Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2014/2015

Úloha č. 1: *Kaťa si musí raz do týždňa upratať izbu. Prirodzene sa jej nechce, a preto rozmýšľa nad nasledovnou úlohou. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $8^n - 2^n$ deliteľné číslom 6.*

Riešenie: (opravovali Veronika a Aňa)
Číslo je deliteľné 6, práve vtedy keď je deliteľné 2 a 3 zároveň. Upravíme výraz $8^n - 2^n$ do súčinového tvaru, aby sme mohli lepšie skúmať deliteľnosť.

$$8^n - 2^n = (2 \cdot 4)^n - 2^n = (2^n \cdot 4^n) - 2^n = 2^n(4^n - 1)$$

Vidíme, že po úprave sa vo výraze nachádza mocnina dvojky (2^n) a teda je deliteľný číslom 2. Potrebujeme ešte ukázať deliteľnosť 3. Kedže 2^n nemôže byť deliteľné 3 (rozmyslite si prečo), tak by sme chceli dokázať, že $(4^n - 1)$ je deliteľné 3. Upravujeme ďalej.

$$2^n(4^n - 1) = 2^n((2^2)^n - 1) = 2^n((2^n)^2 - 1) = 2^n(2^n - 1)(2^n + 1)$$

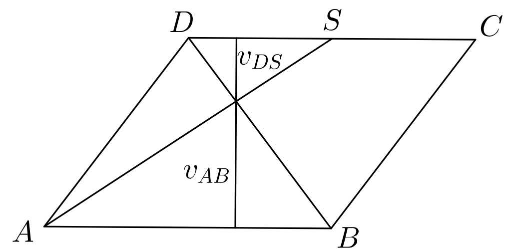
Čísla $(2^n - 1)$, 2^n, $(2^n + 1)$ sú tri po sebe idúce čísla. Ako vieme, z troch za sebou idúcich prirodzených čísel musí byť práve jedno deliteľné tromi. Číslo 2^n sme vylúčili, a teda nám zostáva jedno z čísel $(2^n - 1)$ alebo $(2^n + 1)$. Nezáleží na tom, ktoré z nich je deliteľné 3 nakoľko sa vo výraze $8^n - 2^n$ nachádzajú obe.
Ukázali sme, že výraz $8^n - 2^n$ je deliteľný 2 a 3 zároveň, teda sme dokázali aj deliteľnosť číslom 6.

Úloha č. 2: *Žiariaci elfi a fosforeskujúci trpaslíci sedia okolo okrúhleho stola. Je ich dokopy 60. Vie sa, že trpaslíci vždy klamú a elfi vždy hovoria pravdu, okrem prípadu kedy sa elfi pomýlia. Každý zrazu vyhlásil, že sedí medzi elfom a trpaslíkom. Koľko je dokopy trpaslíkov, ak vieme, že sa práve dvaja elfi pomýlili?*

Riešenie: (opravovali Kajo a Luxusko)
Ako prvé si môžme všimnúť, že pri stole musia sedieť aspoň dvaja elfi (keďže dvaja sa pomýlili). Pozrime sa, ako môžeme usadiť trpaslíka. Zjavne, trpaslík nemôže sedieť medzi elfom a trpaslíkom. Preto musí každý trpaslík sedieť medzi dvoma elfmi alebo dvoma trpaslíkmi. V súvislej skupinke trpaslíkov by krajní susedili s elfom a trpaslíkom – hovorili by pravdu, a to nemôžu. Trpaslíci teda nutne musia sedieť medzi dvomi elfmi.
Ak by sa žiaden z elfov nemýlil tak vieme presne povedať, ako musia sedieť za stolom. Zoberieme si nejakého elfa. Ten má jedného suseda trpaslíka, vedľa ktorého z zdruhej strany musí sedieť ďalší elf. Tento druhý elf má už jedného suseda trpaslíka a druhý teda musí byť elf, vedľa ktorého musí sedieť ešte aj trpaslík atď. Takto by bolo na 60-tich miestach 40 elfov a 20 trpaslíkov, a tvorili by trojice „TEE“, ktoré sa nám aj dokola pekne spoja.
Ako do toho pridať našich dvoch pomýlených elfov? Pohrajme sa s usádzaním elfov. Odstránime niektoré trojice „TEE“ a pridáme skupinky s inými súvislými počtami elfov. Do úvahy pripadajú „TE“ čím vyrobíme jedného klamára (medzi dvoma trpaslíkmi), „TEEE“ čím tiež vyrobíme jedného klamára (v strede) a „TEEEE“ čo nám dáva až dvoch klamárov. Viac ich už mať určite nemôžeme. Celková dĺžka pridaných skupiniek musí byť deliteľná 3, lebo nimi nahradíme niekoľko pôvodných trojíc „TEE“. Nedá nám to až tak veľa skúšania, aby sme zistili, že na získanie práve dvoch pomýlených elfov vieme urobiť náhradu jediným spôsobom. Vyhodíme po dve „TEE“, pridáme „TE“ a „TEEE“. Počty elfov a trpaslíkov ostávajú 40, 20.

Úloha č. 3: *Jefovi odfúklo škridľu zo strechy.*
„Pomôže ti tá nová doska“ spýtal sa náhodný okoloidúci.
Zistite to. Majme rovnobežník $ABCD$. Stred strany CD označme ako S. Uhlopriečka BD pretína AS v bode X. $|AB| = 10$ cm, obsah $ABCD$ je $60\ \text{cm}^2$. Aký je obsah trojuholníka SDX?

Riešenie: (opravovala Betka)
Tento príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi. Ukážeme si jeden z nich. Trojuholníky ABX a DSX sú podobné (premyslite si). Keďže $|DS| : |AB| = 1 : 2$ tak koeficient podobnosti trojuholníkov ABX a DSX je 2. Preto musí platiť podobná rovnosť aj pre výšky v týchto trojuholníkoch $v_{DS} : v_{AB} = 1 : 2$. Z obsahu rovnobežníka $ABCD$ a dĺžky strany $|AB|$ ľahko dostaneme výšku rovnobežňíka (na stranu AB) $v = 6$ cm. Dopočítame si veľkosť v_{DS} pomocou vzťahu $v_{DS} + v_{AB} = 3v_{DS} = 6$ cm. Obsah trojuholníka DSX je potom $5 \cdot 2/2 = 5\ \text{cm}^2$.



