Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2014/2015

Úloha č. 1: *Viťo bol včera loviť. Ulovil si prirodzené číslo. Je ale niečim špeciálne. Ak ho zapíšeme v sedmičkovej sústave, tak je to trojciferné číslo. Ak ho ale zapíšeme v deviatkovej sústave, získame trojciferné číslo, ktorého cifry sú v opačnom poradí, ako pri jeho zápise v sedmičkovej sústave. Aké číslo si Viťo ulovil? Uveďte jeho zápis v desiatkovej sústave.*

Riešenie: (opravovala Lindtka)

Pre začiatok si musíme uvedomiť čo presne je číselná sústava a aké pravidlá musia čísla v danej sústave spĺňať (ak vieš, čo je to číselná sústava, tak môžeš tento odstavec preskočiť, niektorí však mali s týmto problém). Pre Z-kovú sústavu (napríklad pre $Z = 7$ je to sedmičková sústava) platia nasledujúce pravidlá:

1. Z je prirodzené číslo väčšie ako 1,
2. ak máme v Z-kovej sústave číslo zadané ciframi abc, tak jeho hodnota je $(abc)_Z = a \cdot Z^2 + b \cdot Z^1 + c \cdot Z^0$, alebo napr. $(budova)_Z = b \cdot Z^5 + u \cdot Z^4 + d \cdot Z^3 + o \cdot Z^2 + v \cdot Z^1 + a \cdot Z^0$,
3. čísla zapisujeme ciframi, ktoré sú nezáporné celé čísla menšie ako Z (napr. v sedmičkovej sústave máme cifry od 0 po 6 a v najpoužívanejšej desiatkovej sústave máme cifry od 0 po 9).

Teraz, keď to už všetko vieme, sa pustíme do riešenia.

Vieme, že Viťove číslo v sedmičkovej sústave je trojciferné, preto si ho vieme zapísať ako $(abc)_7$, kde a, b, c patria do množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (lebo sme v sedmičkovej sústave) a a je nenulové (inak by nebolo naše číslo trojciferné).

Zo zadania vieme, že ak zapíšeme Viťove číslo v deviatkovej sústave, tak bude mať tvar $(cba)_9$, kde c, b, a patria do množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (čo určite patria, premyslite si prečo) a c je nenulové.

Nakoľko sa jedná o 2 rôzne spôsoby ako zapísať to isté Viťove číslo tak vieme, že

$$
\begin{aligned}
(abc)_7 &= (cba)_9 \\
a \cdot 7^2 + b \cdot 7^1 + c \cdot 7^0 &= c \cdot 9^2 + b \cdot 9^1 + a \cdot 9^0 \\
49a + 7b + c &= 81c + 9b + a \qquad / - 49a - 7b - c \\
0 &= 80c + 2b - 48a \qquad / : 2 \\
0 &= 40c + b - 24a
\end{aligned}
$$

Ak sa pozrieme na členy $40c$ a $24a$ tak vidíme, že sú deliteľné číslom 8. Takisto aj naša ľavá strana, ktorá je nulová, je tiež deliteľná číslom 8. Preto aj b musí byť deliteľné číslom 8 (premyslite si prečo). My ale vieme, že b je cifra v sedmičkovej sústave a keďže musí spĺňať 3. pravidlo, tak dostávame jedinú možnosť $b = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= 40c + 0 - 24a \qquad / : 8 \\
0 &= 5c - 3a
\end{aligned}
$$

Podobne môžeme vidieť, že $5c$ je deliteľné číslom 5 a ľavá strana je tiež deliteľná číslom 5, preto aj $3a$ musí byť deliteľné číslom 5. Vieme však, že najmenší spoločný deliteľ čísel 3 a 5 je 1, preto 5 nedelí len $3a$ ale aj samotné a. My však vieme, že a je nenulová cifra v sedmičkovej sústave a dostávame jedinú možnosť $a = 5$. Z toho už jednoducho dopočítame, že $c = 3$.

Teraz si vypočítame hodnotu Viťovho čísla v nami najpoužívanejšej desiatkovej sústave:

$(503)_7 = 5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 5 \cdot 49 + 3 \cdot 1 = 248$, $(305)_9 = 3 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9^1 + 5 \cdot 9^0 = 3 \cdot 81 + 5 \cdot 1 = 248$.

Ako môžeme vidieť, Viťo ulovil číslo 248.

__Úloha č. 2:__ *Betka našla vo vrecku na kabáte inšpiráciu. Vymyslela tak nový jazyk - babeliánčinu. Je to jazyk, ktorého všetky slová sú vytvorené iba z dvojpísmenovej abecedy obsahujúcej písmená A a B. Všetky slová babeliánskeho jazyka musia splňať nasledujúce kritériá:*

- *Ak nejaké slovo babeliánskeho jazyka obsahuje písmeno B, aj slovo, ktoré vznikne nahradením tohto B za ABA, je babeliánske.*
- *Ak nejaké babeliánske slovo obsahuje dve A za sebou, aj slovo, ktoré vznikne nahradením týchto dvoch A za jedno B, je babeliánske.*
- *Ak nejaké babeliánske slovo obsahuje dve B za sebou, potom je aj slovo, ktoré vznikne vypustením týchto dvoch B, babeliánske.*

Vieme, že slovo B je babeliánske. O akých slovách, ktoré majú 4 alebo menej písmen, vieme s určitosťou povedať, že ich babeliánčina obsahuje?

