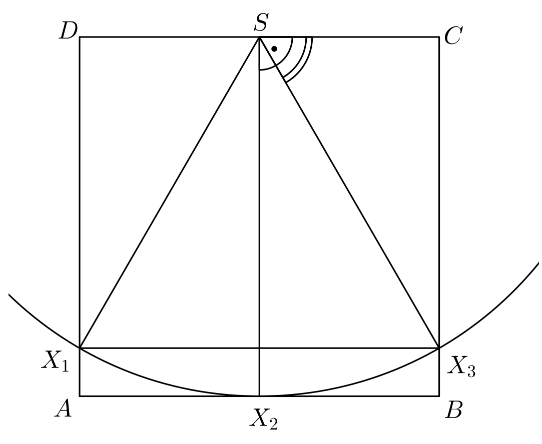
$$1 \cdot 2 \cdot 6 = 12; \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15; \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Súčet všetkých čísel v tabuľke mohol byť najmenej $3s = 3 \cdot 9 = 27$.

Úloha č. 2: *Betka má v ľavom vrecku korytnačku. Je špecíalna, rýdzo štvorcová. V štvorci $ABCD$ je S stred strany CD a X je taký bod na obvode štvorca, že $|SX| = |AB|$. Aké rôzne veľkosti môže mať uhol XSC?*

Riešenie: (opravovala Betka)

Načrtnime si štvorec $ABCD$. Potom si zostrojíme kružnicu so stredom v bode S a polomerom $|AB|$. Kde môže ležať bod X? Keďže $|SX| = |AB|$, tak bod X môže byť len priesečník kružnice s naším štvorcom. Označme si preto tieto priesečníky postupne X_1, X_2 a X_3 ako na obrázku.



Na prvý pohľad vidíme, že uhol X_2SC je pravý (premyslite si prečo).

Pozrime sa teraz na trojuholník X_1X_3S. Platí $|X_1S| = |X_3S| = |AB|$ a zjavne aj $|AB| = |X_1X_3|$. Potom X_1X_3S je rovnostranný a všetky jeho vnútorné uhly majú veľkosť $60°$. Priamka SX_2 je kolmá na stranu X_1X_3 a je teda aj osou uhla X_1SX_3. Potom $|\sphericalangle X_2SX_3| = 30°$ a $|\sphericalangle X_3SC| = 60°$.

Nakoniec už len dopočítame $|\sphericalangle X_1SC| = |\sphericalangle X_1SX_2| + |\sphericalangle X_2SC| = 60° + 60° = 120°$.

Uhol SXC môže mať teda veľkosť $120°$, $90°$ alebo $60°$.

__**Úloha č. 3:**__ *Veronika našla počas rýľovania záhradky poklad. Skúste to tiež! Nájdite všetky také prvočísla p a q, že p delí $q^2 - 4$, a tiež q delí $p^2 - 1$.*

Riešenie: (opravovali Ivka a Foxie)

Potrebujeme nájsť všetky prvočísla p, q také, že $p|q^2 - 4$ a $q|p^2 - 1$. Výrazy na pravej strane vieme upraviť podľa vzorca $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ na tvar $p|(q-2)(q+2)$ a $q|(p-1)(p+1)$. Ďalej budeme využívať fakt, že ak prvočíslo P delí súčin $A \cdot B$, tak P delí A, alebo P delí B (rozmyslite si, že ak by P nebolo prvočíslo, tak to nemusí platiť). Najprv skúsime dosadiť za q a p číslo 2, ako jediné párne prvočíslo, potom ošetríme nepárne prvočísla.

$p = 2$ Preto $q|(2-1)(2+1) = 3$. Potom $q = 3$ avšak $2 \nmid (3-2)(3+2) = 5$. Preto $p = 2$ nevyhovuje.

$q = 2$ Preto $2|(p-1)(p+1)$ a $p|(2-2)(2+2) = 0$. Vieme, že 0 je deliteľná všetkým a tak, ak $q = 2$, p môže byť akékoľvek nepárne prvočíslo ($p+1$ je potom párne číslo a teda je deliteľné dvoma).

Ostáva nám vyriešiť prípad ak sú obe prvočísla p a q nepárne.

Keďže $p,\ q > 2$, tak ani jedno z čísel $(p-1)$, $(p+1)$, $(q-2)$ a $(q+2)$ nie je rovné 0. Teda buď platí $p \leq q-2$ alebo $p \leq q+2$ (deliteľ čísla n je menší nanajvýš rovný číslu n) z čoho vyplýva, že $p \leq q+2$. Analogicky dostaneme $q \leq p+1$. Teda $q - 1 \leq p \leq q+2$. Na základe týchto podmienok a toho, že čísla p a q sú nepárne máme len dve možnosti, a to $p = q$ alebo $p = q+2$.

Ak sa $p = q$ tak nie je splnená podmienka $q|(q-1)(q+1)$ (premyslite si prečo). Pre $p = q+2$ vyhovujú podmienkam zo zadania hneď prvé dve nepárne prvočísla $q = 3$ a $p = 5$.

Ešte ostáva ukázať, že iné riešenie v tvare $p = q+2$ neexistuje. Z podmienky $q|(p-1)(p+1)$ dostávame $q|(q+1)$, čo nemôže nastať, alebo $q|(q+3)$ čo spĺňa iba $q = 3$.

__**Úloha č. 4:**__ *Marek s Mojom hrajú hru s peniazmi. Hádžu mincou, a sledujú čo sa deje. Ak padne za sebou znak znak hlava, hra sa skončí a zvíťazí Mojo. Ak padne znak hlava znak, hra sa tiež skončí a vyhrá Marek. Aká je pravdepodobnosť, že zvíťazí Mojo?*

Riešenie: (opravovali Kajo a Jožo)

Ideme si zahádzať mincou. Najskôr sa pozrieme, ako môže hra začať a ako jednotlivé hody mincou ovplyvnia Mojovu šancu na výhru.