Úloha č. 4: *Miro a Maťo sa zúčastnili turnaja v slovnom žargóne. Hralo sa systémom každý proti každému práve raz, v ktorom každý hráč mal odohrať denne práve jeden zápas. Miro s Maťom však ochoreli a ako jediní dvaja hráči nedokončili turnaj. Miro skončil o päť dní skôr ako Maťo. Celkovo sa na turnaji odohralo 350 duelov. Koľko duelov odohral Maťo? Hral proti Mirovi?*

Riešenie: (opravovali JeFo a Ľubo)
Označme si počet ľudí, ktorí sa zúčastnili turnaja n. Keďže sa hrá systémom každý s každým, muselo sa hrať $(n-1)$ dní. Celkový počet zápasov je teda $n(n-1)/2$. Dvojkou sme to podelili preto, že každého zápasu sa zúčastnia dvaja hráči, teda denne sa odohrá $n/2$ zápasov.
Teraz ešte musíme zistiť, ako nám náš celkový počet zápasov mení fakt, že Miro a Maťo ochoreli. Je jasné, že to celkový počet zápasov, ktoré sa odohrali, zníži. Skúsme si nejak vyjadriť o koľko. Povedzme si, že keď Maťo ochorel, tak sa odohralo kvôli tomu dokopy o x zápasov menej. Keďže Miro ochorel ešte päť dní pred Maťom, tak kvôli Mirovi sa odohralo o $(x + 5)$ zápasov menej. Dokopy sa kvôli ním teda odohralo o $(2x + 5)$ zápasov menej. Keďže vieme, že sa odohralo 350 zápasov, môžme predpokladať, že počet zápasov, ktoré by sa odohrali, keby neochoreli by bol $(2x + 355)$.
Dostávame teda rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= 2x + 355 \\ n(n-1) &= 4x + 710 \end{aligned}$$

Teraz si skúseme zvoliť nejaké rozumné n. Začnime na odmocnine zo 710, čo zaokrúhlime nahor na 27. Dosadíme do našej rovnice a dostaneme: $27 \cdot 26 = 4x + 710$, teda $x = -2$. Keďže x môže dosahovať len kladné celé hodnoty, tak $n = 27$ nám nevyhovuje. Taktiež nebudú vyhovovať ani žiadne menšie n (rozmyslite si). Skúsme teda $n = 28$. Dostaneme $28 \cdot 27 = 4x + 710$, odkiaľ $x = 11,5$, čo nie je celé číslo, teda nám opäť nevyhovuje. Skúsime si to ešte pre $n = 29$.
Dostávame $29 \cdot 28 = 4x + 710$, čiže $x = 25,5$. Nielen, že nám vyšlo x desatinné, ale navyše by to znamenalo, že Miro by vynechal $30,5$ dní, čo je viac, ako turnaj trval. Preto nebude vyhovovať ani žiadne väčšie n.
Vyzerá to tak, že $n = 28$ bude to správne, ale nejak nám to s ním nevychádza. Skúsme sa teda zamyslieť, či sme niečo nezabudli. A ako vlastne máme zistiť, či Miro s Maťom spolu hrali alebo nie? A v tom si uvedomíme, že naša úvaha nebola vcelku presná, lebo počet zápasov, ktoré sa nehrali by bol $2x + 5$ len v prípade, že Maťo s Mirom už hrali, ak by proti sebe ešte nehrali, tak sme ich zápas odrátali dvakrát (prvý ako Maťo proti Mirovi, druhý ako Miro proti Maťovi). Upravíme teda počet zápasov, ktoré sa neodohrali na $2x + 4$. Dosadíme do našej rovnice pre $n = 28$ a dostávame:

$$\begin{aligned} 28 \cdot 27 &= 4x + 708 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Čo je presne to, čo sme chceli dostať: celé kladné číslo, ktoré nie je ani príliž veľké. Môžte si vyskúšať, že pre $n = 27$ ani $n = 29$ by nám to už nevychádzalo. Hralo sa $n - 1$ dní, teda 27. Čiže Maťo hral 15 dní a proti Mirovi určite nehral.

Úloha č. 5: *Barča s Ivkou sa hádajú či je lepšia voda alebo vodík. Preto si vymysleli nasledovnú ťahovú hru: V každom ťahu si vyberú číslo od 1 do 25 a odložia na zem. Môžu si vybrať aj viackrát to isté číslo. Hráčky sa striedajú v ťahoch. Akonáhle sa po ťahu niekej z hráčok dá z niekoľkých čísel zo zeme vykombinovať pomocou sčítavania alebo odčítania štvorec (druhá mocnina prirodzeného čísla), hráčka ktorá práve urobila ťah prehráva. Barča začína. Má niektorá z hráčok víťaznú stratégiu? Ak áno, tak kto a ako vyzerá táto stratégia?*