Riešenie: (opravovali Veronika a Palo)
Na počiatku bolo slovo B a tri odvodzovacie pravidlá:

$$B \to \quad ABA \tag{1}$$
$$AA \to \quad B \tag{2}$$
$$BB \to \quad \text{(nič)} \tag{3}$$

Treba si uvedomiť, že šípky v pravidlách majú svoj význam. Pravidlá sa dajú použiť iba jedným smerom. Napríklad z B nemôžeme spraviť AA.
Ako prvé si môžeme všimnúť, že slovo B má párny počet písmen A (konkrétne nula). A použitím každého z pravidiel (1), (2), (3) buď pridáme dve písmená A, odoberieme 2 písmená A, alebo počet písmen A nezmeníme. Z toho vyplýva, že každé babeliánske slovo má párny počet písmen A. Teraz sa musíme o každom slove so štyrmi a menej písmenami a s párnym počtom písmen A presvedčiť, že do babeliánčiny patrí, alebo dokázať, že tam nepatrí. Našťastie tam všetky také patria. Aby sme to ukázali, musíme pre každé z nich nájsť spôsob, ako ho odvodiť zo slova B pomocou našich pravidiel. To sa dá spraviť viacerými spôsobmi. Ukážme si jeden z nich: vieme skonštruovať slová zložené len z:

- dvoch A: $B \overset{(1)}{\to} ABA \overset{(1)}{\to} AABAA \overset{(2)}{\to} AABB \overset{(3)}{\to} AA$
- štyroch A: $B \overset{(1)}{\to} ABA \overset{(1)}{\to} AABAA \overset{(1)}{\to} AAABAAA \overset{(2)}{\to} AAABBA \overset{(3)}{\to} AAAA$
- šiestich A: $B \overset{(1)}{\to} ABA \overset{(1)}{\to} AABAA \overset{(1)}{\to} AAABAAA \overset{(1)}{\to} AAAABAAAA \overset{(2)}{\to} AAAABBAA \overset{(3)}{\to} AAAAAA$
- ôsmych A: $B \overset{(1)}{\to} ABA \overset{(1)}{\to} AABAA \overset{(1)}{\to} AAABAAA \overset{(1)}{\to} AAAABAAAA \overset{(1)}{\to} AAAAABAAAAA \overset{(2)}{\to} AAAAABBAAA \overset{(3)}{\to} AAAAAAAA$

Ako sme si týmto pomohli? Teraz môžeme z týchto 4 slov zložených iba z písmen A pomocou pravidla (2) odvodiť všetky slová so štyrmi a menej písmenami, ktoré obsahujú aj písmená B. Postup, ktorým to budeme robiť si najlepšie ukážeme na príklade. Skúsme skonštruovať slovo $ABAB$. Toto slovo má dve A a dve B. Aby sme dostali dve B potrebujeme zmeniť dve dvojice písmen A. Vezmime si teda ako základ slovo so šiestimi A: $AAAAAA \overset{(2)}{\to} ABAAA \overset{(2)}{\to} ABAB$.
Všeobecne, ak má slovo i (musí byť párne) písmen A a j písmen B, tak si ako základ vezmime slovo s $i+2j$ písmen A a j krát použime pravidlo (2), aby sme na vhodných miestach dostali B (vyskúšajte si to). Ľahko sa dá vidieť, že to vždy vedie k požadovanému výsledku.
Poznámka: Obdobnou metódou sa dá ukázať, že babeliánština určite obsahuje všetky slová s párnym počtom písmen A.

__Úloha č. 3:__ *Hopko išiel na túru na Chopok. Z výšky videl lúku, na ktorej bolo sedem stromov. Lúka má tvar pravidelného šesťuholníka so stranou dĺžky 100m. Ukážte, že vieme nájsť také dva stromy*[1]*, ktorých vzdialenosť je najviac 100m.*

Riešenie: (opravovala Betka)
Ako prvé si šikovne rozdelíme náš pravidelný šesťuholník na šesť rovnostranných trojuholníkov. Potom s istotou vieme povedať, že v jednom z našich trojuholníkov sa musia nachádzať dva stromy. Po chvíľke premýšľania je určite všetkým jasné prečo to tak musí byť, a keby nie, stačí si niečo prečítať o Dirichletovom princípe. Načo je nám to

[1] predpokladajte, že stromy sú body

však dobré? Nuž ak máme dva stromy v rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky 100 m tak najväčšia možná vzdialenosť medzi nimi je tých sto metrov (premyslite si prečo). A dôkaz je hotový.

Úloha č. 4: *Ketrin našla v nemeckom slovníku slovíčko trinken a jeden algebrogram. Ako správna matematička si tento algebrogram zovšeobecnila. Nájdite všetky n, pre ktoré má algebrogram $n \cdot HAUS = DORF$ riešenie. Úlohou v algebrograme je doplniť za rôzne písmená rôzne cifry (a za rovnaké písmená doplniť rovnaké cifry) tak, aby bola splnená daná rovnica. Navyše, čísla $HAUS$ a $DORF$ sa nesmú začínať na číslicu 0.*

Riešenie: (opravovali JeFo a Murko)

Riešenie tohoto príkladu je najmä o „hraní sa“ s číslami. V zásade neexistuje presný návod, ako nájsť správne riešenia, treba sa s tým pohrať a po chvíľke nám riešenie samo vypadne. Hlavný problém robilo nie úplne jasné formulovanie zadania, takže si ho najskôr ujasníme. Číslo n nie je súčasťou algebrogramu a teda môže mať rovnakú hodnotu ako niektoré z čísel, ktoré dosadíme za H, A U, S, D, O, R, F. Zároveň je n prirodzené číslo.

Ešte pred tým, ako začneme skúšať, si trochu zúžime okruh n ktoré má zmysel skúšať. Keďže $HAUS$ aj $DORF$ sú štvorciferné čísla, tak je jasné, že $n < 10$. Zároveň sú $HAUS$ a $DORF$ rôzne čísla, preto $n \neq 1$. Rovnako nemá zmysel $n = 0$.