1. Ak padne **hlava** (pravdepodobnosť $\frac{1}{2}$), Mojovi ani Marekovi sa neprilepší, lebo obaja potrebujú aby ako prvý v ich postupnosti padol znak. Preto sa šanca na Mojovu výhru nezmení. Podobne, ak sa niekedy v priebehu hry stane, že padne hlava hlava tak nastane rovnaká situácia ako na začiatku hry (obaja hráči majú v tomto momente rovnakú šancu na výhru ako mali na začiatku hry).
2. Ak padne **znak znak** (pravdepodobnosť $\frac{1}{4}$), tak Mojo už má výhru istú. Ak ďalej v poradí padne znak tak sme v rovnakej pozícii ako predtým (posledné dva hody sú znak znak a nikto nedosiahol vyhrávajúcu postupnosť) a ak padne hlava, tak Mojo vyhral, lebo mu padla jeho víťazná postupnosť znak znak hlava.
3. Ak padne **znak hlava znak** ($\frac{1}{8}$) vyhráva Marek a teda Mojova šanca na výhru je nulová.
4. Ak padne **znak hlava hlava** ($\frac{1}{8}$) tak sa dostávame na rovnakú pozíciu ako na začiatku (bod 1). Pravdepodobnosť, že Mojo vyhrá je preto rovnaká, ako na začiatku.

Teraz potrebujeme z týchto informácií nejako získať pravdepodobnosť, že Mojo vyhrá. Môžeme si všimnúť, že táto pravdepodobnosť sa vyskytuje na viacerých miestach, preto si ju označíme ako p a pokúsime sa zostaviť rovnicu. Pravdepodobnosť p, že Mojo vyhrá, vypočítame ako súčet pravdepodobností zo štyroch vyššie rozobraných prípadov, keďže každá hra musí začať jedným z nich. V 1. prípade (padne hlava) máme pravdepodobnosť $\frac{1}{2}p$ (súčin pravdepodobnosti, že Mojo hodí hlavu a pravdepodobnosti, že potom vyhrá), v 2. prípade $\frac{1}{4}$, v 3. prípade 0 a v 4. prípade $\frac{1}{8}p$. Dostávame tak rovnicu

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}p + \frac{1}{2}p,$$

ktorej vyriešením získame $p = \frac{2}{3}$. Pravdepodobnosť, že vyhrá Mojo je teda $\frac{2}{3}$.

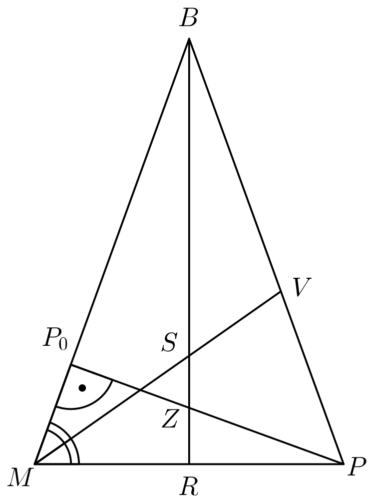
Iné riešenie:

Mojova a Marekova výherná postupnosť začínajú znakom. Uvažujme situáciu, keď ani Mojo, ani Marek nemajú začatú svoju výhernú postupnosť a padne znak. Ak padne znovu znak (pravdepodobnosť $\frac{1}{2}$), vyhrá Mojo (bod 2 vyššie). Ak padne hlava znak (prav. $\frac{1}{4}$) vyhrá Marek (bod 3), ak padne hlava hlava (prav. $\frac{1}{4}$) musia si obaja počkať na ďalší znak (bod 4) a sme presne v počiatočnej situácii. Teda s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ vyhrá Mojo, s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$ vyhrá Marek a s pravdepodbnosťou $\frac{1}{4}$ sa dostaneme do pôvodnej pozície. V každej takejto situácii sú uvedené pravdepodobnosti rovnaké, preto pomer pravdepodobností Moja a Mareka je rovnaký ako ich pomer v jednej takejto situácii, teda $2:1$. Preto pravdepodobnosť, že vyhrá Mojo je $\frac{2}{3}$ (Marekova je $\frac{1}{3}$).

<u>Poznámka pre matematické obohatenie:</u> Pravdepodobnosťou (*angl.* probability, likelihood) rozumieme vždy priaznivých možností ku všetkým možnostiam. Preto musí byť pravdepodobnosť vždy číslo od 0 do 1. Viacerí z vás použili v riešení pomer 2 : 1 a nazvali to pravdepodobnosťou. Nie je to celkom správne. Existuje aj matematický pojem šance (*angl.* odds) a to vyjadruje pomer priaznivých prípadov, ku nepriaznivým. Vo vzoráku sme to nazvali pomerom pravdepodobností.

<u>Úloha č. 5:</u> *Mišo má v pravom vrecku sýkorku. Je trošku čudná, lebo má tvar trojuholníka BMP, kde uhol BMP je $70°$. Ťažnica z vrcholu B a os uhla pri vrchole B sú totožné a pretínajú stranu MP v bode R. Výška z vrcholu P pretína priamku BR v bode Z. Os uhla pri vrchole M pretína priamku BR v bode S a stranu BP v bode V. Zistite veľkosť uhlov pri vrcholoch v štvorholníku $VSZP$.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Barča a Aňa)



V zadaní máme uvedené, že ťažnica z vrcholu B a os uhla pri vrchole B sú totožné. Čo to znamená? Keďže R leží na ťažnici, tak $|MR| = |RP|$. Označme si M_1 taký bod na priamke MB, že $|\sphericalangle RM_1M| = 90°$. Podobne, označme si P_1 taký bod na priamke PB, že $|\sphericalangle RP_1P| = 90°$. Keďže R leží na osi uhla, tak platí: $|RM_1| = |RP_1|$. Využijúc, že $|MR| = |RP|$ a $|\sphericalangle RP_1P| = |\sphericalangle RM_1M| = 90°$, tak získame, že trojuholníky RM_1M a RP_1P sú zhodné (premyslite si, že pre pravouhlé trojuholníky nepotrebujeme, aby uhol ležal medzi rovnakými stranami). Preto platí: $|\sphericalangle RPP_1| = |\sphericalangle RMM_1|$. Teda trojuholník BMR je rovnoramený.
Iné zdôvodnenie by mohlo byť vďaka poznatku, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere dĺžok zostávajúcich strán. Mnohí ste zas pri vysvetlení šikovne využili sínusovú vetu.

