Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2014/2015

Úloha č. 1: *Veronika si z kanastového balíčka vybrala 13 kariet. Týchto 13 kariet spĺňa nasledujúce podmienky:*

- *z každej farby je tam aspoň jedna karta,*
- *z každej farby je tam odlišný počet kariet,*
- *srdcových a kárových kariet je spolu 5,*
- *srdcových a pikových kariet je spolu 6,*
- *vo Veronikinej obľúbenej farbe sú presne 2 karty.*

Aká je Veronikina obľúbená farba?

Riešenie: (opravovali Veronika a Luxusko)
Na úvod dajme do poriadku nedorozumenia ohľadom zadania. Štandardný kanastový balíček má karty štyroch farieb: kárové, srdcové, pikové a trefové. Uvažujeme balíček bez žolíkových kariet, nakoľko so žolíkmi by sa úloha nedala vyriešiť.

Väčšina riešiteľov riešila príklad jedným z dvoch spôsobov. Poďme si ich oba ukázať. Označme si počty kárových, srdcových, pikových a trefových kariet postupne ako K, S, P a T. Pri riešení oboma spôsobmi je dôležité, aby ste overili všetky možnosti a ukázali prečo sedia resp. prečo nie.

Pozrime sa na prvú rovnicu $S + K = 5$ zo zadania. Sŕdc musí byť aspoň 1 a najviac 4, aby sme splnili pre srdcia aj kára, že ich je aspoň 1. Rozoberme všetky možnosti:

a) Ak $S = 1$, potom $K = 5 - S$, teda $K = 4$ a $P = 6 - S$, teda $P = 5$. Keďže $13 = K + S + P + T$ a už poznáme hodnoty K, S, P vieme dopočítať T, tj. $T = 13 - K - S - P$, teda $T = 6$. Ako môžeme vidieť, žiadna farba v tomto prípade nemá počet 2, a teda táto možnosť nie je správna.
b) Ak $S = 2$, potom $K = 5 - S$, teda $K = 3$ a $P = 6 - S$, teda $P = 4$. Keďže $13 = K + S + P + T$ a už poznáme hodnoty K, S, P vieme dopočítať T, a teda $T = 13 - K - S - P$, teda $T = 4$. Vyšlo nám $P = T$ a to je spor so zadaním.
c) Ak $S = 3$, potom zo vzťahu $P = 6 - S$ vyjde $P = 3$. Už teraz vidíme, že máme rovnaký počet v dvoch farbách $P = S$, čiže ani táto možnosť nie je správna.
d) Ak $S = 4$, rovnykým pstupom ako v minulých prípadoch prídeme na to, že $K = 1$, $P = 2$, $T = 6$. Táto možnosť vyhovuje ako jediná všetkým podmienkam zo zadania. Veronikina obľúbená farba je pika.

Iné riešenie:
Vieme, že z jednej farby sú práve 2 karty. Preberieme všetky možnosti:

a) Ak $K = 2$, potom $S = 5 - K$, teda $S = 3$ a $P = 6 - S$, teda $P = 3$. Vidíme, že $P = S$ čo nespĺňa podmienku zo zadania.
b) Ak $S = 2$, podobným spôsobom ako minule vyjde $K = 3$, $P = 4$, $T = 4$. Vidíme, že $P = T$, čiže táto možnosť je nesprávna.
c) Ak $P = 2$, tak nám vyjde $S = 4$, $K = 1$ a $T = 6$. Toto je naša správna možnosť, vyhovuje všetkým podmienkam zo zadania. Veronikina obľúbená farba je pika.
d) Ak $T = 2$, jednoduchým výpočtom prídeme na to, že $S = 0$, čo je spor so zadaním.

Všimnite si, že druhé riešenie skúša 4 možnosti bezohľadu na počty kariet. Naopak, v prvom riešení je počet prípadov, ktoré musíme rozobrať, závislý na podmienkach zo zadania. Pri iných podmienkach by sme možno museli rozobrať ešte viac prípadov. Druhý postup je teda všeobecne efektívnejší.

Úloha č. 2: *Linda si na papier narysovala trojuholník UPG s obsahom* 40cm^2. *Na strany UP a UG postupne nakreslila body O a J tak, aby boli priamky OJ a GP rovnobežné a aby bol obsah trojuholníka UJO presne* 10cm^2. *Nakoniec si na strane GP vyznačila bod E. Vedeli by ste zistiť obsah trojuholníka OJE? Ak áno, tak aký je?*

Riešenie: (opravovali Cvrki a Aňa)
Úlohu ste riešili dvoma rôznymi spôsobmi. Jeden využíval podobnosť trojuholníkov UOJ a UPG a druhý vlastnosti strednej priečky. Uvedieme si oba tieto spôsoby.

Na začiatok si všimnime, že trojuholníky UOJ a UPG sú podobné. Uhly pri vrchole U majú spoločné, uhly pri vrcholoch J a G sú striedavé, a teda rovnako veľké a podobne uhly pri vrcholoch O a P sú tiež striedavé a rovnako veľké. Skúsime vypočítať koeficient podobnosti k týchto dvoch trojuholníkov. Označme si stranu OJ ako u_1 a výšku na ňu v trojuholníku UJO ako v_1. Ďalej si označme stranu GP ako u_2 a výšku na ňu v trojuholníku UPG ako v_2. Z podobnosti vieme $u_2 = k \cdot u_1$ a $v_2 = k \cdot v_1$. Na vypočítanie k-čka využijeme fakt, že obsah trojuholníka UPG je 4-násobne väčší než obsah trojuholníka UJO:

$$\begin{aligned} S_{\triangle UPG} &= 4 \cdot S_{\triangle UJO} \\ \frac{u_2 v_2}{2} &= 4 \cdot \frac{u_1 v_1}{2} \\ k u_1 \cdot k v_1 &= 4 u_1 v_1 \\ k^2 &= 4 \text{ cm}^2 \\ k &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Rovnica má aj riešenie -2, vieme však, že koeficient podobnosti je vždy kladný. Zistili sme teda, že u_1 je polovica z u_2 a v_1 je polovica z v_2.