Riešenie: (opravovali Aďka a Plutvička)
Prvá dôležitá otázka je, či hra musí vždy skončiť. Vieme, že v každom ťahu pribudne nejaké číslo a čísel máme na výber iba konečne veľa. Tým pádom sa tam časom niektoré číslo n vyskytne n-krát a hra skončí kvôli kombinácii $n+n+\cdots+n = n\cdot n = n^2$
Ďalej by sme chceli zistiť zhruba po koľkom ťahu bude hra vo väčšine prípadov končiť. Určme si nejaké číslo ktorým začne prvý hráč. Po troche skúšania to vyzerá tak, že po prvom ťahu oboch hráčov ešte určite neskončí (ak máme dve čísla, veľmi pravdepodobne vieme nájsť tretie číslo tak, aby sa z tejto trojice nedal vykombinovať štvorec). Avšak, 1. hráč má vo svojom druhom ťahu šancu zahrať také číslo, že 2. hráč vo svojom druhom ťahu už musí vytvoriť štvorec (vyskúšajte, že je to tak až na niektoré špeciálne prípady).
To nás privádza na myšlienku hľadať stratégiu pre 1. hráča. Takže sme Barča a máme plnú hlavu otázok. Ktoré čísla určite nechceme hrať? 1, 4, 9, 16, 25, pretože to by sme automaticky prehrali (taktiež môžeme predpokladať, že ani Ivka nebude hrať tieto čísla). Ktoré číslo zahráme ako prvé? Vyberme nejaké a skúsme preňho nájsť výhernú stratégiu, napríklad číslo **2**. Ak sa nám to podarí, tak môžeme oslavovať a ak nie, skúsime nejaké iné.
Po tom, čo Barča zahrá dvojku máme spolu so štvorcami z hry vylúčené: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 23, 25. Poďme teraz rozobrať čo má Barča zahrať podľa toho, čo zahrá Ivka:

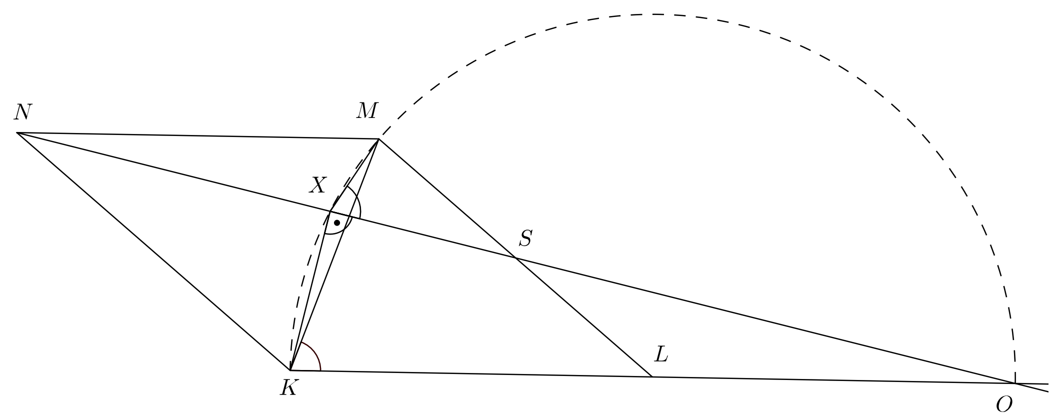
- **5** Barča môže zahrať 5, 10, 15, 17, 24. Vyberie si číslo **15** (vyskúšajte si, že ak sú po Barčinom ťahu na stole kartičky 2, 5, 15, Ivka vo svojom ťahu prehráva).
- **8** Barča môže zahrať 13, 20, 21, vyberie si **13** a vyhrá.
- **10** Barča môže zahrať 5, 10, 20, 22, vyberie si **22** a vyhrá.
- **12** Barča môže zahrať 12, 17, 20, vyberie si **17** a vyhrá.
- **13** to sme už v skutočnosti vyriešili. Zahrá **8** (na poradí kartičiek pri sčítavaní a odčítaní nezáleží).
- **15** taktiež vyriešené. Zahrá **5**.
- **17** vyriešené. Zahrá **12**.
- **19** Barča môže zahrať len **24**. Tým ale hra nekončí, obe ešte môžu dávať 24. Keďže $19+2<24$, 24-ku nemá zmysel odčítavať. Budeme mať niekoľko krát $+24$ a k tomu môžeme pričítať/odčítať 2, 19, 17, 21. Hra skončí najneskôr po šiestom pridaní 24-ky, keďže $6\cdot 24 = 144$. Keď si vypíšeme násobky 24 a skúsime k nim pričítať/odčítať 2, 19, 17, 21, zistíme, že hra neskončí skôr ako po pridaní šiestich 24. Keďže pri pridaní šiestej 24-ky je na ťahu Ivka, lebo je to párny ťah, opäť vyhráva Barča.
- **20** Barča môže zahrať 8, 10, 12, 15, 20. Vyberie si **10** a tým docieli, že ďalej sa hrá už len s číslami 10 a 20. Z čísel 2, 10, 20 sa dajú vykombinovať len čísla končiace na 0, 2, 8. Vypíšme si niekoľko štvorcov, ku ktorým sa teoreticky možu dostať: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Vidíme, že najmenší štvorec, pri ktorom môže hra skončiť je 100. Ak po každom kole pribudne 10 a 20, po troch takýchto kolách bude na zemi 2, 10, 20, 10, 20, 10, 20, v súčte 92. Tento súčet Barča docieli tým, že dá z dvojice 10, 20 vždy to druhé číslo ako Ivka. Na ťahu je Ivka a nech dá 10 alebo 20, z čísel na zemi sa určite bude dať vykombinovať 100 a potvora Barča zase vyhrá.
- **21** Barča môže zahrať 8, 21. Vyberie si **8** a vyhrá.
- **22** Barča môže zahrať 10, 17, 22. Zahrá **17** a vyhrá.
- **24** trojicu 2, 19, 24 sme už vyriešili.

Poradili sme Barči ako má hrať aby vyhrala bez ohľadu na to, čo hrá Ivka. Našli sme teda víťaznú stratégiu pre 1. hráča.

Úloha č. 6: *Jefovi odfúklo škridľu zo strechy. Aby toho nebolo málo, odfúklo mu aj novú dosku ktorou to zaplátal. Preto potrebuje ďalšiu dosku, pevnú ako železo. Musí však zistiť jej vlastnosti predtým ako ju použije. V kosoštvorci $KLMN$ platí $|\sphericalangle KLM| = 40°$. Označme si stred strany LM ako S. Pätu kolmice na priamku NS prechádzajúcu cez bod A označme X. Zistite veľkosť uhla MXN.*

Riešenie: (opravoval Jožo)
V tejto úlohe máme vypočítať veľkosť uhla v kosoštvorci. Môžeme skúsiť spočítať rôzne uhly, hľadať susedné, striedavé uhly a dopočítavať do 180°, ale iba takto sa nám to asi nepodarí. Budeme potrebovať využiť niečo iné a možno si dokresliť aj ďalšie veci. Vhodné je aj nájsť nejakú kružnicu. V nej totiž môžeme využiť obvodové a stredové uhly (a prípadne mnoho ďalších vecí).