Nakoľko už máme rovnoramennosť, tak ľahko prídeme k $|\sphericalangle BMP| = 70° = |\sphericalangle MPB|$. Využijeme vlastnosť, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$ a dopočítame veľkosť uhola pri vrchole B: $|\sphericalangle MBP| = 180° - (70° + 70°) = 40°$. Rozmyslite si, že bod S leží bližšie k bodu B ako bod Z.
Prechádzame na menšie trojuholníky.

- Z trojuholníka PP_0B, kde P_0 je päta výšky z bodu P počítame $|\sphericalangle P_0PB| = 180° - (40° + 90°) = 50°$.
- Z trojuholníka MPV zistíme, že $|\sphericalangle MVP| = 180° - (70° + 35°) = 75°$. Os uhla delí uhol na polovicu, preto tých $35°$.
- Z trojuholníka BZP dopočítame $|\sphericalangle BZP| = 180° - (20° + 50°) = 110°$.
- Kedže súčet uhlov v štvoruholníku je rovný $360°$, posledný uhol pri vrchole S dopočítame ako $|\sphericalangle VSZ| = 360° - (110° + 50° + 75°) = 125°$.

Uhly v štvoruholníku VSZP sú $75°,\ 125°,\ 110°$ a $50°$.

<u>Úloha č. 6:</u> *Katarína sa momentálne nachádza v Slnečnej sústave. My však vieme o výskyte iných sústav v našej galaxii. Nájdite všetky trojciferné čísla v desiatkovej sústave, ktoré sa rovnajú tretine čísla s rovnakým zápisom v inej číselnej sústave.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Cvrki a Lindtka)
Ako poznamenala jedna riešiteľka, najťažšou časťou príkladu bolo pochopiť zadanie. Skúsme si teda našu slovnú úlohu prepísať do peknej rovnice.
Hľadáme všetky trojciferné čísla v desiatkovej sústave, ktoré sa rovnajú tretine čísla s rovnakým zápisom v inej číselnej sústave. Označme si cifry hľadaného čísla a, b a c (pod cifrou budeme vrámci celého vzoráku rozumieť klasickú cifru v desiatkovej sústave). Toto číslo budeme v desiatkovej sústave zapisovať $\overline{abc}$. Hľadané číslo má byť trojciferné, takže cifra a musí byť nenulová. V číselnej sústave s iným alebo neznámym základom k budeme číslo s rovnakým ciferným zápisom označovať $\overline{abc}_k$. Hodnota tohto čísla je $\overline{abc}_k = a \cdot k^2 + b \cdot k + c$. Nezabudnime, že základ sústavy k musí byť prirodzené číslo a cifry a, b a c musia byť menšie ako k (napríklad v sústave so základom 5 neexistujú cifry 5, 6, 7, 8, a 9).

Teraz už vieme našu úlohu preformulovať do matematickej reči. Máme nájsť všetky trojice cifier a, b a c, kde $a \neq 0$, pre ktoré existuje prirodzené číslo k také, že platí $\overline{abc} = \frac{1}{3}\overline{abc}_k$. Túto rovnosť vieme upraviť nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\overline{abc} &= \frac{1}{3}\overline{abc}_k\\
100a + 10b + c &= \frac{1}{3}\left(a \cdot k^2 + b \cdot k + c\right)\\
300a + 30b + 3c &= a \cdot k^2 + b \cdot k + c\\
(30 - k)b + 2c &= (k^2 - 300)a
\end{aligned}
$$

Teraz sa pustime do hľadania vhodných základov k. To sú tie, pre ktoré má rovnica, ku ktorej sme dospeli, nejaké riešenie. Využívať budeme posledný tvar tejto rovnice. Skúsme najskôr nájsť spodnú hranicu na vhodné k. Doplňme skusmo za k nejaké malé číslo, napríklad 11 (základy menšie alebo rovné 10 nemusíme overovať, skúste si uvedomiť prečo). Potom dostaneme rovnicu

$$19b + 2c = -179a.$$

Ľavá strana rovnice je pre ľubovoľnú voľbu cifier b a c nezáporná a pravá strana je pre ľubovoľnú nenulovú cifru a záporná. Rovnica teda nemá riešenie. Podobný argument zbehne aj pre $k = 12, 13, \dots, 17$. Ľavá strana bude vždy nezáporná a pravá záporná, takže rovnosť nikdy nenastane. Pre $k = 18$ však už hodnota k^2 presiahne 300 a pravá strana bude kladná. Zatiaľ sme zistili, že $k \geq 18$.

Skôr než sa pustíme do zaujímavej roboty — hľadania vhodných a, b, c — pokúsime sa ešte nájsť horný odhad. Vidíme, že ľavá strana našej rovnice s rastúcim k klesá, zatiaľčo pravá strana rovnice rastie. Intuícia nám teda hovorí, že od určitého k bude ľavá strana rovnice ostro menšia ako tá pravá. Skúsme zistiť, či to tak naozaj je.
Už vieme, že $k \geq 18$. Ľavá strana rovnice bude nadobúdať maximálnu hodnotu pre minimálne k a maximálne b a c, čo nám dá $(30-18)9+2\cdot 9 = 126$. Ak by bolo k väčšie alebo rovné 21, tak pravá strana rovnice bude nadobúdať hodnotu aspoň 141 (nezabúdajme, že a je nenulové), a preto sa nikdy nebude rovnať ľavej strane rovnice. Platí teda $k \leq 20$.