Obsah trojuholníka OJE vieme zrátať ako polovicu zo súčinu OJ krát výška na E. Stačí nám teda zistiť túto výšku, označme si ju ako v_3. Keďže OJ a GP sú rovnobežné, tak v_3 je vlastne vzdialenosť týchto dvoch priamok. Teraz si len stačí uvedomiť, že výšku $v_2 = 2v_1$ vieme dostať ako súčet vzdialeností vrchola U od priamky OJ a priamky OJ od priamku GP. Teda platí $2v_1 = v_1 + v_3$, z čoho dostávame $v_1 = v_3$.

Obsah trojuholníka OJE je teda $S_{\triangle OJE} = \frac{u_1 v_3}{2} = \frac{u_1 v_1}{2} = S_{\triangle UJO} = 10\text{cm}^2$.

Iné riešenie:
Vieme, že stredné priečky nám rozdelia trojuholník UPG na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom. Ak teda nakreslíme iba jednu strednú priečku (tú rovnobežnú s GP), tak nám rozdelí trojuholník na menší trojuholník so štvrtinovým obsahom, teda 10cm^2, a lichobežník s obsahom 30cm^2. Navyše vieme, že táto stredná priečka je rovnobežná so stranou GP. Hocijaká iná priečka medzi týmito stranami, rovnobežná s GP, by nám vytvorila trojuholník s menším (respektív väčším) obsahom ako 10cm^2 (podľa toho, či by sme priečku posunuli bližšie alebo ďalej od vrchola U). Takže jediná priečka OJ, vyhovujúca obom podmienkam zo zadania, je nutne stredná priečka.

Nech si zvolíme bod E hocikde na strane GP, tak dostaneme vždy rovnaký obsah (skúste si premyslieť prečo). Môžeme si ho teda umiestniť aj do stredu strany GP. Tým pádom rozdelíme trojuholník UPG strednými priečkami na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom 10cm^2. Obsah trojuholníka OJE je teda $S_{\triangle OJE} = 10\text{cm}^2$.

Úloha č. 3: *Betka nevedela v lete kvôli teplu zaspať, a tak sa pred spaním hrala veľmi zábavnú hru. Vzala si dve nie nutne rôzne cifry a a b, obe však rôzne od nuly. Potom z nich vytvorila číslo s ciferným zápisom $\overline{ababab}$. Ak bolo toto číslo deliteľné číslom* 481, *tak dvojicu a, b nazvala okúzľujúcou. Keď sa Betka ráno zobudila, za ten svet si nevedela spomenúť na to, ktoré dvojice cifier boli okúzľujúce, a ktoré nie. Zlepšite jej deň a zistite to za ňu.*

Riešenie: (opravovali Plutvička a Ľubo)
Mnohí z vás si všimli, že všetky dvojice cifier a a b sú okúzľujúce. Toto pozorovanie treba aj poriadne zdôvodniť. Máme pre vás 2 riešenia:

Skúsme si číslo $\overline{ababab}$ napísať v nejakom šikovnejšom tvare. Využime na to písmenká a a b. Určite budete súhlasiť, že $\overline{ababab} = 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b = 101010a + 10101b$. Napríklad $454545 = 101010 \cdot 4 + 10101 \cdot 5$. Všimnime si, že čísla 101010 a 10101 sú deliteľné 481. Ako nám to pomôže? Vieme, že ak je číslo n deliteľné napr. 3, tak aj ľubovoľný násobok n je deliteľný 3 (rozmyslite si prečo). Tiež ste si isto uvedomili, že to neplatí len pre 3, ale pre všetky delitele čísla n. Ešte vieme, že ak sčítavame dve čísla $(m + n)$ a zaujíma nás deliteľnosť napr. 3, stačí sčítať zvyšky oboch čísel po delení 3. Keď tento súčet zvyškov vydelíme tromi, dostaneme rovnaký zvyšok ako keď súčet $m+n$ vydelíme číslom 3 (opäť si rozmyslite prečo). Keďže 481 delí 101010 a 10101, tak delí aj $101010a + 10101b$ a teda všetky dvojice cifier sú okúzľujúce.

Iné riešenie:
Druhá možnosť bola uvedomiť si ako sa dostaneme z nejakého Betkinho čísla na nasledujúce. To vlastne znamená zväčšiť b o 1. Vidíme, že pokiaľ nemeníme a, tak ho týmto zväčšíme o 10101 (napríklad $121212 - 111111 = 10101$). Ľahko overíme, že čísla 111111 a 10101 sú násobkami 481 a teda použijeme ten istý argument o sčítavaní ako v prvom riešení. Nastane nejaký problém, keď prídeme po 191919? Nie, iba musíme 10101 pripočítať dvakrát a sme opäť na Betkiných číslach. Vlastne sme pri prechode cez 200000 zväčšili a, zatiaľ čo b sme nastavili zase na 1. Takto prídeme až po 999999. Opäť sme prišli k tomu, že všetky dvojice cifier sú okúzľujúce.