Zo zadania vieme, že uhol KXS je pravý. To nám našepkáva, že by sme mohli využiť Tálesovu kružnicu, ale ktorú? Hodilo by sa nám, ak by sme o jej priemere vedeli niečo povedať. Vhodné by bolo umiestniť jej priemer na stranu KL. Na to musíme stranu KL spolu s úsečkou XS predĺžiť. Ich priesečník si označme O. Naša Tálesova kružnica je teda kružnica opísaná trojuholníku KOX so stredom v strede úsečky KO.



Všimnime si, že čiary, ktoré sme pridali nie sú od veci, lebo trojuholníky NMS a OLS sú zhodné (rozmyslite si prečo), z čoho dostaneme, že $|LO| = |MN|$. Keďže strany kosoštvorca sú rovnako dlhé, môžeme zapísať aj, že $|LO| = |LM| = |LK|$. Z toho vidíme, že stred našej Tálesovej kružnice je bod L a jej polomer strana kosoštvorca. Ďalej vidíme, že bod M je od bodu L (stredu Tálesovej kružnice) vzdialený práve o jej polomer, preto bod M na nej musí ležať tiež.
Ukázali sme, že body $O,\ M,\ X,\ K$ ležia na jednej kružnici. Uhol MXO je obvodový uhol k tetive MO, preto má rovnakú veľkosť ako obvodový uhol MKO. Veľkosť uhla MKO však vieme ľahko vypočítať, lebo MK je uhlopriečka kosoštvorca (a teda aj os uhla NKL). Čiže $|\sphericalangle MXO| = |\sphericalangle MKO| = 70°$. Náš hľadaný uhol MXN je susedný s uhlom MXO, preto $|\sphericalangle MXN| = 180° - 70° = 110°$.

<u>Úloha č. 7:</u> *Karol našiel na zemi tri celé mangá. Nedalo sa nevšimnúť, že sú dosť zaujímavé. Čísla $a,\ b,\ c$ sú celé čísla. Ukážte, že ak $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$, tak abc je treťou mocninou nejakého celého čísla.*
<u>Riešenie:</u> (opravoval Hiphop)
Na začiatok si upravme rovnosť zo zadania do priateľnejšieho tvaru. Keďže žiadne z čísel $a,\ b,\ c$ nie je 0, tak môžme s pokojným svedomím prenásobiť našu rovnosť výrazom abc:

$$a^2c + b^2a + c^2b = 5abc \tag{1}$$

Vo väčšine úloh, kde sa vyskytuje deliteľnosť sa nám lepšie pracuje s navzájom nesúdeliteľnými číslami. Skúsme si preto našu úlohu trošku zjednodušiť. Predpokladajme, že $a,\ b,\ c$ vyhovujú rovnici (1). Potom $a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc$ vyhovujú tiež rovnici (1), a navyše abc je tretia mocnina prirodzeného čísla práve vtedy, keď $a'b'c'$ je tretia mocnina prirodzeného čísla. Preto si môžme povedať, že $\mathrm{NSD}(a, b, c) = 1$ (ak by nebolo, tak rovnicu zo zadania vydelíme $\mathrm{NSD}(a, b, c)^3$ a dostaneme rovnakú úlohu).
Našim cieľom je ukázať, že každé prvočíslo, ktoré sa nachádza v prvočíslelnom rozklade čísla abc tam je rovno v mocnine deliteľnej troma (premyslite si, že to stačí). Predpokladajme, že nejaké prvočíslo p delí číslo a. Keďže $p \mid a^2c,\ p \mid b^2a,\ p \mid 5abc$, tak pre rovnosť (1) musí platiť aj $p \mid c^2b$. Teda $p \mid c$ alebo $p \mid b$ (rozmyslite si, že keby p nebolo prvočíslo, tak takýto záver nemožno spraviť). Keďže $\mathrm{NSD}(a, b, c) = 1$, tak p delí práve jedno číslo z $b,\ c$. BUNV[1] nech $p \mid b$.
Označme si ďalej najmenšiu mocninu čísla p, ktorá delí a ako α. Podobne, označme si najmenšiu mocninu čísla p, ktorá delí b ako β. Teda platí $a = a_0p^\alpha$, $b = b_0p^\beta$, kde $a_0,\ b_0$ sú prirodzené čísla nedeliteľné p. Prepíšme si rovnicu (1) pomocou nových označení.

$$p^{2\alpha}a_0^2c + p^{\alpha+2\beta}b_0^2a_0 + p^\beta c^2b_0 = p^{\alpha+\beta}5a_0b_0c. \tag{2}$$

Všimnime si, že posledné tri výrazy rovnosti (2) sú určite deliteľné p^β. Preto aj prvý výraz musí byť deliteľný p^β. Keďže ale najväčšia mocnina p, ktorá delí prvý výraz je $p^{2\alpha}$, tak $\beta \le 2\alpha$. Ďalej by sme chceli využiť podobnú úvahu. Problém je, že nevieme s určitosťou povedať, či $p^{2\alpha} \mid p^{\alpha+\beta}$ alebo $p^{\alpha+\beta} \mid p^{2\alpha}$. Preto rozoberieme nasledovné dve možnosti:

$\alpha \ge \beta$: Teraz už vieme určite, že $p^{\alpha+\beta} \mid p^{2\alpha}$. Vidíme, že $p^{\alpha+\beta}$ delí tri výrazy v rovnosti (2), čiže musí deliť aj štvrtý. Preto $p^{\alpha+\beta} \mid p^\beta c^2b_0$, teda $\alpha + \beta \le \beta$. To je však spor, keďže sme predpokladali, že $\alpha > 0$.