Ostali nám teda tri možné vhodné hodnoty základov k a to 18, 19 a 20. Pre každú možnosť nájdeme osobitne všetky vyhovujúce trojice a, b, c:

$k = 18$ Naša rovnica má v tomto prípade tvar $12b+2c = 24a$. Hľadáme všetky riešenia, pričom b, c sú ľubovoľné cifry a a je ľubovoľná nenulová cifra. Takúto úlohu viete isto všetci rýchlo zrátať, hoci aj vypisovaním možností. My si ukážeme jednu malú fintu. Členy $12b$ aj $24a$ sú oba deliteľné číslom 12. Preto aj člen $2c$ musí byť deliteľný číslom 12, čo platí iba pre $c = 0$ a $c = 6$.
Ak $c = 0$, tak $12b = 24a$, teda $b = 2a$ a dostávame prvé 4 riešenia (a, b, c) našej rovnice: $(1, 2, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(3, 6, 0)$ a $(4, 8, 0)$.
Ak $c = 6$, tak $12b + 12 = 24a$, teda $b + 1 = 2a$ a dostávame ďalších 5 riešení (a, b, c) našej rovnice: $(1, 1, 6)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 5, 6)$, $(4, 7, 6)$ a $(5, 9, 6)$.
Pre základ 18 máme dokopy deväť riešení.

$k = 19$ Naša rovnica sa upraví na tvar $11b+2c = 61a$. Ľavá strana môže nadobúdať hodnotu najviac $11\cdot 9+2\cdot 9 = 117$. Z toho ihneď vidíme, že $a = 1$. Ľahko si overíme, že rovnica $11b + 2c = 61$ má jediné riešenie $b = 5$ a $c = 3$. Pre základ 19 máme práve jedno riešenie $(a, b, c) = (1, 5, 3)$.

$k = 20$ Naša rovnica má tvar $10b + 2c = 100a$. Ľavá strana môže nadobúdať hodnotu najviac $10 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 108$, takže $a = 1$. Opäť si rýchlo overíme, že rovnica $10b + 2c = 100$ má iba jedno riešenie, a to $b = 9$ a $c = 5$. Pre základ 20 máme jedno riešenie $(a, b, c) = (1, 9, 5)$.

Hľadané čísla sú 120, 240, 360, 480, 116, 236, 356, 476, 596, 153 a 195.

Komentár: Všetky riešenia sme našli vo vyšších sústavach. Ak by sme však riešili podobný príklad, kde by vyšli riešenia v nižších sústavach, museli by sme si dať pozor. Napríklad také číslo 173 sa dá zapísať v 8-čkovej sústave, no v 7-čkovej už nie, pretože tam neexistuje cifra 7.

Úloha č. 7: *Vo včeľom úli sa hmýri 2015 včiel. Včela môže byť buď robotnica, trúd alebo kráľovná. Úľ ale chce čo najviac prosperovať. Čísla a, b, c sú prirodzené čísla so súčtom 2015. Koľko najviac môže byť $ab + bc + ca$?*

Riešenie: (opravovali Ondro a Luxusko)
Je užitočné zistiť, ako sa správajú výrazy pre menšie súčty a, b, c. Pre $a + b + c = 10$ alebo menej zvládneme vyskúšať všetky moznosti[1]. Často vieme riešením zjednodušenej úlohy „uhádnuť“ tvar riešenia pôvodnej. Preto je vhodné spýtať sa otázku: ak $a + b = k$ (k je nejaká konštanta), koľko najviac môže byť ab? Intuitívne by mali byť a, b blízko seba. Dokázať sa to dá napríklad dosadením $b = k - a$ (premyslite si). Preto môžme nadobudnúť

[1]Nezabudnime využiť symetriu riešení – a, b, c vieme ľuvovoľne pozamieňať a $a + b + c$ ani $ab + bc + ca$ sa nezmenia.

dojem, že riešenia úlohy zo zadania budú trojice blízko seba – rovnaké alebo líšiace sa o 1. V našom príklade $671 \cdot 672 + 672 \cdot 672 + 672 \cdot 671 = 1353408$.
Ostáva nám dokázať, že toto číslo je naozaj maximum. Potrebujeme použiť rovnosť $a + b + c = 2015$ a výraz $ab + bc + ca$ v jednom vzťahu. Tu pomôžu skúsenosti s výrazmi, prípadne chvíľka skúšania. Pozrime sa na

$$2015^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

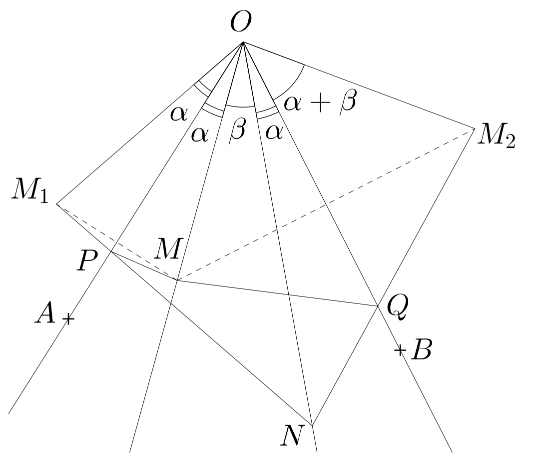
Ešte sa zbaviť $a^2 + b^2 + c^2$. Platí $(a - b)^2 \geq 0$. Upravíme to na $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Analogicky platí $b^2 + c^2 \geq 2bc$ a $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Po sčítaní a predelení dvoma máme $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Dostávame