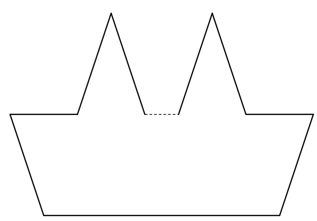
Úloha č. 4: *Katka si raz položila nasledujúcu filozofickú otázku: pre ktoré prirodzené čísla n existuje taký n-uholník, že každá jeho strana je rovnobežná s nejakou inou jeho stranou. Zahrajte sa na Platóna a skúste jej odpovedať.*

Riešenie: (opravovali Ivka a Barča)
Najprv treba spomenúť, že pre $n = 1$ a $n = 2$ to neplatí, pretože jednouholník a dvojuholník neexistuje (jedna ani dve strany nám nevytvoria uzavretý útvar).

$n = 3$ tiež nevyhovuje. Dve rovnobežné úsečky vytvoria štyri vrcholy. Trojuholník ich však samozrejme má len tri.

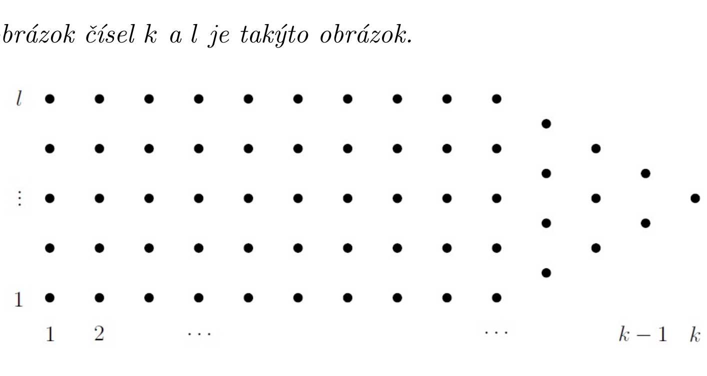
Ďalej si riešenie rozdelíme na dve časti:

1. **n je párne:** Pre všetky párne n takýto n-uholník vieme nájsť ľahko. Šikovný príklad je pravidelný mnohouholník, ktorého protiľahlé strany sú rovnobežné (premyslite si, prečo).
2. **n je nepárne:** V tomto prípade si treba uvedomiť, že tu už nemôžu byť vždy dve a dve strany rovnobežné, ale niekde sa v tomto n-uholníku musia nachádzať aspoň 3 navzájom rovnobežné strany. Toto je dôvod, prečo pre $n = 5$ takýto n-uholník neexistuje. Potom by museli byť navzájom rovnobežné niektoré 2 susedné strany, a tie by zvierali priamy uhol. Čo by to znamenalo? Z dvoch strán by nám vznikla jedna dlhá strana, a teda by sme dostali štvoruholník.
   Pre zvyšné nepárne čísla také útvary nájsť vieme. Pri ich hľadaní ste boli naozaj kreatívni, ukážeme tu však len jeden jednoduchý príklad. Na obrázku je sedemuholník, ktorý má navrchu akýsi "zub". Pridaním ďalšieho "zubu"sa počet jeho strán zvýši o 2. Môžeme ich pridávať, koľko chceme a tak dostaneme požadovaný n-uholník s ľubovoľným nepárnym počtom strán pre $n \geq 5$.



Záver: zadanie spĺňajú n-uholníky pre všetky $n \in \mathbb{N}$ okrem $1, 2, 3$ a 5.

Úloha č. 5: *Ceruzkový obrázok čísel k a l je takýto obrázok.*



Označme $CO(k, l)$ počet bodiek v ceruzkovom obrázku čísel k a l, napríklad $CO(14, 5) = 60$. Nech n je prirodzené číslo, potom ceruzkový pár čísla n je taký pár prirodzených čísiel k, l, kde $k > l > 1$, že $n = CO(k, l)$.

a) Koľko ceruzkových párov existuje pre čísla 2*,* 8 *a* 15*?*

b) Koľko ceruzkových párov existuje pre číslo 2014*?*

Riešenie: (opravoval Mojo)
Na začiatok si zodpovedzme na nasledujúcu otázku: ako môže z obdĺžnika $k \times l$ bodiek vzniknúť ceruzkový obrázok? No predsa z prvého stĺpca odobereme $l-1$ bodiek, z druhého $l-2$ bodiek, ..., až z $l-1$ stĺpca 1 bodku. Ceruzkový obrázok teda pozostáva z $CO(k,l) = l \cdot k - (1 + 2 + \ldots (l-1)) = l \cdot k - l(l-1)/2 = l\,(2k - l + 1)\,/2$ bodiek. Odtiaľ a zo zadania dostávame vzťahy

$$2CO(k,l) \quad = l(2k - l + 1) \tag{1}$$

$$k > \qquad l > \qquad 1 \tag{2}$$

Keďže l, $CO(k,l)$ aj $(2k - l + 1)$ sú prirodzené čísla, tak z 1 vyplýva, že l musí deliť $2CO(k,l)$.
Teraz môžeme rozobrať jednotlivé prípady zo zadania.