[1] Bez Ujmy Na Všeobecnosti

$\alpha < \beta$: Vieme, že $p^{2\alpha} \mid p^{\alpha+\beta}$. Vidíme, že $p^{2\alpha}$ delí tri výrazy v rovnosti (2), čiže musí deliť aj štvrtý. Preto $p^{2\alpha} \mid p^{\beta}c^2b_0$, teda $2\alpha \leq \beta$.

Keďže $\beta \leq 2\alpha$ a zároveň $2\alpha \leq \beta$, tak $2\alpha = \beta$. Už sme takmer pri konci. Najväčšia mocnina p, ktorá delí abc je $\alpha + \beta = 3\alpha$. Navyše 3α je deliteľné tromi. Teda najväčšia mocnina každého prvočísla, ktoré delí abc, je deliteľná tromi. To však s určitosťou znamená, že abc je tretia mocnina nejakého celého čísla.
Otázka na záver: Ako by sme riešili úlohu, keby nebolo v zadaní číslo 5, ale číslo 2015?

Komentár: Väčšina vašich správnych riešní bola vpodstate obdoba vzorového riešenia. Viacerí z vás ste sa pokúšali nájsť všetky riešenia. To sa bohžiaľ nikomu nepodarilo, a náročnosť tohto problému ďaleko presahuje úlohu 7.

Úloha č. 8: *Pre prirodzené číslo n si označme n-tú cifru čísla x sprava ako $d_n(x)$*[2]*. Majme takú postupnosť prirodzených čísel a_n, že v postupnosti $d_n(a_n)$ je len konečne veľa núl. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa v postupnosti a_n nevyskytujú.*

Riešenie: (opravovala Ľudka)
Dôležité je uvedomiť si, pre aké čísla a_n vieme ľahko povedať, že $d_n(a_n)$ je rovné 0. Ak $a_n < 10^{n-1}$ (teda ak a_n nie je aspoň n-ciferné), potom $d_n(a_n) = 0$. Ukážeme, že od určitého člena sa počet čísel, ktoré sa v postupnosti nemôžu nachádzať, s rastúcim n zväčšuje.
Postupnosť $d_n(a_n)$ obsahuje konečne veľa núl. Môžeme preto povedať, že od určitého člena sa už žiadna ďalšia nula v postupnosti d_n nevyskytuje. Nech a_M je posledný člen, pre ktorý je $d_M(a_M) = 0$. Potom pre každé $n > M$ je a_n aspoň n-ciferné číslo. Čísla, ktoré sú menšie ako 10^n (sú najviac n-ciferné), sa môžu v postupnosti nachádzať len na prvých n pozíciách. Preto sa môže spomedzi prvých $10^n - 1$ prirodzených čísel (pre $n > M$) vyskytnúť v postupnosti najviac n čísel. Teda spomedzi prvých $10^n - 1$ čísel sa v postupnosti určite nevyskytne $10^n - n - 1$ čísel. Ľahko sa ukáže, že tento počet sa s rastúcim n zväčšuje aspoň o 1 (ponechávame na čitateľovi). Z toho vieme, že existuje ľubovoľne veľká množina čísel, ktoré sa v postupnosti a_n nevyskytujú. A teda naozaj existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré v postupnosti a_n nenájdeme.

Úloha č. 9: *Štyri žaby sedia vo vrcholoch štvorca. Každú minútu spraví práve jedna žaba skok. Žaby však neskáču obyčajne. Skáču tak, že preskočia ťažisko zvyšných troch žiab. Presnejšie povedané, ťažisko trojuholníka, ktorého vrcholy sú tri neskáčuce žaby, je vždy v strede medzi bodom výskoku a bodom dopadu skáčucej žaby. Môže sa niekedy stať, že jedna žaba vyskočí na chrbát druhej?*

Riešenie: (opravovali Miro a Samo)
Kreslením obrázkov sa k ničomu peknému nedostaneme, preto sa v takýchto úlohách oplatí zaviesť súradnicovú sústavu. Nech A, B, C, D sú naše žaby a sedia na súradniciach (x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c), (x_d, y_d). Od teraz sa zamerajme iba na ich x-ovú súradnicu. Pre y-ovú platia rovnaké úvahy a aj tak ju nebudeme potrebovať. Ťažisko n bodov je priemer ich súradníc (stred úsečky je tiež v podstate ťažisko úsečky). Z toho si vyjadríme, že keď žaba skočí (BUNV[3] nech skáče žaba D), zmení svoju súradnicu z x_d na $\frac{2}{3}(x_a+x_b+x_c)-x_d$. Vidíme, že ak boli súradnice racionálne čísla, tak nimi aj ostanú. Po chvíľke hrania sme si možno všimli, že tá žaba, čo skákala ako posledná, má v menovateli o 1 väčšiu mocninu 3 ako bolo doterajšie maximum (až na začiatočné prípady a prípady, keď skáče tá istá viackrát po sebe). Z toho by potom vyplývalo, že dve žaby nemôžu mať rovnakú súradnicu, lebo potom by posledným skokom musela mať žaba, čo skákala rovnakú mocninu 3 v menovateli ako nejaká iná žaba. Tak to poďme dokázať matematickou indukciou. Ako ale vybabrať so začiatočnými prípadmi a skákaním tej istej (vtedy nám indukčný krok až tak ľahko nezbehne)? Napríklad tak, že sa pozrieme na jednu z najkratších postupností skokov, kedy to mohlo nastať a zvolíme si dobré súradnice. Poďme na to.
Nech sú žaby na súradniciach $(k/3^a, l/3^b, m/3^c, n/3^d)$, kde a, b, c, d sú nezáporné celé čísla, k, l, m, n sú racionálne čísla, ktorých čitateľ nie je delitelný 3. Predpokladajme, že a je ostro väčšie ako b, c, d a skáče žaba D.
Vyjadríme novú súradnicu ako

$$\frac{2}{3}(x_a + x_b + x_c) - x_d = \frac{(2k + 2l \cdot 3^{a-b} + 2m \cdot 3^{a-c} - n \cdot 3^{a-d+1})}{3^{a+1}}.$$