$$2015^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3ab + 3bc + 3ca.$$

Podobne by vyzeral postup s použitím AG-nerovnosti. Stredný výraz vieme zapísať ako $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3ab + 3bc + 3ca$. Najväčšie $ab + bc + ca$ dostaneme pri rovnosti $a = b = c$, nakoľko jedine pre ne nadobúda zlomok mimimum – 0. Intuícia z blízkosťou $a,\ b,\ c$ nás neklamala.
Zistili sme, že pre ľubovoľné čísla $a,\ b,\ c$ platí: $ab+bc+ca \leq \frac{2015^2}{3}$. Preto pre celé čísla $a,\ b,\ c$ platí: $ab+bc+ca \leq \lfloor \frac{2015^2}{3} \rfloor = 1353408$. Ale hneď na začiatku sme si všimli, že $671 \cdot 672 + 672 \cdot 672 + 672 \cdot 671 = 1353408$. Preto celočíselné maximum je 1353408.

Úloha č. 8: *Viktor má v ľavom vrecku rysa. Je neobyčajný, lebo je veľmi ostrý. Vnútri ostrého uhla AOB ležia také body $M,\ N$, že $|\sphericalangle AOM| = |\sphericalangle BON|$. Na úsečke OA leží bod P tak, že $|\sphericalangle OPM| = |\sphericalangle APN|$. Podobne, na úsečke OB leží bod Q tak, že $|\sphericalangle OQN| = |\sphericalangle BQM|$. Dokážte, že platí: $|PM| + |PN| = |QM| + |QN|$.*[2]

Riešenie: (opravovali JeFo a Ľudka)
Máme dokázať, že súčet vzdialeností bodu P od bodov M a N je rovnaký ako súčet vzdialeností bodu Q od bodov M a N. Ukazovať, že súčet dvoch vzdialeností je rovný súčtu druhých dvoch nie je zrovna nič príjemné. Najmä ak nevieme ukázať rovnosť dĺžok jednotlivých úsečiek. Skúsime preto každý súčet vyjadriť ako dĺžku jednej úsečky.



Podmienka zo zadania $|\sphericalangle APN| = |\sphericalangle OPM|$ hovorí, že keď z bodu N odpinkneme guličku, ktorá sa odrazí od hrany OA v bode P, dokotúľa sa do bodu M (uhol odrazu sa rovná uhlu dopadu).
Bod M zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi OA a vzniknutý bod M_1 spojíme s bodom N. Bod P je potom priesečník priamky M_1N s priamkou OA (rozmyslite si prečo). Z osovej súmernosti platí: $|PM| = |PM_1|$ a teda $|PM| + |PN| = |NM_1|$. Analogicky pre bod Q (bod M zobrazíme v osovej súmernosti podľa osi OB do bodu M_2 a spojíme s bodom N). Potom $|QM|+|QN| = |NM_2|$. Teraz nám už len stačí ukázať rovnosť: $|NM_1| = |NM_2|$.

Všimnime si trojuholníky NM_1O a NM_2O (obr. 1). Z osovej súmernosti máme:

$$|OM_1| = |OM| = |OM_2| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle NOM_1| = |\sphericalangle NOM_2|.$$

Teda trojuholníky NM_1O a NM_2O sa zhodujú v dvoch stranách (stranu NO majú spoločnú) a v uhloch nimi zvierajúcich a teda sú zhodné. Potom sa musia rovnať aj dĺžky ich tretích strán NM_1 a NM_2, čím sme dôkaz ukončili.

Úloha č. 9: *Baša sa pýši, že skryla vo výťahu tabuľku. Farebne splýva s pozadím. Koľkými spôsobmi vieme ofarbiť mriežku veľkosti $N \times N$ štyrmi farbami tak, aby žiadna dvojica susedných štvorčekov nemala rovnakú farbu a v každom štvorci 2×2 boli všetky štyri farby?*

Riešenie: (opravovali Miro a Vodka)
Keďže v obrázku chceme mať aspoň jeden štvorec 2×2, tak $N \geq 2$. Prípad $N = 1$ je triviálny a vyhovujú 4 tabuľky.
Začneme tým, že si nejakú takú tabuľku skúsime nakresliť. Prvý pokus by asi dopadol takto (A, B, C, D označujú 4 rôzne farby) :
Teda, že sa v každom riadku a stĺpci pekne striedajú 2 rôzne farby. Je jasné, že ak si dáme len túto podmienku a podmineku, že v ľavom hornom štvorci 2×2 sú všetky farby, tak to zaručí to, že aj v každom štvorci 2×2 sú všetky farby. A dokonca ofarbenie ľavého horného štvorca jasne definuje ofarbenie celej tabuľky nakoľko to vieme postupne

[2]Inak povedané, že body $P,\ Q$ ležia na elipse s ohniskami v bodoch $M,\ N$.

A	B	A	B
C	D	C	D
A	B	A	B
C	D	C	D

po riadkoch a stĺpcoch jednozančne vyplniť. A keďže ľavý horný štvorec môžeme zafarbiť $4! = 24$ spôsobmi, je týchto tabuliek 24.
Žiaľ, rýchlo si uvedomíme, že to nie sú všetky tabuľky, ktoré vyhovujú. Napríklad, ak v poslednom stĺpci len vymeníme v akom poradí tam sú tie dve striedajúce farby, tak to stále bude vyhovovať. Škoda.
Ak to ale nevyhovuje našej podmienke, t.j., že v každom riadku a stĺpci sú len dve farby, tak tam existuje BUNV (Bez ujmy na všeobecnosti) riadok, v ktorom sú aspoň 3 farby. Ľahko si premyslíme, že tam existuje miesto, kde idú tie 3 farby po sebe. Ak nie, tak by sa celý čas striedali len 2 farby.
Potom to však vyzerá tak ako na obrázku, a jednoznačne vieme vyplniť 3 políčka nad tým aj pod tým (tak aby v štvorci 2×2 boli všetky farby). A potom aj tie ešte nad tým a ešte pod tým atď.