- $CO(k,l) = 2$, v tomto prípade triviálne neexistuje ceruzkový pár, lebo zo zadania vieme že $k > l > 1$.
- $CO(k,l) = 8$, teda l musí deliť číslo 16. Čiže l sa môže rovnať 2, 4 alebo 8. A po dosadení do (1) a (2) zistíme, že nám žiadna dvojica celých čísel l, k nesedí.
- $CO(k,l) = 15$, čiže l musí deliť 30. Teda máme možnosti $l =$ 2, 3, 5, 6, 10, 15. Pre $l = 2$ dostávame z (1) že $k = 7$. Obdobne pre $l = 3$ dostaneme $k = 6$. Ak si tieto možnosti nakreslíte, ľahko sa presvedčíte, že skutočne fungujú. Pre ostatné možnosti pre l, dostaneme vyriešením (1) riešenia, ktoré nevyhovujú (2).
- $CO(k,l) = 2014$, tu opäť dostávame nejaké možnosti pre l a to 2, 4, 19, 38, 53, 76, 106, 212, 1007 a 2014 (rozmyslite si prečo práve tieto). Pre k teda z (1) dostávame vzťah

  $$k = \frac{2014}{l} + \frac{l-1}{2}.$$

  Do tohto vzťahu postupne dosadíme všetky možné hodnoty l a po zohľadnení (2) a toho, že k musí byť celé číslo dostávame možné nasledujúce dvojice (k,l): $(505,4)$, $(115,19)$ a $(64,53)$.

Úloha č. 6: *Cez leto bol Hago na výlete v Saudskej Arábii a stretol tam zhovorčivého Sultána. Ten mu povedal: „Ak náhodne vyberieme dve moje deti, je rovnako pravdepodobné, že budú rovnakého pohlavia a rôzneho pohlavia.“*
„A aká je šanca, že budú obe dievčatá?“ opýtal sa ho nedočkavo Hago.
„Rovnaká, ako šanca, že jedno náhodne vybraté dieťa bude chlapec,“ odvetil Sultán.
Koľko chlapcov a koľko dievčat mal Sultán?

Riešenie: (opravovali Betka a Ľudka)
Postupne si označíme pravdepodobnosť toho, že z dvoch náhodne vybratých detí, budú

- obe dievčatá ako $P(d,d)$
- obaja chlapci ako $P(c,c)$
- dievča a chlapec ako $P(d,c)$
  (toto znamená, že prvé sme vybrali dievča a druhého chlapca)
- chlapec a dievča ako $P(c,d)$
  (tu zase naopak, najprv chlapec, potom dievča, pričom vieme, že $P(c,d) = P(d,c)$)

Počet dievčat označíme d a počet chlapcov c. Nech $d + c \geq 2$ (ešte nám ostanú možnosti pre $c + d < 2$, ktoré rozoberieme neskôr).

Celú situáciu vieme rozdeliť na 3 prípady: buď to budú dve dievčatá, dvaja chlapci alebo budú rôzneho pohlavia. Keďže $d + c \geq 2$ tak jedna z týchto možností určite nastane a zároveň žiadne dve nenastanú naraz, takže súčet ich pravdepodobností je jedna.

Pravdepodobnosť toho, že dve náhodne vybraté deti budú rôzneho pohlavia je $1 - P(c,c) - P(d,d)$. Zo zadania tiež vieme, že $P(c,c) + P(d,d) = P(c,d) + P(d,c)$. Keďže $P(c,d) = P(d,c)$, úpravami dostaneme $P(c,d) = P(d,c) = \frac{1}{4}$ a $P(c,c) + P(d,d) = \frac{1}{2}$.

Náhodne vyberieme jedno dieťa. Potom pravdepodobnosť, že toto dieťa je chlapec označme $P(c)$. Ak vyberieme ešte jedno dieťa môžu nastať dve možnosti. Buď je toto dieťa chlapec alebo dievča. Potom $P(c)$ je rovnaká ako súčet pravdepodobností $P(c,d) + P(c,c)$.

$$P(c,c)+P(d,d)=\frac{1}{2} \text{ a } P(c,d)=P(d,c)=\frac{1}{4} \text{ z toho vyjde } P(c,c)+P(d,d)+P(c,d)=\frac{3}{4}$$

Ukázali sme, že $P(c,d)+P(c,c)=P(c)$ a zo zadania vieme, že $P(c)=P(d,d)$. Takto dostávame $P(d,d)=P(c,d)+P(c,c)=\frac{3}{4}-P(d,d)$ potom $P(d,d)=\frac{3}{8}$ a $P(c,c)=\frac{1}{8}$.

Pomocou $P(c)=\frac{c}{(c+d)}=P(c,d)+P(c,c)=\frac{3}{8}$ vieme, že pomer chlapcov a všetkých detí je 3 : 8. A rovnako dostaneme aj pomer dievčat ku všetkým deťom. Vieme, že $P(d)=\frac{d}{(c+d)}=P(d,d)+P(d,c)=\frac{5}{8}$ a teda tento pomer je 5 : 8.

Teraz už len zistíme počet detí. Vieme, že $P(d,d)=\frac{3}{8}=\frac{d(d-1)}{(d+c)(d+c-1)}=\frac{\frac{5}{8}(c+d)(\frac{5}{8}(c+d)-1)}{(d+c)(d+c-1)}$. Z čoho úpravami dostávame $c+d=16$, a teda sultán má 10 dcér a 6 synov.

Ešte tie sľúbené prípady kde $c+d<2$. Sú tri: $d=0$, $c=0$ a $d=1$, $c=0$ ľahko overíme, že vyhovujú. Pre $d=0$, $c=1$ nevyhovuje druhá podmienka v zadaní.