Čitateľ je nesúdeliteľný s 3, čiže nové d bude $a + 1$. Teda spomedzi všetkých štyroch žiab má ostro najväčšiu mocninu 3 v menovateli práve D. Teda D nemôže mať rovnakú súradnicu ako iná žaba.
Teraz už vieme dosť na to, aby sme vedeli vyriešiť našu úlohu. Poďme si to dokázať poriadne. Na začiatku sú žaby na súradniciach $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. Zoberme si najmenšiu možnú postupnosť skokov, po ktorej je jedna žaba na chrbte druhej (keď je ich viac, zoberme ľubovoľnú z nich). Zjavne v nej nemohla dvakrát po sebe skočiť tá istá žaba, lebo by sme vedeli cestu skrátiť. BUNV nech skákala ako prvá žaba A. Potom budú súradnice žiab $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$. Ako sme už dokázali, po každom ďalšom skoku bude mať skáčuca žaba ostro

[2] Napríklad $d_2(12345) = 4,\ d_1(4247) = 7,\ d_{10}(812) = 0.$
[3] Bez Ujmy Na Všeobecnosti

najväčšiu mocninu 3 v menovateli. To je ale spor s tým, že v poslednom skoku mala skáčuca žaba rovnakú x-ovú súradnicu s nejakou inou žabou.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *V rovine máme narysovanú kružnicu. Dokážte, že len pomocou euklidovského pravítka*[4] *nie je možné nájsť jej stred.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Hago)

Dohodnime sa, že pod pojmom zobrazovacie médium budeme rozumieť papier (resp. displej), na ktorom si čítate tento vzorák. Na prvý pohľad vidíme, že zobrazovacie médium je rovina (premyslite si prečo).

Možno ste si všimli, že celý svet je o známostiach — o známostiach množín bodov. Na začiatku poznáme len dve — voľajakú rovinu, ktorá tvorí celý náš vesmír, a ešte kružnicu v nej. Počuli sme však, že existuje nejaký stred$O$bod vesmíru (alebo tej kružnice, ja už presne neviem), s ktorým by stálo za to, sa zoznámiť.

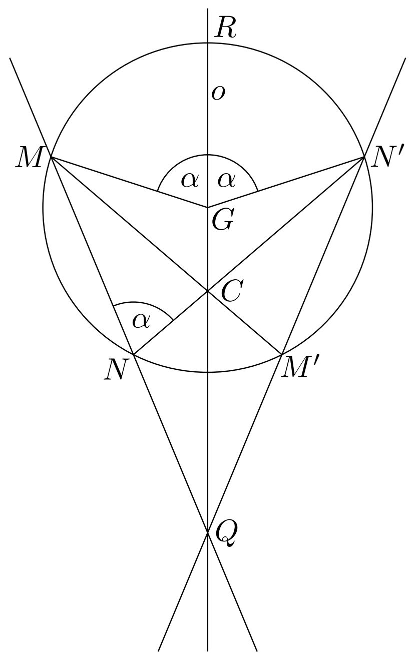
Ako sa vieme zoznamovať s ďalšími množinami bodov? Bez nástrojov iba tak, že sa zoznámime s konkrétnym bodom z množiny, ktorú už poznáme alebo s množinou, ktorá je prienikom dvoch známych množín. Našťastie máme aj nástroj — euklidovské pravítko — vďaka ktorému sa vieme zoznámiť aj s priamkou, prechádzajúcou dvoma známymi bodmi, prípadne jedným známym bodom a dotýkajúcou sa známej kružnice.[5]

Otázka teda znie, či si vieme zvoliť takú spoznávaciu stratégiu, že na konci sa budeme poznať s bodom O, ktorý je stredom našej známej kružnice. Predstavme si, že takú stratégiu poznáme (takto by mal začínať každý správny dôkaz sporom) a chceme ju odkomunikovať svojmu ja z (ne)paralelného vesmíru.

Ako vyzerá taký (ne)paralelný vesmír? Je to tiež rovina niekde v priestore a každý bod tam má svoje ja. Niekde v priestore je ešte čierna diera — to je taký bod, cez ktorý sa dá cestovať do (ne)paralelného vesmíru. Každý bod v našom vesmíre vie nájsť svoje (ne)paralelné ja tak, že bude cestovať po priamke prechádzajúcej ním a čiernou dierou a tam, kde pretne (ne)paralelný vesmír, tam je jeho ja. Všimnime si, že to isté vie spraviť aj bod z (ne)paralelného vesmíru a nájde svoje ja v našom vesmíre. Priamka (resp. kružnica) si vie nájsť svoje ja tak, že každý jej bod si nájde svoje ja. Ako môžu vyzerať tieto množiny bodov?

Ak sa nehráme na také čudné vesmíry, že je v nich čierna diera, tak (ne)paralelným ja priamky bude vždy priamka. Priamka v našom vesmíre a čierna diera spolu určujú rovinu v priestore, ktorá sa pretne s (ne)paralelným vesmírom v priamke. Keď si skúsime pocestovať každým bodom našej priamky cez čiernu dieru, zistíme, že má (ne)paralelné ja práve na tejto priamke. Takisto každý bod z tejto priamky má svoje ja na našej priamke. Táto priamka je teda (ne)paralelným ja našej priamky.

S kružnicami to už také jednoduché nie je. Veď si to skúste sami ak sa vám chce. My si však neskôr ukážeme špeciálny (ne)paralelný vesmír, kde (ne)paralelným ja našej kružnice bude tiež kružnica, ale jej stred nebude (ne)paralelným ja bodu O. Ak teda naše (ne)paralelné ja rieši rovnakú zoznamovaciu úlohu ako my, až na to, že na začiatku pozná (ne)paralelný vesmír a (ne)paralelnú kružnicu, a my mu našepkáme našu stratégiu, tak je kľudne možné, že sa bude postupne zoznamovať s (ne)paralelnými ja množín, s ktorými sme sa postupne zoznamovali my. Na konci ju potom nebude čakať vysnívaný stred kružnice, ale len obyčajné (ne)paralelné ja bodu O. (Spor.)