A	B	C
C	D	A
A	B	C
:	:	:

Celkovo dostaneme to, že v týchto 3 stĺpcoch sú v každom len 2 farby. No ak sú v jednom stĺpci len 2 farby, tak sú na striedačku a ani jedna z nich nemôže byť v susednom stĺpci bez toho aby v štvorci 2×2 neboli 2 rovnaké farby. Preto aj v susednom stĺpci sú len 2 farby atď. Spolu dostaneme, že v každom stĺpci sú len 2 farby.
Uvedomíme si, že ak v každodm stĺpci sú len 2 farby na striedačku, pri čom v párnych stĺpcoh je jedna dvojica farieb a v nepárnych tá zvyšná, tak nutne v každom štvorci 2×2 sú všetky 4 farby a teda to vyhovuje. Už len spočítať koľko takých tabuliek je.
Musíme si určiť, ktorá dvojica farieb je v prvom stĺpci. Na to máme $\binom{4}{2} = 6$ možností. Potom je už jasne určené, aké dvojice farieb sú v ktorých stĺpcoch. Na každý stĺpec máme 2 možnosti ktorou farbou začneme, lebo potom sa už musia striedať. To je spolu $6 \cdot 2^N$ tabuliek.
Toto sú tabuľky, kde sú v každom stĺpci len 2 farby. Avšak, my sme si dali ešte podmienku, že v aspoň jednom riadku sú 3 rôzne farby. Ak by neboli dostaneme takú, ktorú sme už našli (teda, že v každom stĺpci aj riadku sa strtiedajú 2 farby.) No určite sme našli všetky také, takže ich len odčítame. A teda dostávame $6 \cdot 2^N - 24$ tabuliek.
To bolo v prípade, že existoval riadok s 3 rôznymi farbami. Ostáva analogický prípad, keď exixstoval stĺpec s 3 rôznymi farbami. No tam dostávame tiež $6 \cdot 2^N - 24$ tabuliek. A zrejme sú rôzne, lebo existuje stĺpec kde nie sú len 2 farby.
Zrejme sme zarátali všetky možnosti, a žiadnu sme nezarátali dvakrát, preto spolu máme $24 + 6 \cdot 2^N - 24 + 6 \cdot 2^N - 24 = 12 \cdot 2^N - 24$ tabuliek.

Úloha č. 10: *V konvexnom n-uholníku si narysujeme nejaké uhlopriečky. Nazvime uhlopriečku pekná, ak sa pretína s práve jednou inou uhlopriečkou. Nájdite najväčší možný počet pekných uhlopriečok (v závistlosti od n). Nepomýľte sa.*

Riešenie: (opravoval Mišo)
Úlohy tohto druhu sa väčšinou skladajú z dvoch častí. Prvou časťou je ukázať, koľko pekných uhlopriečok sa *dá* narysovať. V druhej časti rozoberieme prečo ich nemôže byť viac.
Prvá časť je jednoduchá. Po krátkom skúšaní a kreslení si n-uholníkov zistíme, že je možné narysovať $n-2$ pekných uhlopriečok ak je n párne a $n-3$ ak je n nepárne.
Dosiahneme to tak, že najprv začneme so štvorcom. Ten má dve pekné uhlopriečky. Potom k nemu budeme pridávať po dvoch vrcholoch tak, že pridané vrcholy sú susedné. Môžeme tak spraviť dve pretínajúce sa uhlopriečky, ktoré majú konce v pridaných bodoch a ich susedoch. Body budú teda pospájané cikcakovito, ako šnúrka na topánke.
Týmto spôsobom za každé dva vrcholy pribudnú dve pekné uhlopriečky. Štvoruholník ich má dve, takže n-uholníky budú mať $n-2$ pekných uhlopričok, ak n je párne. Ak n je nepárne, tak žiadna uhlopriečka nepribudne a stále ich bude $n-3$ teda toľko, koľko má pekných uhlopriečok o vrchol menší párnouholník.

Teraz už vieme, *najmenej* koľko pekných uhlopriečok sa dá narysovať. Potrebujeme ešte ukázať, že viac sa nedá. Na pomoc si zavoláme matematickú indukciu.

Najprv sa pozrime na malé n-uholníky. Trojuholník nemá uhlopriečky a štvoruholník má dve a obe sú pekné. Oba spĺňajú náš predpoklad, že párne n-uholníky majú $n-2$ a nepárne $n-3$ pekných uhlopriečok. Neskôr sa nám zíde aj dvojuholník, ten má nula uhlopriečok.

Zoberme si ľubovoľný n-uholník. Predpokladáme, že všetky menšie n-uholníky majú nanajvýš $n-2$, alebo $n-3$ ak n je nepárne, pekných uhlopriečok. Chceme ukázať, že ani tento nebude mať viac. Problém si rozdelíme na dva prípady.

Buď má n-uholník dve pekné uhlopriečky ktoré sa pretínajú, alebo nemá. Ak sú tam dve, ktoré sa pretínajú, rozdeľme si vrcholy n-uholníka do štyroch častí. V každej časti nech je po jednom vrchole z oboch spomenutých pekných uhlopriečok a všetky vrcholy medzi nimi a nech sú časti rôzne. Dokopy všetky štyri časti majú všetky vrcholy a prekryv je len na vrcholoch pekných uhlopriečok. Keďže uhlopriečky sú pekné a pretínajú sa, nemôže ich pretínať žiadna ďalšia uhlopriečka. Ostatné uhlopriečky sú len v rámci častí. Tie už majú menej vrcholov a preto počet ich uhlopriečok vieme odhadnúť z indukčného predpokladu.