Teraz nám už len ostáva skúšať rozumne skúšať čísla a za chvíľku nám vypadne výsledok. Kombinácii čísiel môže byť viacero, tu uvedieme len jednu možnú.

n	$HAUS$	$DORF$
2	1345	2690
3	1089	3267
4	1059	4236
5	1278	6390
6	1043	6258
7	1052	7364
8	1037	8296
9	1042	9378

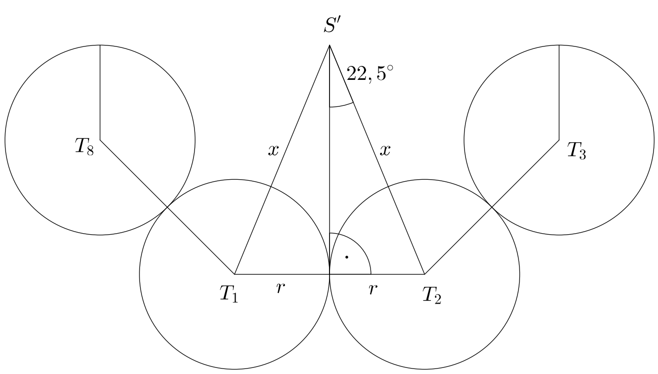
Všetky n pre ktoré má algebrogram riešenie sú 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

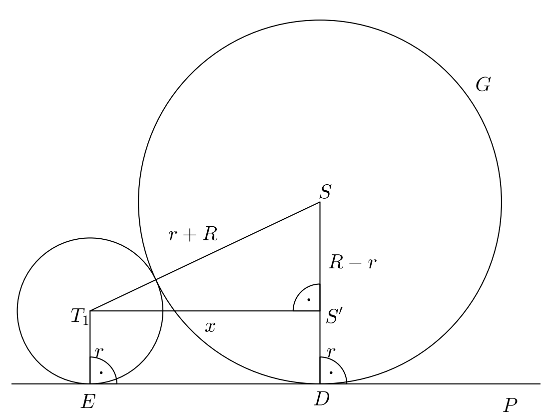
Úloha č. 5: *Marek letel ponad veľký mrak na lietajúcom koberci. Veľký mrak má tvar gule G s polomerom R a dotýka sa koberca (roviny P). Okrem toho sa v poblízku nachádza aj osem mráčikov (malých gúľ s navzájom rovnakým polomerom r). Každý mráčik sa dotýka koberca, veľkého mraku a dvoch susedných mráčikov. Maráčiky takto vytvárajú „golier“ okolo veľkého mraku. Vyjadrite r pomocou R.*

Riešenie: (opravovali Jožo a Aňa)

Pri priestorových úlohách je dôležité vedieť si situáciu správne predstaviť. V tejto úlohe máme veľa informácií o tom, čo sa čoho dotýka, preto bude jednoduchšie začať jednotlivé informácie rozoberať postupne. Najskôr si však označme stred veľkej gule ako S a stredy malý gúľ postupne $T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_8$.

Najprv sa pozrime, ako vyzerajú dotyky malých gúľ (obr. 1). Predstavme si rovinu P ako vodorovnú a na nej položené malé gule (ako koberec s malými mráčikmi). Potom vzájomné dotyky malých gúľ budú v rovnakej výške (vzdialenosti od roviny) – vo výške r spolu aj s ich stredmi (rozmyslite si to). Preto, keď sa pozrieme na malé gule zvrchu (presnejšie povedané spravíme rez rovinou, ktorá obsahuje stredy malých gúľ), uvidíme ich ako dotýkajúce sa kružnice s polomerom r. Tie nám vytvoria pravidelný osemuholník (rozmyslite si prečo), ktorého stred si označíme S'. Bod S' spolu so stredmi dvoch susedných malých gúľ $T_1,\ T_2$ (rovnako aj iné susedné malé gule) tvorí rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky $2r$ a uhlom oproti základni 45°. V ňom si vieme vypočítať vzdialenosť





stredu malej gule T_1 od bodu S', ktorú si označíme ako x.

$$x = |T_1S'| = \frac{r}{\sin 22,5°}.$$

Ďalej rozoberme dotyk jednej malej gule s veľkou (obr. 2). Pozrime sa na gule zboku (čiže na rez rovinou kolmou na rovinu P prechádzajúcou bodmi S a T_1). Spojnica stredov malej a veľkej gule T_1S prechádza bodom dotyku gúľ, preto má dĺžku $R + r$. Zišlo by sa nám spojiť tento obrázok s predchádzajúcim. Označme si body dotyku veľkej a malej gule s podlahou postupne D, E. Ak sa na tento obrázok pozrieme zhora, tak úsečky SD a T_1E uvidíme ako body, ktoré máme na obrázku 1 označené ako S' a T_1. Ich vzdialenosť sme si však už vypočítali – je to naše x. V obrázku 2 je teda vzdialenosť úsečiek SD a T_1E rovná x. Túto vzdialenosť si v obrázku vyznačíme ako kolmicu na úsečku SD cez bod T_1. Päta tejto kolmice je bod S' (čo je rovnaký bod S' ako v obr. 1). Dostali sme tak pravouhlý trojuholník $T_1S'S$, v ktorom si x vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety:

$$x = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Vyjadrili sme si vzdialenosť x dvoma spôsobmi. Teraz ich môžeme dať do rovnosti a z nej vyjadriť r:

$$\frac{r}{\sin 22,5°} = 2\sqrt{Rr}$$

$$r = 4R\sin^2 22,5°.$$

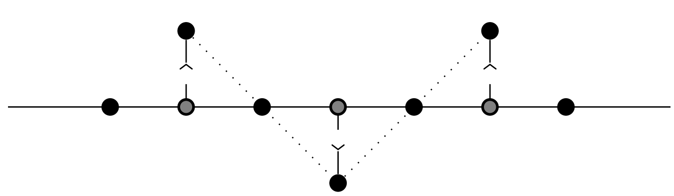
Tento tvar nám samozrejme stačí, ale môžeme sa ešte zbaviť sínusu, ak využijeme vzťah pre sínus polovičného uhla $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ a hodnotu $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$r = 4R\frac{1-\cos 45°}{2} = 2R\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = (2-\sqrt{2})R$$

Postupne sme rozobrali všetky informácie zo zadania a vyjadrili sme r pomocou R ako $r = (2-\sqrt{2})R$. Pozornému čitateľovi iste neuniklo, že sme neukázali, že požadované rozmiestnenie gúľ naozaj existuje. Ak sa však nad tým zamyslíme, zistíme, že je celkom ľahké ho nájsť, respektíve predstaviť si ho.