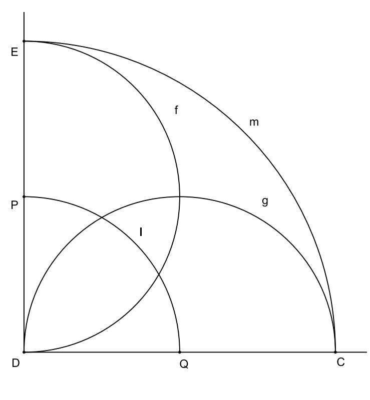
Úloha č. 7: *Dominik si do roviny nakreslil bod D. Potom si tam narysoval polpriamky p a q zvierajúce pravý uhol a obe vychádzajúce z bodu D (takže pri bode D máme pravý uhol). Následne uvažoval všetky také polkružnice, ktoré celé ležia dnu v pravom uhle, majú fixný polomer 5 cm a ich dva krajné body ležia postupne na polpriamkach p a q. Nájdite množinu bodov, ktorú vyplnia body týchto polkružníc.*[1]

Riešenie: (opravovali Hiphop a Jožo)
Označme množinu hľadaných bodov M. Po načrtnutí niekoľkých polkružníc vieme odhadnúť tvar množiny M. Svoj odhad ale musíme dokázať: o každom bode, ktorý nepatrí do množiny M ukážeme, že neexistuje polkružnica spĺňajúca podmienky zo zadania a o bodoch patriacich do M ukážeme, že taká polkružnica existuje.

Vezmime ľubovoľnú polkružnicu k vyhovujúcu zadaniu. Označme jej priesečníky s priamkami p,q postupne A,B ($|AB|=10\,\text{cm}$) a jej stred S. Pokiaľ polkružnicu k doplníme na kružnicu, dostaneme Tálesovu kružnicu nad priemerom AB. Keďže $\sphericalangle ADB$ je pravý, bod D leží na Tálesovej kružnici a teda $|DS|=5\,\text{cm}$. To platí aj v prípade keď $A=D$ alebo $B=D$, kedy ABD nie je trojuholník a D je krajným bodom polkružnice. Ďalej si všimnime, že bod S leží vždy v pravom uhle ADB, lebo A,B tiež ležia v tomto pravom uhle.

Stredy všetkých polkružníc teda ležia na štvrťkružnici $l(D,5\,\text{cm})$, ktorá leží celá v pravom uhle ADB. Jej priesečníky s polpriamkami p a q si postupne označíme ako P,Q.

Musíme ešte overiť, či každý bod S štvrťkružnice l môže byť stredom polkružnice k zo zadania. Spravme si kružnicu $k_1(S,5\,\text{cm})$. Keďže všetky body zo štvrťkružnice l sú od priamok p,q vzdialené najviac 5 cm, tak potom kružnica k_1 pretne priamky p,q v bodoch, ktoré si označíme postupne A_1,B_1. Kružnica k_1 je opísaná pravouhlému trojuholníku A_1B_1D (Tálesova), preto A_1B_1 je jej priemerom a oblúk A_1B_1 neobsahujúci D je polkružnicou, ktorá celá leží v pravom uhle ADB vzhľadom na to, že kružnica opísaná trojuholníku nepretína jeho strany. Každý bod zo štvrťkružnice l teda môže byť stredom polkružnice uvažovanej v zadaní.



Ľubovoľný bod $X\in M$ musí byť vzdialený od nejakého $S\in l$ práve 5 cm (S je stred polkružnice, na ktorej leží X). S musí ležať na kružnici $u(X,5\,\text{cm})$, ale zároveň aj na štvrťkružnici l. Bod X teda patrí do množiny práve vtedy, keď sa kružnica u a štvrťktužnica l pretínajú. Pre ďalšie potreby označme kružnicu $l_1(D,5\,\text{cm})$, na ktorej leží štvrťkružnica l.

Všetky body pravého uhla rozdelíme na 3 časti:

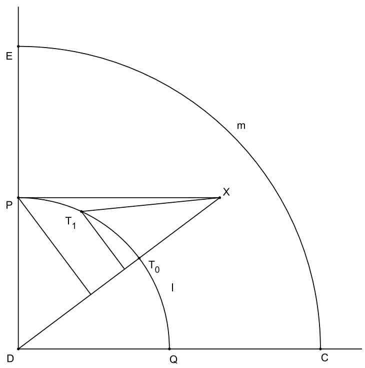
Poprvé, všetky body X vzdialené od D viac ako 10 cm nepatria do M, lebo stredy kružníc l_1 a u sú vzdialené viac ako súčet ich polomerov (čo je 10 cm) a teda sa nepretnú. Tieto body ležia vo vonkajšej oblasti štvrťkružnice $m(D,10\,\text{cm})$ (ležiacej celej v pravom uhle).

Podruhé, kružnica u z ľubovoľného bodu X vnútornej oblasti štvrťkružnice m pretne kružnicu l_1, lebo vzdialenosť ich stredov (X a D) je menšia ako 10 cm. Môže sa ale stať, že sa pretnú mimo pravého uhla (a teda $m\cap l=\emptyset$). To nastane práve vtedy, keď vzdialenosť X od všetkých bodov štvrťkružnice l je menšia ako 5 cm.

Dokážeme, že najviac vzdialený bod štvrťkružnice l od bodu X je jeden z jej krajných bodov, P,Q. Pozrime sa, čo sa stane, ak X leží vo vonkajšej časti štvrťkružnice l. Ak si spojíme bod X s bodom D a priesečník polpriamky DX s kružnicou l_1 si označíme T_0, tak T_0 je zrejme najbližší bod z kružnice l_1 k bodu X. Pozrime sa na ľubovoľný bod T_1 z kratšieho oblúku T_0P. Platí $|XT_1|\le|XP|$. Dôkaz prečo to tak je ponecháme na čitateľovi (pozrite obr. 2). Dôkaz tohto tvrdenia pre X vnútri l už teraz zaiste zvládnete tiež. Kružnica u nepretne kružnicu l_1 vnútri pravého uhla práve vtedy, ak $|PX|<5\,\text{cm}$ a $|QX|<5\,\text{cm}$. Množina bodov vzdialených od P menej ako 5 cm je vnútorná

[1]Body polkružnice sú iba body na jej obvode.

oblasť kruhu $f(P, 5\,\mathrm{cm})$ a pre bod Q vnútorná oblasť kruhu $g(Q, 5\,\mathrm{cm})$. Prienik vnútorných oblastí f a g nebude patriť do M.