Poďme si teraz ukázať spomínaný (ne)paralelný vesmír. Predstavme si, že náš vesmír je kolmý na zobrazovacie médium a to tak, že priemer našej kružnice leží na zobrazovacom médiu. Za (ne)paralelný vesmír si zvoľme rovinu, ktorá je tiež kolmá na zobrazovacie médium a nie je rovnobežná s naším vesmírom. Tieto dva vesmíry sa pretínajú so zobrazovacím médiom v nerovnobežných priamkach, ktoré sa pretnú v nejakom bode — označme ho Q a os ich uhla označme o. Všimnime si, ža na tejto osi leží bod G taký, že je rovnako vzdialený od všetkých bodov našej kružnice. Predstavme si teraz guľu, ktorá má stred v bode G a taký polomer, aby sa s naším vesmírom pretla presne v našej kružnici. Táto guľa sa s (ne)paralelným vesmírom pretne takisto v nejakej kružnici. Skúsme nájsť čiernu dieru tak, aby táto kružnica bola (ne)paralelným ja našej kružnice.

Budeme otáčať zobrazovacím médiom okolo osi o, čím vznikne situácia ako na obrázku. Máme tam priesečníky zobrazovacieho média s oboma vesmírmi (priamky) a guľou (kružnica — tá bude stále rovnaká) a kupodivu je os o stále osou uhla. Body M a N ležia na našej kružnici a chceli by sme, aby ich (ne)paralelné protějšky boli body M' a N', čiže jediná možnosť pre umiestnenie čiernej diery je bod C — priesečník uhlopriečok lichobežníka $MNM'N'$. Keďže je to celé také pekné symetrické cez os o, tak sú uhly MGR a $N'GR$ rovnako veľké — označme ich veľkosť α. Uhol MNN' je obvodový ku stredovému uhlu MGN', má teda veľkosť α. Uhly QNC a QGM sú oba susedné

[4] Euklidovské pravítko dokáže rysovať priamky spájajúce dva rôzne body a overovať kolineárnosť bodov, viac na `http://en.wikipedia.org/wiki/Straightedge`.

[5] Na stránke z minulej poznámky pod čiarou sa píše aj niečo ďalšie, ale my nepoznáme inú kružnicu a pravítkom ju asi nespoznáme.

k uhlom s veľkosťou α, takže majú rovnakú veľkosť, z čoho vyplýva, že trojuholníky QNC a QGM sú podobné. Z podobnosti vieme vytrieskať rovnosť $|QC| \cdot |QG| = |QM| \cdot |QN|$. Na pravej strane máme mocnosť bodu Q ku kružnici (vlastne ku guli), čo je konštanta a na ľavej strane je konštantné $|QG|$, čiže aj $|QC|$ musí byť konštanta. Takže bod C je pre všetky otočenia zobrazovacieho média ten istý, môžeme ho teda definovať za čiernu dieru. Ešte by sa patrilo overiť prípad, keď M a N splynú do jedného bodu, ale to už zvládnete urobiť sami. Takisto aj overenie, že (ne)paralelným ja bodu O nie je stred (ne)paralelnej kružnice, už nechám na vás.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	4.	CGsvM SL	15			9	9	9	9	9		45	90
2.	Oravkin Eduard	3.	1SG BA	7		9	8	5	9	9	9		44	89
3.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	3	9	8	9	9	9				44	87
4.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	2	9	8	8	9	9				43	82
5.	Bak Patrik	4.	G Sobrance	7			9	9	9	9	1		37	81
5.	Švarc Radovan	4.	Česká Třebová	11			9	9	9	9	9		45	81
5.	Truc Lam Bui	4.	Gamča BA	13			9	9	9	9	9		45	81
8.	Drotár Pavol	2.	GPoš KE	4	9	6	9	2	9		1		35	80
8.	Konečný Matěj	4.	GJir ČB	7		9	9	9	9		9		45	80
10.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	9		9	3	7		5		33	76
11.	Pišťák Daniel	3.	GChD Praha	6		9		9	9		5		32	67
12.	Mičko Juraj	2.	GPoš KE	4	9		8		9				26	60
13.	Súkeník Peter	3.	GVar ZA	8			6		9	8	1		24	59
14.	Hanzely Slavomír	3.	GJAR PO	8			7	9	0		1		17	55
14.	Mišlanová Kristína	3.	GAlej KE	7		2	9	9	8				28	55
16.	Králik Matej	4.	GJH BA	12			9	1	9		5		24	54
17.	Kluvanec Roman	4.	GPár NR	8			8	2			5		15	53
18.	Hanesz Zoltán	2.	GPoš KE	4	9		9						18	52
19.	Banhegyi Tomas	3.	GJH BA	4	9		9						18	50
20.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2	9		9		9				27	48
20.	Marčeková Katarína	3.	GJH BA	7			9	2	0		5		16	48
22.	Hronkovičová Nina	4.	GKom PE	9			9	1	2	8			20	47
23.	Kopf Daniel	3.	G Slez ČR	8			8	4	9		5		26	45
24.	Semanišinová Žaneta	3.	GAlej KE	7			9	1	6				16	43
25.	Prešinská Kristína	4.	GPár NR	11			6	1	0	1	5		13	42
26.	Bodík Juro	3.	Gamča BA	9			6	1	6	9			22	41
27.	Molčan Samuel	3.	GJAR PO	7			7	1			1		9	40
27.	Onduš Daniel	3.	GAlej KE	7			7	3					10	40
27.	Ralbovský Peter	3.	ŠPMNDG BA	7					1		5		6	40
30.	Choma Matej	3.	Gamča BA	7			7	1	4				12	36
31.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	4	9		2						11	35
31.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3	9		7						16	35
33.	Frankovská Zuzana	3.	GJH BA	7		2	9				5		16	34
33.	Krajčiová Katarína	4.	GAlej KE	10									0	34
33.	Murin Marek	3.	GJH BA	8			7						7	34
36.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	4	7			1					8	33
37.	Halabrin Juraj	3.	GJH BA	7									0	32
38.	Sládek Samuel	3.	GAB NO	4									0	30
39.	Trenčanská Tereza	3.	Gamča BA	6			9	1					10	29
40.	Hollý Dominik	4.	ŠPMNDG BA	8			5	1	8	0			14	28
41.	Liu Zhen Ning Dávid	4.	GJH BA	12									0	27
41.	Nepšinská Silvia	4.	GJH BA	11									0	27