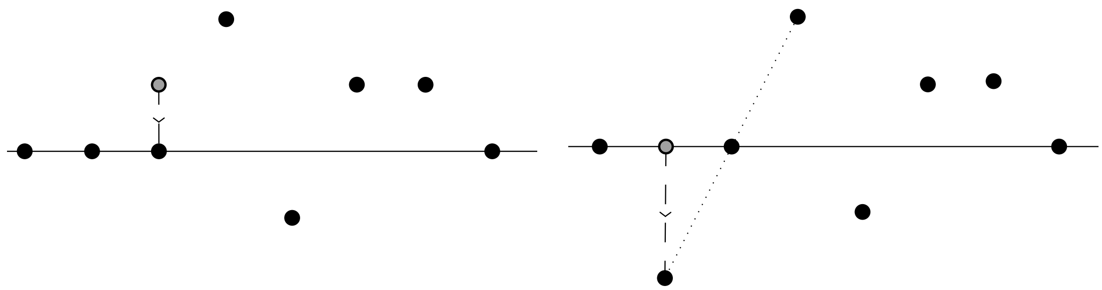
Úloha č. 6: *Na bočnej čiare ihriska sme mali rozostavaných n kuželiek, každý meter jednu. Potom prišiel tréner a každú kuželku okrem prvej a poslednej vychýlil kolmým smerom od čiary o kladnú vzdialenosť, buď von z ihriska, alebo do ihriska. Hráč sa snaží zarovnať všetky kuželky na čiaru ihriska. Môže však robiť len nasledujúci krok: vyberie si nejakú kuželku okrem prvej a poslednej a presunie ju presne do stredu medzi jej susedné dve kuželky. Pre ktoré n existuje také počiatočné rozostavenie kuželiek, že ich vie hráč všetky po konečnom počte krokov zarovnať na čiaru[2]?*

Riešenie: (opravovali Hiphop a Luxusko)
Budeme riešiť úlohu naopak. Začneme vždy s n kuželkami na čiare a každú môžeme ľubovoľne posunúť, ak leží presne v strede medzi susedmi. Chceme dosiahnuť rozostavenie, v ktorom sú na čiare len krajné, neposunuteľné kuželky. Rozmyslime si, že existencia riešenia jedným smerom dáva aj druhý – príslušné opačné posuny urobíme v obrátenom poradí (a rovnako to je aj s neexistenciou riešenia). Takto máme pevný začiatok a môžeme sa zamerať na postupnosť krokov.
Poďme sa nazačiatok pozrieť na prípady, keď je n malé. V prípadoch $n \leq 2$ máme všetko hotové zadarmo. Pre 3 kuželky dosiahneme náš cieľ vždy jediným možným posunom bezohľadu na vzdialenosť. So 4 kuželkami si nepomôžeme. Zjavne vonkajšími kuželkami hýbať nemôžeme. Ale ak pohneme jednou z vnútorných, druhá už určite nebude ležať v strede medzi krajnou a posunutou – preto 4 kuželky určite nevedú k riešeniu. Do podobnej situácie sa dostaneme pri 5 kuželkách posunom strednej. Preto pri 5 najprv pohneme druhou a štvrtou kuželkou. Ak ich posunieme zrkadlovo tak môžeme pohnúť aj strednou – a hotovo. Túto fintu vieme rozšíriť na ľubovoľné nepárne n. Na všetkých párnych pozíciach posunieme kuželky na striedačku hore/dole o rovnakú vzdialenosť tak, aby nepárne boli stále v strede medzi susedmi. Následne môžme ľubovoľne poposúvať aj vnútorné kuželky na



[2]kuželky už nemusia byť vzdialené meter od seba

nepárnych pozíciach.
Čo však z párnymi $n > 4$? Nedajú sa? Na prvý pohľad sa môže zdať že pohnúť kuželkou dvakrát sa neoplatí. Toto však nie je pravda – nepredpokladajme niečo čo si nevieme poriadne odôvodniť. Použijeme práve trik v ktorom jednu kuželku použijeme na rôznych pozíciach. Tiež využijeme, že pre nepárny počet kuželiek sa úloha dá vyriešiť, a kuželky na párnych pozíciách môžu byť rozostavené ľubovoľne (teda máme akúsi voľnosť). Preto si prvú kuželku odložme bokom. Zvyšných $n-1$ kuželiek vieme rozostaviť ako minule, lebo $n-1$ je nepárne. Využijme ale spomínanú voľnosť: štvrtú kuželku posunieme 2-krát ďalej tým istým smerom ako tretiu. Následne môžeme tretiu kuželku pohnúť spať na čiaru. To nám zabezpečí, že vieme posunúť druhú kuželku tak, aby sme ešte raz mohli tretiu pohnúť mimo čiary.
Hotovo! Všetko okrem $n = 4$ vieme poposúvať. Preto pre každé prirodzené n okrem 4 existuje počiatočné rozostavenie kuželiek také, že hráč ich vie zaronať na čiaru.

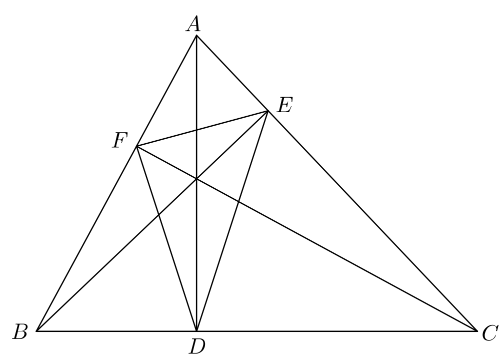


Úloha č. 7: *Baša chová na záhrade švába. Ten jej na oplátku kreslí rôzne obrázky. Naposledy nakreslil trojuholník ABC. V ostrouhlom trojuholníku ABC ležia body D, E, F na stranách BC, CA, AB (v uvedenom poradí). Vieme, že platia nasledovné rovnosti:*

$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle BFD|$$
$$|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC|$$
$$|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle FEA|$$

Určte všetky možné veľkosti uhla ADB.