Nakoniec nám ostali len body vnútri štvrťkržnice m (aj s obvodom) bez prieniku vnútorných oblastí f a g, o ktorých ukážeme, že tvoria M. Kružnica u pretne kružnicu l_1, lebo ich stredy sú vzdialené menej ako 10 cm (resp. pre X ležiace na štvrťkružnici M sa kružnica u dotýka štvrťkružnice l a to na spojnici ich stredov, ktorá leží v pravom uhle). Pre ľubovoľný bod X z tejto oblasti platí $|XP| \geq 5\,\mathrm{cm}$ alebo $|XQ| \geq 5\,\mathrm{cm}$ nakoľko ležia vo vonkajšej oblasti f alebo g. Preto kružnica u pretne štvrťkružnicu l. Dostaneme tak $S \in l$, pre ktorý ako sme vyššie uviedli existuje polkružnica zo zadania.

Pre úplnosť naznačíme dôkaz prieniku kružnice u a štvrkružnice l. Vieme, že kružnice u a l_1 prieniky majú a ktoré naviac sú osovo súmerné podľa DX. Rozhodnite, či existuje bod na kružnici l_1 mimo pravého uhlu, ktorý je od X vzdialený 5 cm (neexistuje, ale dokážte si to).

Poznámka: Nájsť správnu množinu bodov nebolo ťažké vzhľadom na to, že to bola 7. úloha. Preto sme pri opravovaní kládli dôraz na presné dokázanie správnosti riešenia. Mnohí z vás zabudli overiť, že každý bod z nájdenej množiny vyhovuje zadaniu, či náhodou polkružnica, na ktorej leží nevychádza z pravého uhla, alebo ste nespomenuli, prečo oblasť zo štvrťkruhu do množiny nepatrí. Niektorí z vás ste sa snažili zdôvodniť riešenie rôznym posúvaním krajných bodov alebo polkružníc. Nie je to nesprávne riešenie, ale je ťažké ho opísať dostatočne dobre (a to sa málokomu podarilo).

Úloha č. 8: *Mišo sa hrá na Spidermana a vyrobil si doma pavučinu. Tá pozostáva z 3^n kamienkov, kde n je prirodzené číslo, pričom každá dvojica kamienkov je spojená práve jednou nitkou. Za chvíľu sa vrátia Mišovi rodičia, a tak potrebuje pavučinu rozpliesť. Rozpletá ju nasledovným spôsobom: vyberie si trojicu kamienkov, medzi ktorými sú zatiaľ všetky tri nitky, a tieto tri nitky odstráni. Dokážte, že takýmto spôsobom vie postupne z pavučiny odobrať všetky nitky.*

Riešenie: (opravovali Kajo a JeFo)
Na dôkaz použijeme matematickú indukciu. Nebude to tak úplne obyčajná indukcia, ale bude to takzvaná spätná indukcia. V tom slovíčku „spätná“ sa skrýva fakt, že ukážeme, že vieme rozpliesť pavučinu z 3^n kamienkov na tri pavučiny z 3^{n-1} kamienkov. Rovnaký postup by sme mohli potom použiť na tieto tri pavučiny a rozpliesť ich na deväť pavučín z 3^{n-2} kamienkov. Takto by sme potom pokračovali až k triviálnemu prípadu ktorý vieme ľahko rozpliesť.

Začnime tým triviálnym prípadom pre $n = 1$. Máme pavučinu z $3^{n=1}$ kamienkov a 3 nitky (všetky dvojice), ich odobratím máme triviálne riešenie tohto prípadu. Skúsime ďalej dokázať, že vime rozpliesť pavučinu z 3^n kamienkov na tri pavučiny z 3^{n-1} kamienkov.

Pavučinu z 3^n kamienkov si rozdelíme do troch skupín (A, B, C) po $3^{n-1} = k$ kamienkoch. Kamienky si príslušne označíme: $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k, c_1, c_2, \ldots, c_k$. Ak budeme hovoriť o kamienku s indexom q takom, že $q > k$ potom myslíme kamienok s indexom p, kde $p \leq k$ a $q = x \cdot k + p$. Pokúsime sa zbaviť nitiek, ktoré spájajú kamienky z rôznych skupín, tým pádom rozdelíme pavučinu z 3^n kamienkov na tri pavučiny z 3^{n-1} kamienkov.

Chceme odobrať každú pavučinu spájajúcu kamienky z dvoch rôznych skupín, pričom ale každú pavučinu chceme odobrať práve raz. Budeme voliť trojice kamienkov typu a_i, b_j, c_{i+j}, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Pri takejto voľbe indexov dostaneme ľubovoľnú trojicu a_m, b_n, c_o práve raz a zároveň odoberieme všetky trojice kamienkov. Nahliadnuť sa na to dá cez zafixovanie a_i na indexe 1 a prechádzať zaradom s indexom j cez množinu $\{1, \ldots, k\}$. Tým pádom zrušíme každú pavučinu (premyslite si, že aj každú práve raz) idúcu z a_1 do každého kamienka z B a C. Rovnako sa na daný postup môžeme pozrieť pri zafixovaní indexu i na ľubovoľnej hodnote, tým ale oddelíme každý kamienok zo skupiny A a tým aj celú skupinu A od ostatných skupín. Ak sa ale na celý postup odoberania pozeráme pri zafixovanom indexe j vidíme, že sme museli oddeliť aj každý kamienok z B a s tým aj celú skupinu B od kamienkov v C. Teda sme všetky tri skupiny úplne oddelili.