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
41.	Svobodová Zuzana	3.	Frýdlant ČR	4									0	27
44.	Porubsky Michal	3.	GsvCM NR	5			2		9		1		12	26
45.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3									0	25
46.	Genči Jakub	2.	GPoš KE	4									0	22
47.	Kulla Filip	3.	BiG Sučany	8									0	21
48.	Dráček František	4.	GŠkol PB	10			9	9					18	18
48.	Krakovská Ema	4.	Gamča BA	9									0	18
48.	Tóthová Andrea	3.	GJH BA	5		1			0				1	18
48.	Žídek Matěj	3.	Frýdlant ČR	7									0	18
52.	Kurimský Ján	3.	GsvMo	6									0	16
53.	Vančo Šimon	3.	CGsvM SL	4									0	14
54.	Král Adam	3.	GVar ZA	6			6				5		11	11
55.	Jakubíková Lucia	1.	???	1	9						1		10	10
55.	Kudelčíková Martina	3.	GVO ZA	7									0	10
55.	Santrová Michaela	4.	GMH Trstená	11									0	10
58.	Krajmerová Barbora	3.	G Šurany	6									0	8
58.	Petráš Peter Pavel Arthur	3.	ŠPMNDG BA	7									0	8
60.	Krutek Robert	2.	GJGT BB	3									0	5
61.	Martinka Matej	3.	SŠsvFA	4									0	1

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	9	9	9	9		9	3		45	89
1.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	2		9	9	9	8	8	9		44	89
3.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	3			8	9	8	9	9		43	86
4.	Záhorský Ákos	1.	G Šahy	1	9	9	9	9					36	81
5.	Parada Matej	1.	Gamča BA	2		8	9	9		8	9		43	80
6.	Dlugošová Michaela	1.	GKuk PP	2		9	9	9		7	1		35	78
7.	Tódová Tereza	0.	GPár NR	0	4	9	9	7	9	2			38	73
8.	Pulmannová Barbara	1.	Gamča BA	2		9	9	9		8			35	72
9.	Kuťková Sára	1.	Gamča BA	2		9	9	9		8			35	71
10.	Leinwatherová Michaela	1.	GPan BA	2		8	9	9		6	1		33	70
11.	Onduš Peter	1.	GAlej KE	2		8	9	9					26	68
12.	Ivan Peter	1.	GJH BA	2		7	9	9			9		34	66
12.	Pajger Šimon	1.	GVO ZA	2		8	9	9	2	7			35	66
12.	Švihorík Tomáš	1.	GPár NR	2		9	9	9	1		1		29	66
15.	Oravkin Richard	0.	1SG BA	0	9	9	9	7					34	65
16.	Poljovka Jakub	1.	GPár NR	2		9	9	9					27	63
17.	Šuchová Martina	1.	GPár NR	1	7	6	8	9		3			33	61
18.	Belan Pavol	1.	GVar ZA	2		6	9	9					24	60
18.	Častulíková Katarína	1.	1SG BA	1	9	8	9	7					33	60
20.	Sučíková Svetlana	1.	G-BMA UK	2		6	9	9		7			31	58
21.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	2		9	9	7		9			34	56
22.	Homola Marek	1.	GJH BA	2		9	9	9			1		28	55
22.	Pándy Michal	2.	GPoš KE	3			9	9		9			27	55
24.	Smolárová Paulína	1.	ŠPMNDG BA	2		6	8	4	1	4			23	54
25.	Bajnoková Natália	1.	GCSL BA	2		6	8	9					23	53
26.	Mikuláš Matúš	1.	GBST LC	2	9	8	9	9	1				27	52
27.	Remperová Natália	1.	GKom PE	2		6	9	9			1		25	49
28.	Komzala Peter	1.	GJH BA	2		7	9	9			1		26	48
28.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2				9		9			18	48
28.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3			9	9		7			25	48
31.	Dobrovič Adam	2.	GJGT BB	2									0	43

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
31.	Horanský Marek	1.	ŠPMNDG BA	2		6	9	4	3				22	43
33.	Bošková Dagmar	1.	GJH BA	2									0	42
33.	Zajacová Terézia	1.	1SG BA	2		6	9	9			1		25	42
35.	Rajníková Mária	2.	GĽŠ TN	2		8	9	9					26	41
36.	Škotnárová Lucia	2.	G Šurany	3			9	9					18	40
37.	Krett Jakub	2.	GMA BA	3			9	9					18	39
38.	Šimková Jarmila	1.	GPár NR	2		9	9	3					21	38
39.	Rosinská Veronika	2.	G Šurany	2		1	9	9					19	36
40.	Letovanec Ján	1.	???	1	9	6	9	9					33	33
41.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3									0	31
42.	Poláková Nikola	1.	G Šurany	2			9						9	26
43.	Poljak Marián	1.	???	1									0	24
44.	Kecskésová Michaela	3.	GPár NR	3									0	21
45.	Juran Matúš	3.	GJH BA	3									0	20
46.	Čermák Michal	1.	1SG BA	1									0	18
46.	Jakubíková Lucia	1.	???	1			9	9					18	18
46.	Kopfová Lenka	0.	G Slez ČR	0	9		9						18	18
46.	Petrová Simona	3.	ŠPMNDG BA	3			9			1	1		11	18
50.	Sadovská Jana	1.	ŠPMNDG BA	2									0	16
51.	Ďurina Marián	1.	G Šurany	1									0	9
51.	Ferech Matúš	1.	GJH BA	1									0	9
51.	Tóthová Natália	1.	GAlej KE	2			9						9	9
54.	Krutek Robert	2.	GJGT BB	3									0	7
54.	Šimkovičová Natália	1.	GCSL BA	1									0	7
56.	Šimová Mária	2.	EGMT	2									0	4