Riešenie: (opravoval Vodka)
Ukážeme si niekoľko riešení. Začneme takým klasickým.
Označme si (strategicky) uhly $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC| = \alpha$, $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle FEA| = \beta$, $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle BFD| = \gamma$. Z toho, že súčet uhlov v trohuholníkoch AEF, BDF, CDE, ABC je $180°$ ľahko dostaneme $2(\alpha+\beta+\gamma) = 360°$, a teda $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Trojuholník AFE má 2 uhly veľkostí β, γ, a preto tretí $|\sphericalangle FAE| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$. Obdobne dostaneme $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Teraz vidno, prečo sme tie uhly označili tak, ako sme ich označili. Už máme teda v obrázku označených veľa (rovnakých) uhlov a určite si všimneme, že $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ABC|$ a teda štvoruholník $ABDE$ je tetivový (súčet protiľahlých uhlov je $180°$). Úplne analogicky sú tetivové aj štvoruholníky $AFDC$ a $BFEC$.



Mať v geometrii veľa tetivových štvrouholníkov je dobré, lebo vzniká ešte viac rovnakých uhlov. Napríklad $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle FCE| = |\sphericalangle FCA| = |\sphericalangle FDA|$. Pričom sme postupne využili tetivovosť štvoruholníkov $ABDE$, $BFEC$, $AFDC$, presnejšie obvodové uhly nad tetivami AE, FE, AF.
No ale my máme, že $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ADE| + |\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle ADF| + |\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle ADB|$, z čoho hneď vidno, že $|\sphericalangle ADB| = 90°$, čo je jediná možnosť veľkosti tohto uhla.
Keď sa nad tým zamyslíme, dostávame, že D, E, F musia byť päty výšok (nieženy sme to potrebovali, keďže úlohu sme už vyriešili) a to sa využije v druhom riešení.

Iné riešenie:
Rovnako ako minule dostaneme, že tie 3 štvoruholníky sú tetivové. Tých, čo už videli nejaké takéto obrázky, hneď napadne, že ak D, E, F sú päty výšok, tak to platí (tie štvoruholníky sú naozaj tetivové), a preto jedna z možných veľkostí uhla ABD je $90°$. Prečo však nemôže byť iná? No nech D, E, F sú naozaj päty výšok. Predpokladajme, že existujú iné 3 body D', E', F' také, že tie vlastnosti platia. Zrejme $DE \parallel D'E'$, $DF \parallel D'F'$, $FE \parallel F'E'$. Ak si ich skúsime nakresliť, tak sa nám to nepodarí. Lebo ak D' je BUNV na úsečke BD, tak E' musí byť na AE (kvôli

rovnobežnosti DE a $D'E'$. Bod F' je potom na AF a D' na CD. Z toho je ale jasné, že $D \equiv D'$, a tak isto $E \equiv E'$, $F \equiv F'$. Záver je taký, že iná trojica takých bodov neexistuje.

Iné riešenie:
Najkratšie riešenie na záver. Zabudneme na všetko, čo sme zistili v prvých dvoch riešeniach, len sa pozrieme na to, že AB je zrejme os vonkajšieho uhla pri vrchole F v trojuholníku EDF. Tak isto aj AC je os vonkajšieho uhla pri vrchole E. Bod A je priesečník osí vonkajších uhlov, a preto to je stred pripísanej kružnice k strane FE. Avšak, ten leží aj na osi uhla EDF, preto je DA os tohto uhla.Z toho ako v závere prvého riešenia ľahko odvodíme $|\sphericalangle ADB| = 90°$. Vidíme, že úloha sa dala veľmi jednoducho vyriešiť a nechcelo skoro vôbec nič počítať, len sa na to správne pozrieť.

Úloha č. 8: *Vodka sa hral s atómami vodíka. Keď ich dal do vody, neklesli na dno. Aj niektoré čísla sú neklesajúce – sú to také prirodzené čísla, ktorých cifry sú v neklesajúcom poradí (v smere zľava doprava). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje neklesajúce číslo, ktoré má n cifier a je druhou mocninou celého čísla.*

Riešenie: (opravoval Hago)
Neviem ako vy, ale ja, keď som riešil tento príklad, tak som si vypísal fakt veľa štvorcov a snažil sa niečo si všimnúť o tých neklesajúcich. Tých ale bolo viac, ako som si sprvoti myslel, a tak som sa časom snažil zamerať na také, ktoré boli čo najmenšie n-ciferné.
Úplne najmenšie n-ciferné neklesajúce číslo je číslo pozostávajúce z n jednotiek — označme ho J_n. To by bolo super keby J_n bolo štvorcom. Žiaľ, po chvíli šialeného ťukania po tlačítkach jednotky a odmocniny na kalkulačke zistíme, že to tak nie je. Môžeme si však všimnúť, že pre párne n je odmocnina z J_n číslo, ktoré má pred desatinnou čiarkou samé trojky. To znamená, že keď umocníme $3 \cdot J_k + 1$ dostaneme štvorec, ktorý by teoreticky mohol byť neklesajúci. Po ďalšom šialenom ťukaní do kalkulačky to vyzerá tak, že aj vždy je. Poďme to teda ukázať:

$$(3 \cdot J_k + 1)^2 = 9J_k \cdot J_k + 6J_k + 1 = (10^k - 1) \cdot J_k + 6J_k + 1 = 10^k J_k + 5J_k + 1 = J_{2k} + 4J_k + 1.$$