Označme si počet vrcholov v častiach a, b, c, d. Náš n-uholník má dokopy $a+b+c+d-4$ vrcholov. Vrcholy oboch pretínajúcich sa uhlopriečok zarátavame dvakrát, preto bolo treba odrátať 4. Navyše časti majú najviac $a-2$, $b-2$, $c-2$, $d-2$ uhlopriečok. Spolu s prvými dvomi to dáva $a+b+c+d-6$, teda $n-2$. Ak by bolo n nepárne, tak v aspoň jednej časti musí byť nepárny počet vrcholov, BUNV (Bez ujmy na všeobecnosti) v a. Potom v nej je najviac $a-3$ uhlopriečok a v samotnom n-uholníku zase $n-3$. Presne to, čo sme chceli dokázať.

Ak sa však žiadne dve pekné uhlopriečky nepretínajú, nevieme takto rozdeliť n-uholník na štyri časti. Ich počet však vieme odhadnúť ešte jednoduchšie. Zmažme všetky nepekné uhlopriečky a sústreďme sa na tie pekné. Žiadne dve sa nepretínajú, takže žiadne čiary sa nebudú krížiť. Vieme ešte dokresliť spojnice vrcholov tak, aby sa stále nič nepretínalo (napr. strany). Keď už nebudeme vedieť dokresliť nič, zistíme, že celý n-uholník je rozdelený na trojuholníky. To nám dáva dokopy $2n-3$ úsečiek, z ktorých je n strán. Pekných uhlopriečok bude nanajvýš $n-3$ (ak sa žiadne dve nepretínajú).

Ukázali sme, že pekných uhlopriečok je najviac $n-2$ ak n je párne a $n-3$ ak nepárne. Nájsť konštrukciu nebolo ťažké, stačilo pridávať dvojice vrcholov. Ťažšie bolo ukázať, že viac sa nedá. Veľa riešiteľov sa namotalo na svoju konštrukciu a snažilo sa ukázať, že ak sa čosi zmení, tak pár uhlopriečok sa stratí. No je tu problém, že to neukazuje, prečo sa to nezlepší keď sa spraví viac krokov. Je treba na to ísť všeobecnejšie, teda zobrať ľubovoľný n-uholník a rozobrať všetky možnosti.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	4.	CGsvM SL	15			9	9	9	9	9		45	45
1.	Drotár Pavol	2.	GPoš KE	4	9	9	9	9	9				45	45
1.	Oravkin Eduard	3.	1SG BA	7		9	9	9	9	8	9		45	45
4.	Bak Patrik	4.	G Sobrance	7			9	9	9	8	9		44	44
5.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	3	9	7	9	9	9				43	43
5.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	8	9	9	3	9	8	3		43	43
7.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	2	9	9	9	4		8			39	39
8.	Hanzely Slavomír	3.	GJAR PO	8			9	9	9	8	3		38	38
8.	Kluvanec Roman	4.	GPár NR	8			9	9	9	8	3		38	38
10.	Švarc Radovan	4.	Česká Třebová	11			8	9	9	9	1		36	36
10.	Truc Lam Bui	4.	Gamča BA	13			9	9	9	9	0		36	36
12.	Konečný Matěj	4.	GJir ČB	7		9	8	9		9	0		35	35
12.	Pišťák Daniel	3.	GChD Praha	6		9	9	9		8			35	35
12.	Súkeník Peter	3.	GVar ZA	8			9	8	9	5	4		35	35
15.	Hanesz Zoltán	2.	GPoš KE	4	9	7	9	9					34	34
15.	Krajčiová Katarína	4.	GAlej KE	10			8	9	9	8			34	34
15.	Mičko Juraj	2.	GPoš KE	4	9	7		9	9				34	34
15.	Ralbovský Peter	3.	ŠPMNDG BA	7		7	9	7		8	3		34	34
19.	Banhegyi Tomas	3.	GJH BA	4	8	9	9			3	3		32	32
19.	Halabrin Juraj	3.	GJH BA	7		7	9	7	9	0	0		32	32
19.	Marčeková Katarína	3.	GJH BA	7		7	7	9	9				32	32
22.	Molčan Samuel	3.	GJAR PO	7		7	9	7		8			31	31

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
23.	Králik Matej	4.	GJH BA	12			9	9	9	3			30	30
23.	Onduš Daniel	3.	GAlej KE	7		9	9	9			3		30	30
23.	Sládek Samuel	3.	GAB NO	4			9	9		6	6		30	30
26.	Prešinská Kristína	4.	GPár NR	11			9	9		8	3		29	29
27.	Hronkovičová Nina	4.	GKom PE	9			7	7	9	1	3		27	27
27.	Liu Zhen Ning Dávid	4.	GJH BA	12			8	7	9	3			27	27
27.	Murin Marek	3.	GJH BA	8			6	4	9	8			27	27
27.	Nepšinská Silvia	4.	GJH BA	11			9	9	9				27	27
27.	Semanišinová Žaneta	3.	GAlej KE	7		9	9	9					27	27
27.	Svobodová Zuzana	3.	Frýdlant ČR	4	2	7	8		9	1			27	27
33.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3	8	9		5		3			25	25
33.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	4	9	4	3	9					25	25
35.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	4	9	9	3	3					24	24
35.	Choma Matej	3.	Gamča BA	7		9	9	6			0		24	24
37.	Genči Jakub	2.	GPoš KE	4		7	9	6					22	22
38.	Kulla Filip	3.	BiG Sučany	8			9	9			3		21	21
39.	Bodík Juro	3.	Gamča BA	9			9	8			2		19	19
39.	Kopf Daniel	3.	G Slez ČR	8			5	9		2	3		19	19
39.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3	9	8				2			19	19
39.	Trenčanská Tereza	3.	Gamča BA	6		8		7		1	3		19	19
43.	Frankovská Zuzana	3.	GJH BA	7		9			9				18	18
43.	Krakovská Ema	4.	Gamča BA	9			9	9					18	18
43.	Mišlanová Kristína	3.	GAlej KE	7		9	9	*					18	18
43.	Žídek Matěj	3.	Frýdlant ČR	7		9			9				18	18
47.	Tóthová Andrea	3.	GJH BA	5	8	9	6	1		1			17	17
48.	Kurimský Ján	3.	GsvMo	6		7		9					16	16
49.	Hollý Dominik	4.	ŠPMNDG BA	8			8	3	1		2		14	14
49.	Porubsky Michal	3.	GsvCM NR	5		8		6					14	14
49.	Vančo Šimon	3.	CGsvM SL	4	2	9		3					14	14
52.	Kudelčíková Martina	3.	GVO ZA	7		8		1			1		10	10
52.	Santrová Michaela	4.	GMH Trstená	11				7			3		10	10
54.	Krajmerová Barbora	3.	G Šurany	6		7		1			0		8	8
54.	Petráš Peter Pavel Arthur	3.	ŠPMNDG BA	7			7	1		0	0		8	8
56.	Krutek Robert	2.	GJGT BB	3	2	3					0		5	5
57.	Martinka Matej	3.	SŠsvFA	4				1					1	1
58.	Dráček František	4.	GŠkol PB	10									0	0