Ukázali sme, že vieme pavučinu z 3^n kamienkov rozpliesť na tri pavučiny z 3^{n-1} kamienkov, tým pádom vieme aj pavučiny z 3^{n-1} kamienkov rozpliesť na pavučiny z 3^{n-2} kamienkov a postupným rozpletaním sa vieme dostať až k triviálnemu prípadu $n = 1$.

Elegantnejšie riešenie: (podľa Bui Truc Lama) Zoberme si graf, ktorý pozostáva z 3 skupín vrcholov, každá veľkosti 3^n. Hranou spojíme všetky dvojice vrcholov, ktoré sú rôznej skupiny. Takýto graf nazveme $F(n)$. Indukciou ukážeme, že ho vieme rozpliesť.
$F(0)$ zrejme vyhovuje. $F(n+1)$: Rozdelíme každú skupinu do troch tímov, označíme ich $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$. Keď si zoberieme 3 tímy, každý inej skupiny, tak ich rozpletieme rovnako, ako $F(n)$. Trojice tímov zvolíme tak, že buď každá trojica obsahuje tímy s rovnakým indexom (napr. a_1, b_1, c_1), alebo rôznym (napr. a_1, b_3, c_2). Takto je

pre každú dvojicu tímov rôznych skupín jednoznačne určené, do ktorej trojice patria, takže tým rozpletieme $F(n+1)$.

Indukciou dokážeme tvrdenie v zadaní. Pre $n = 1$ to platí. Pre $n + 1$: rozdelíme vrcholy do 3 skupín, každá veľkosti 3^n. Každú skupinu rozpletieme pomocou indukčného predpokladu, zostane nám graf $F(n)$, ktorý vieme rozpliesť. Tým je indukcia hotová.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Hopko sa bol v lete potápať a na dne koralového útesu našiel štvorec. Chvíľu sa s ním hral, a potom si zaviedol názvoslovie.*
Obdĺžnik nazval vystrihovací, ak sa dá vyrobiť zo štvorca pomocou strihania a preusporiadania kúskov.[2] *Racionálne číslo nazval vystrihovacie, ak existuje vystrihovací obdĺžnik, ktorého pomer strán sa rovná tomuto racionálnemu číslu. Nájdite všetky vystrihovacie racionálne čísla.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Mišo a Viktor)
Chceme zistiť, ktoré racionálne čísla môžu byť pomerom strán obdĺžnika, ktorý vznikol nastrihaním štvorca. Odpoveďou je, že to môže byť ľubovoľné kladné racionálne číslo.

Pre jednoduchosť nech je obsah štvorca 1. Strihaním sa obsah nezmení, takže vzniknuté obdĺžniky musia mať obsah rovnaký. Keď si zoberieme ľubovoľné racionálne číslo $\frac{p}{q}$, kde p, q sú prirodzené čísla, obdĺžnik s týmto pomerom strán musí mať strany dĺžky $\sqrt{\frac{p}{q}}$ a $\sqrt{\frac{q}{p}}$.

Ako to dosiahnuť? Nemá zmysel zobrať menšiu dĺžku a štvorec podľa nej zostrihnúť na obdĺžnik, zvyšok sa nedá len tak "dopasovať". Dá sa ale strihať šikmo.

Zoberme si najjednoduchší príklad, keď štvorec rozstrihneme po uhlopriečke. Výsledné trojuholníky k sebe vieme priložiť tak, že vznikne rovnobežník. Stačí ich posunúť tak, aby sa nedotýkali preponami, ale odvesnami. Potom už ho len rozstrihneme pri dlhšej základni v pravom uhle k nej, odstávajúci trojuholník presunieme na opačnú stranu rovnobežníka otočený o 180 stupňov a máme obdĺžnik! V tomto prípade bude mať strany $\sqrt{2}$ a $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Myšlienka: štvorec začneme z rohu pod nejakým uhlom (menším ako 45 stupňov od základne) strihať a po tom ako narazíme na opačnú stenu striháme ďalej z druhej strany z rovnakej výšky a pod rovnakým uhlom. Takto nastriháme štvorec na niekoľko rovnobežníkov a dva trojuholníky a zostrihnutý rovnobežník, ak sme vo výške 1 neskončili vo vrchole.

Podstatné je, že tieto odrezky vieme poskladať do rovnobežníka. Stačí, ak ich vodorovne poposúvame tak, aby sa susedov dotýkali zvislými stranami a nie šikmými. Čo treba spraviť s rovnobežníkom už vieme. Odstrihneme jeden roh a presunieme ho na opačnú stranu.

Kratšia strana tohto obdĺžnika je výškou trojuhoníka, ktorý bol ako prvý odstrihnutý zo štvorca. To je aj cesta, ako nájsť uhol, pod ktorým strihať. Prepona torjuholníka je dĺžka strany štvorca, čiže 1. Protiľahlá odvesna je naša požadovaná dĺžka. Uhol je teda jej arkus sínusom.

Takto zostrojíme obdĺžnik s ľubovoľným (kladným) pomerom strán.

Poznámka: uhol sa dá zostrojiť aj bez použitia arkus sínusu. Stačí zostrojiť kružnicu s priemerom 1 a naniesť požadovanú dĺžku z jedného vrchola priemeru. Uhol pri tom druhom je arkus sínus tej dĺžky.