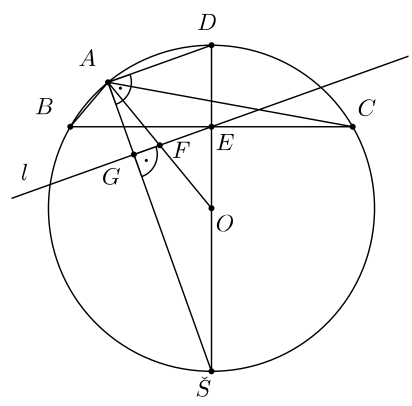
Ako vyzerá toto číslo? Spolu má $2k$ cifier — na začiatku má k jednotiek, potom $k-1$ pätiek a jeho posledná cifra je šesť. Naozaj je teda neklesajúce. Za k môžeme dosadiť ľubovoľné prirodzené číslo a bude to fungovať, čiže už sme vybavili všetky n tvaru $2k$ — všetky párne. Čo s nepárnymi? Všimnime si, že náš výsledný štvorec je vždy deliteľný štvorkou. Takže, keď ho ňou vydelíme, tak dostaneme takisto štvorec a po pár ťuknutiach do kalkulačky to vyzerá tak, že má nepárny počet cifier a je neklesajúci. Podporme to výpočtami:

$$\frac{J_{2k} + 4J_k + 1}{4} = \frac{100 \cdot J_{2k-2} + 4J_k + 12}{4} = 25 \cdot J_{2k-2} + J_k + 3 = 10 \cdot 2J_{2k-2} + 5J_{2k-2} + J_k + 3 = 2J_{2k-1} + 5J_{2k-2} + J_k + 1.$$

Toto číslo je $2k-1$ ciferné — prvá cifra je dva, za ňou nasleduje $k-2$ sedmičiek, potom $k-1$ osmičiek a na konci je deviatka. Vyzerá to neklesajúco. Toto pekne funguje, až na $k = 1$. Vtedy dostaneme číslo 4, ktoré je našťastie tiež neklesajúce. Tým pádom sme vybavili aj všetky nepárne čísla.

Úloha č. 9: *Ľudka je vždy kľudná, keď ráta geometriu. Napríklad takúto. Bod O je stredom opísanej kružnice tupouhlého trojuholníka ABC. Priamka l je kolmá na os uhla BAC a prechádza stredom strany BC. Navyše platí, že stred úsečky AO leží na priamke l. Určte $|\sphericalangle BAC|$.*

Riešenie: (opravovala Ľudka)
Stredy úsečiek BC a AO označme v poradí ako E, F. Keďže sa spomína stred strany trojuholníka a os protiľahlého uhla, nemuselo by byť na škodu nakresliť si aj os tejto strany.
Vieme totiž, že os strany BC a os uhla BAC sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Označme ich priesečník ako $\check{S}$. Priesečník priamky l s priamkou $A\check{S}$ (os uhla BAC) označme ako G (obr). Pekne vidieť, že tupý uhol musí byť pri vrchole A, inak by priamka l nepretínala úsečku AO.



Niet pochybností, že uhol $\check{S}AD$ je pravý (Tálesova kružnica). Trojuholníky $\check{S}AD$ a $\check{S}GE$ majú rovnaké uhly pri vrholoch A a G (obe sú pravé). Navyše tieto trojuholníky zdieľajú rovnaký uhol pri vrchole $\check{S}$. Teda trojuholníky $\check{S}AD$ a $\check{S}GE$ sú podobné a preto sa zhodujú aj v uhloch pri vrcholoch D a E. Do očí nám bije podobnosť trojuholníkov OAD a OFE, ktorú určujú dva zhodné uhly v týchto trojuholníkoch pri už spomínaných vrcholoch D a E a spoločný uhol pri vrchole O. Z tejto podobnosti sa dozvieme, že bod E je stred úsečky OD. Pramení to z poznatku, že bod F je stred úsečky OA.
Stačí nám už len zistiť veľkosť uhla $\check{S}BC$. Naozaj? A to už prečo? Prezradím Ti len toľko, že súvislosť s veľkosťou uhla BAC sme už mlčky využili a zvyšok nechám na Teba. Ušetríme si kus roboty, keď si uvedomíme, že O je ťažisko trojuholníka $\check{S}BC$ (bod O leží v dvoch tretinách ťažnice $\check{S}E$ od vrchola $\check{S}$). Ako iste všetci vieme, ťažisko so stredom opísanej kružnice (a všeličím ďalším) splynie iba v rovnostrannom trojuholníku. Preto $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle \check{S}BC| = 120°$.

Bez pomoci už ľahko ukážeš aj to, že priamka l má dané vlastnosti v každom trojuholníku, kde $|\sphericalangle BAC| = 120°$.

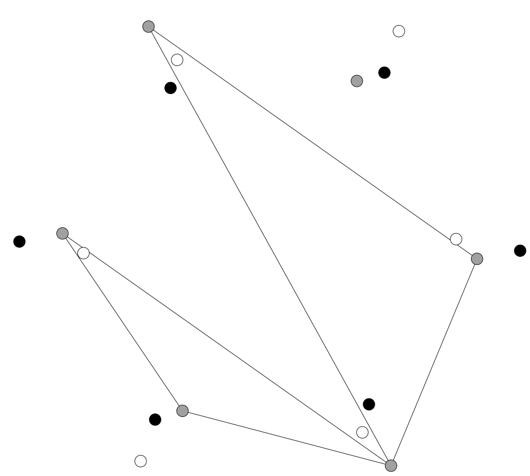
__Úloha č. 10:__ *Miro navštívil mesto miest, Rím. V Koloseu rastú kvietky. Každý kvietok je buď snežienka, ruža, alebo tulipán. Keď ich Miro začal skúmať, všimol si nasledovné vlastnosti:*

- *Žiadna trojica kvietkov neleží na priamke.*
- *Vo vnútri každého trojuholníka s vrcholmi v snežienkach leží aspoň jedna ruža.*
- *Vo vútri každého trojuholníka s vrcholmi v ružiach leží aspoň jeden tulipán.*
- *Vo vnútri každého trojuholníka s vrcholmi v tulipánoch leží aspoň jedna snežienka.*

a) *Nájdite čo najmenšie prirodzené číslo N, aby vždy platilo: ak rastie n kvietkov v Koloseu, ktoré spĺňajú Mirove vlastnosti, tak potom: $N \geq n$.*

b) *Nájdite rozmiestnenie N kvietkov, ktoré splňuje Mirove vlastnosti (stručne vysveltite, prečo vaše rozmiestnenie spĺňa tieto vlastnosti).*