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9	9	4		45	45
1.	Záhorský Ákos	1.	G Šahy	1	7	9	8	9	9	9	9		45	45
3.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	9	9		8	9	9	3		44	44
4.	Dobrovič Adam	2.	GJGT BB	2		9	9	9	9		7		43	43
4.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	3			9	9	7	9	9		43	43
6.	Bošková Dagmar	1.	GJH BA	2		9		9	8	7	9		42	42
6.	Onduš Peter	1.	GAlej KE	2		9	8	9	7	9			42	42
8.	Leinwatherová Michaela	1.	GPan BA	2		9	6	6	7	9			37	37
8.	Parada Matej	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9		1		37	37
8.	Pulmannová Barbara	1.	Gamča BA	2		9	9		9	9	1		37	37
8.	Švihorík Tomáš	1.	GPár NR	2		9	7	9	7	5	1		37	37
12.	Dlugošová Michaela	1.	GKuk PP	2		9	9	8	8	1	2		36	36
12.	Kuťková Sára	1.	Gamča BA	2		9	9	8	9		1		36	36
12.	Poljovka Jakub	1.	GPár NR	2		9		9	8	8	2		36	36
15.	Belan Pavol	1.	GVar ZA	2		9		9	7	9	1		35	35

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
15.	Tódóvá Tereza	0.	GPár NR	0	9	8	7	3	8	1	1		35	35
17.	Pajger Šimon	1.	GVO ZA	2		9	9	8	7	1			34	34
18.	Ivan Peter	1.	GJH BA	2		9	6	9	7		1		32	32
19.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3			9	8	9		5		31	31
19.	Oravkin Richard	0.	1SG BA	0	7	9	6	9					31	31
19.	Smolárová Paulína	1.	ŠPMNDG BA	2		9	8		7	4	3		31	31
22.	Bajnoková Natália	1.	GCSL BA	2		9	7	6	7		1		30	30
22.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2		1	8	9	6		6		30	30
24.	Pándy Michal	2.	GPoš KE	3			6	8	7		7		28	28
24.	Šuchová Martina	1.	GPár NR	1	2	9	4		7	6	1		28	28
26.	Častulíková Katarína	1.	1SG BA	1	7	9	2	2	7				27	27
26.	Homola Marek	1.	GJH BA	2		9	1	9	7		1		27	27
26.	Sučíková Svetlana	1.	G-BMA UK	2		9		9	8		1		27	27
29.	Mikuláš Matúš	1.	GBST LC	2	1	9	5	3	8				25	25
30.	Remperová Natália	1.	GKom PE	2		9		8	4	3	0		24	24
31.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3			6	9	8				23	23
32.	Komzala Peter	1.	GJH BA	2		9	1	2	9		1		22	22
32.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	2				9	8		5		22	22
32.	Škotnárová Lucia	2.	G Šurany	3			9	1	7	4	1		22	22
35.	Kecskésová Michaela	3.	GPár NR	3			5		6	7	3		21	21
35.	Krett Jakub	2.	GMA BA	3			6	8	4	3	0		21	21
37.	Juran Matúš	3.	GJH BA	3			1	9	8	1	1		20	20
38.	Čermák Michal	1.	1SG BA	1		8		9			1		18	18
39.	Poláková Nikola	1.	G Šurany	2		4		4	8		1		17	17
39.	Rosinská Veronika	2.	G Šurany	2		9			7		1		17	17
39.	Šimková Jarmila	1.	GPár NR	2		9		8					17	17
39.	Zajacová Terézia	1.	1SG BA	2		7		2	7		1		17	17
43.	Poljak Marián	1.	???	1					9	7			16	16
43.	Sadovská Jana	1.	ŠPMNDG BA	2		7	2	3	3		1		16	16
45.	Rajníková Mária	2.	GĽŠ TN	2		7			7		1		15	15
46.	Horanský Marek	2.	ŠPMNDG BA	3		9	2	2	7		1		12	12
47.	Ďurina Marián	1.	G Šurany	1		9							9	9
47.	Ferech Matúš	1.	GJH BA	1				2	7		0		9	9
49.	Krutek Robert	2.	GJGT BB	3			2	2	3				7	7
49.	Petrová Simona	3.	ŠPMNDG BA	3				5	1		1		7	7
49.	Šimkovičová Natália	1.	GCSL BA	1		7							7	7
52.	Šimová Mária	2.	EGMT	2	5	4							4	4