Riešenie: (opravoval Mišo)
Pri riešení budeme používať výraz "konvexný obal", takže si najprv povedzme, čo to je. Je to najmenšia konvexná množina obsahujúca to, čoho obalom je. V našom prípade to bude n-uholník, ktorého vrcholy majú tú vlastnosť, že pre každý existuje priamka ktorá ním prechádza a delí rovinu na dve časti, pričom iba v jednej z nich sú ostatné body. Dalo by sa povedať, že vrcholy tohto n-uholníka sú krajné, každý vo svojom smere.
Bez ujmy na všeobecnosti môžeme povedať, že žiadnych kvietkov nie je viac ako tulipánov. Zoberme si konvexný obal tulipánov a počet vrcholov tohto n-uholníka označme t. Tento t-uholník vieme rozdeliť na $t - 2$ trojuholníkov. Napríklad tak, že z jedného vrchola spravíme úsečky do ostatných. Spolu so stranami t-holníka vytvárajú $t - 2$ trojuholníkov, ktoré sa neprekrývajú, takže každý musí mať vnútri svoju kvetinu.
V každom trojuholníku musí byť jedna snežienka. Ak sú vnútri t-uholníka ešte nejaké tulipány ($t > 2$), trojuholníky v ktorých sú vieme ešte rozdeliť na 3 časti, za každý tulipán vo vnútri nám tak pribudnú ešte dve snežienky. Keďže tulipánov je viac ako snežienok, vo vnútri môžu byť maximálne 2 tulipány.
Ak sú vnútri dva tulipány, tak snežienok je rovnako ako tulipánov a všetky snežienky sú vnútri t-uholníka. Navyše v ňom môžu byť najviac 4 ruže (inak by sa dali rozdeliť na viac ako 2 trojuholníky) a preto tam bude najviac 6 snežienok. Celkový počet tulipánov bude najviac 6.
Ak je vnútri 1 tulipán, snežienok bude v obale aspoň toľko, koľko je tulipánov mínus 1. Môžu tam byť najviac 3 ruže a 5 snežienok (Všetko je v konvexnom obale, čiže krajné body nemôžu vyplniť trojuholníky). Celkový počet tulipánov je znovu najviac 6.
Ak sú všetky tulipány na okraji ich konvexného obalu, vnútri môžu byť maximálne 2 ruže. To nám dáva najviac 4 snežienky, takže tulipánov je znovu najviac 6.
Zistili sme, že kvetín jedného druhu je najviac 6. Hľadané N je preto maximálne 18. Toto číslo už je konečné, lebo vieme nájsť vyhovujúce rozostavenie 18 kvetín.
Stačí už len nájsť rozmiestnenie 18 kvetín na lúke spĺňajúce podmienky za zadania. Riešení je viacero, na obrázku je jedno z nich. Nakoľko je to celé symetrické, ľahko vieme ukázať vlastnosti zo zadania (ponechávame na čitateľa). Snežienky sú biele, tulipány sivé a ruže čierne body.



Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Oravkin Eduard	3.	1SG BA	7		9	6	9	9	9			42	131
2.	Batmendijn Eduard	4.	CGsvM SL	15			9	9	9		9		36	126
3.	Konečný Matěj	4.	GJir ČB	7		9	9	8	9	9			44	124
4.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	2	9	9	4	9	9				40	122
5.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	3	8	9	6	9	9				41	120
6.	Drotár Pavol	2.	GPoš KE	4	9	9	5	9	7				39	119
7.	Švarc Radovan	4.	Česká Třebová	11			9	9	9	9			36	117
7.	Truc Lam Bui	4.	Gamča BA	13			9	9	9	9			36	117
9.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	9	9	5	9	6				38	114
10.	Hanzely Slavomír	3.	GJAR PO	8			9	9	7	9	6		40	95
11.	Pišťák Daniel	3.	GChD Praha	6		9	4	9					22	89
12.	Kluvanec Roman	4.	GPár NR	8			6	6	8	9	1		30	83
13.	Bak Patrik	4.	G Sobrance	7									0	81
13.	Súkeník Peter	3.	GVar ZA	8			6	9	7				22	81
15.	Parada Matej	1.	Gamča BA	2	9	9	5	5	7				35	80
16.	Králik Matej	4.	GJH BA	12			6	9	9				24	78
16.	Mičko Juraj	2.	GPoš KE	4	9	9							18	78
18.	Marčeková Katarína	3.	GJH BA	7		9	5	9	5				28	76
19.	Hronkovičová Nina	4.	GKom PE	9			9		9	9			27	74
19.	Kopf Daniel	3.	G Slez ČR	8			9	9	9	2			29	74
21.	Mišlanová Kristína	3.	GAlej KE	7		9	5	4					18	73
22.	Banhegyi Tomas	3.	GJH BA	4	9	9		4					22	72
23.	Molčan Samuel	3.	GJAR PO	7		9	5	8	7				29	69
24.	Bodík Juro	3.	Gamča BA	9			9	9	7				25	66
24.	Frankovská Zuzana	3.	GJH BA	7		9	5	9	8		1		32	66
26.	Halabrin Juraj	3.	GJH BA	7		9	6	9	9				33	65
26.	Prešinská Kristína	4.	GPár NR	11			6	9	7	1	0		23	65
28.	Semanišinová Žaneta	3.	GAlej KE	7		9	5	4	2				20	63
29.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2		9	4						13	61
30.	Onduš Daniel	3.	GAlej KE	7		9	5	4	2				20	60
31.	Hanesz Zoltán	2.	GPoš KE	4									0	52
32.	Choma Matej	3.	Gamča BA	7		8	5						13	49
33.	Murin Marek	3.	GJH BA	8			5		9				14	48
34.	Ralbovský Peter	3.	ŠPMNDG BA	7									0	40
35.	Svobodová Zuzana	3.	Frýdlant ČR	4	9			1		1			11	38
35.	Trenčanská Tereza	3.	Gamča BA	6		9							9	38
37.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	4									0	35
37.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3									0	35
37.	Porubsky Michal	3.	GsvCM NR	5			5	4					9	35
40.	Krajčiová Katarína	4.	GAlej KE	10									0	34
41.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	4									0	33
41.	Tóthová Andrea	3.	GJH BA	5		9	4	1		1			15	33
43.	Sládek Samuel	3.	GAB NO	4									0	30
44.	Hollý Dominik	4.	ŠPMNDG BA	8									0	28
45.	Liu Zhen Ning Dávid	4.	GJH BA	12									0	27
45.	Nepšinská Silvia	4.	GJH BA	11									0	27
47.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3									0	25
47.	Krajmerová Barbora	3.	G Šurany	6		9	6	1			1		17	25
49.	Genči Jakub	2.	GPoš KE	4									0	22
50.	Kulla Filip	3.	BiG Sučany	8									0	21

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
51.	Dráček František	4.	GŠkol PB	10									0	18
51.	Krakovská Ema	4.	Gamča BA	9									0	18
51.	Žídek Matěj	3.	Frýdlant ČR	7									0	18
54.	Kurimský Ján	3.	GsvMo	6									0	16
55.	Vančo Šimon	3.	CGsvM SL	4									0	14
56.	Král Adam	3.	GVar ZA	6									0	11
57.	Jakubíková Lucia	1.	???	1									0	10
57.	Kudelčíková Martina	3.	GVO ZA	7									0	10
57.	Santrová Michaela	4.	GMH Trstená	11									0	10
60.	Petráš Peter Pavel Arthur	3.	ŠPMNDG BA	7									0	8
61.	Krutek Robert	2.	GJGT BB	3									0	5
62.	Martinka Matej	3.	SŠsvFA	4									0	1

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	9		9	9	9	5	9		45	134
1.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9	4	9		45	134
3.	Záhorský Ákos	1.	G Šahy	1	9	9	9			6	9		42	123
4.	Parada Matej	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9	5	5		41	121
5.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	3			9	8	9	6	9		41	119
6.	Dlugošová Michaela	1.	GKuk PP	2		1	8	9	9	5	4		35	113
7.	Onduš Peter	1.	GAlej KE	2		6	9	9	9		9		42	110
8.	Oravkin Richard	0.	1SG BA	0	8	9	9	9	9				44	109
9.	Kuťková Sára	1.	Gamča BA	2		9	7	9	7		4		36	107
10.	Pajger Šimon	1.	GVO ZA	2		6	8	9	9	6	4		38	105
11.	Tódová Tereza	0.	GPár NR	0	0	9	9	7		5			30	103
12.	Švihorík Tomáš	1.	GPár NR	2		2	9	9	9	5			34	100
13.	Častulíková Katarína	1.	1SG BA	1	9	2	9	9	9				38	98
14.	Poljovka Jakub	1.	GPár NR	2		9	9	6	6		4		34	97
15.	Belan Pavol	1.	GVar ZA	2		9	8	9	4	5			35	96
16.	Ivan Peter	1.	GJH BA	2		9	8	5		5	1		28	94
16.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	2		6	9	9		5	9		38	94
18.	Pulmannová Barbara	1.	Gamča BA	2		9	9						18	90
18.	Šuchová Martina	1.	GPár NR	1	7	4	8	5	5		2		29	90
20.	Mikuláš Matúš	1.	GBST LC	2			9	9	9	2	6		35	87
21.	Bajnoková Natália	1.	GCSL BA	2		1	8	9	9	5			32	85
22.	Homola Marek	1.	GJH BA	2		6	8	9		3	1		27	82
23.	Komzala Peter	1.	GJH BA	2		9	8	9		5	1		32	80
24.	Horanský Marek	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9				36	79
25.	Smolárová Paulína	1.	ŠPMNDG BA	2		6	3	2	5		4		20	74
26.	Leinwatherová Michaela	1.	GPan BA	2									0	70
27.	Škotnárová Lucia	2.	G Šurany	3			9	3	9	4	4		29	69
28.	Letovanec Ján	1.	???	1	4		9	4	9	8	4		34	67
29.	Šimková Jarmila	1.	GPár NR	2		1	9	9	4	5			28	66
30.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2					9	4			13	61
31.	Sučíková Svetlana	1.	G-BMA UK	2									0	58
32.	Pándy Michal	2.	GPoš KE	3									0	55
33.	Kopfová Lenka	0.	G Slez ČR	0	9	9	9				9		36	54
34.	Rosinská Veronika	2.	G Šurany	2		2	1		9	4	3		19	53
35.	Rajníková Mária	2.	GĽŠ TN	2			8						8	49
35.	Remperová Natália	1.	GKom PE	2									0	49
37.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3									0	48
38.	Dobrovič Adam	2.	GJGT BB	2									0	43

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
39.	Bošková Dagmar	1.	GJH BA	2									0	42
39.	Zajacová Terézia	1.	1SG BA	2									0	42
41.	Krett Jakub	2.	GMA BA	3									0	39
41.	Poláková Nikola	1.	G Šurany	2		1	8		4				13	39
43.	Juran Matúš	3.	GJH BA	3			8	9					17	37
44.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3									0	31
45.	Poljak Marián	1.	???	1									0	24
46.	Kecskésová Michaela	3.	GPár NR	3									0	21
46.	Petrová Simona	3.	ŠPMNDG BA	3			1	1			1		3	21
48.	Čermák Michal	1.	1SG BA	1									0	18
48.	Jakubíková Lucia	1.	???	1									0	18
50.	Sadovská Jana	1.	ŠPMNDG BA	2									0	16
51.	Ďurina Marián	1.	G Šurany	1					4		0		4	13
52.	Ferech Matúš	1.	GJH BA	1									0	9
52.	Tóthová Natália	1.	GAlej KE	2									0	9
54.	Krutek Robert	2.	GJGT BB	3									0	7
54.	Šimkovičová Natália	1.	GCSL BA	1									0	7
56.	Šimová Mária	2.	EGMT	2									0	4