<u>**Úloha č. 10:**</u> *Vodka má rád jednotky v binárnych zápisoch. Zaviedol značenie $V(n)$, ktoré udáva počet jednotiek v binárnom zápise prirodzeného čísla n. Prirodzené číslo n je pekné, ak $V(n)$ delí n.*

a) Dokážte, že neexistuje pätica po sebe idúcich pekných prirodzených čísel.

b) Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc po sebe idúcich pekných prirodzených čísel.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Miro a Vodka)
a) Najprv si uvedomíme, že v každej štvorici sa nachádza číslo, ktoré konči v dvojkovej sústave dvojicou cifier 01. Za ním nasleduje číslo, ktoré končí na dvojicu 10. Takáto dvojica po sebe idúcivh čísel sa bude isto nachádzať v každej pätici. Čím sú tieto dve čísla výnimočné? Majú rovnaké $V(n)$! Toto $V(n)$ môže deliť dve po sebe idúce čísla len v prípade $V(n) = 1$. No a to je splnené iba pre mocniny 2. Dve po sebe idúce mocniny dvojky sú iba 1 a 2, a preto nemôže existovať pätica pekných po sebe idúcih čísel, ktorá neobsahuje 1 a 2. Ostáva už len overiť, že pätica $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ nevyhovuje a to už nechávame na vás :)

b) Tak skúsme nejaké nájsť. Skúsme nájsť trojicu $n-1,\ n,\ n+1$ s poslednými ciframi $11, 00, 01$ v dvojkovej sústave. A hľadajme ich s pevnými $V(n-1),\ V(n)$ a V(n + 1) a najlepšie malým (bude to jednoduchšie :)

My sme sa rozhodli, že ich nájdeme s $V(n-1),\ V(n),\ V(n+1)$ postupne $7, 4, 5$ Ako nám to napadlo? No zrejme $V(n-1),\ V(n+1)$ musia byť nepárne (aby mohli deliť nepárne číslo), $V(n)+1 = V(n+1)$ a $V(n) < V(n-1)$

[2] Kúsky sa nesmú prekrývať, musia sa použiť všetky a môžeme ich nastrihať iba konečne veľa.

(premyslite si). A keby sme ich zvolili veľmi malé, (napr. $V(n) = 2$) tak by nám neskôr chýbala akási "voľnosť". Inak je toto asi to najmenšie, čo sme mohli vymyslieť.

Uvedomíme si, že potom to stredné číslo musí končiť na 10000 (aby to o jedna menšie malo o 3 jednotky viac). Naše číslo potom vyzerá $10\ldots010\ldots010\ldots010000$ (v binárnej sústave). Keď tie 3 jednotky sú na a,b a c-tom mieste tak to číslo bude $2^a + 2^b + 2^c + 16$. (kde $a \geq b \geq c \geq 5$) My chceme aby platilo:

$$7|2^a + 2^b + 2^c + 15$$

$$4|2^a + 2^b + 2^c + 16$$

$$5|2^a + 2^b + 2^c + 17$$

Druhý vzťah platí hneď a keď sa budeme pozerať na zvyšky mocnín 2 po delení 5 (postupne $2,\ 4,\ 3,\ 1$ dokola) a 7 ($2,\ 4,\ 1$) tak po chvíli skúšania nájdeme vhodné a, b, c, napríklad $9,\ 6,\ 5$. Tu vidíme, prečo bolo super, že máme $V(n) = 4$. Keby to bolo len 2 mali by sme len 1 neznámu, a to by sme museli mať dosť šťastia (v skutočnosti by to nešlo), aby sme našli vhodné čísla.

Dostaneme tak trojicu pekných čísel $623,\ 624,\ 625$. Ako teraz vyrobím ďalšie? No stačí ak budem posúvať prvé jednotky v binárnom zápise dopredu (zväčšovať a) tak, aby sa zvyšok po delení 5 a 7 nemenil (počty jednotiek tak nezmením). Dostanem tak čísla $2^a + 111,\ 2^a + 112,\ 2^a + 113$. V reči kongruencií[3] potrebujeme toto:

$$2^a - 2^9 = 2^a(2^{a-9} - 1) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{a-9} \equiv 1 \mod p$$

pre $p = 5$ a $p = 7$.

Z Malej Fermatovej vety vieme, že to nastáva pre $a - 9 \equiv 0 \mod p - 1$. Pre čísla $7,\ 5$ to znamená, že $a - 9$ je najmenším spoločním násobkom čísel 6 a 4, čo je 12. Teda $a = 12k + 9$. z týchto úvah je jasné, že čísla $2^{12k+9} + 111,\ 2^{12k+9} + 112,\ 2^{12k+9} + 113$ vyhovujú.

Našli sme nekonečne veľa trojíc pekných čísel.

Samozrejme v skutočnosti stačilo hocijakým spôsobom nájsť jednu takú trojicu (hoci táto je najmenšia, takže postupné skúšanie nebolo moc efektívne). A potom posúvaním prvej jednotky o vhodný počet sa z nej vždy dalo vyrobiť nekonečne veľa trojíc.

Dokonca *Matěj Konečný* našiel aj štvoricu po sebe idúcich pekných čísel a potom analogicky ukázal, že ich je nekonečne veľa.

Teda je možné, že najťažším krokom bolo naozaj nájdenie prvej trojice :), čo sa najrýchlejšie asi naozaj urobilo fixnutím $V(n)$.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	4.	CGsvM SL	13			9	9	9	9	9		45	45
1.	Konečný Matěj	4.	GJir ČB	4		9	9	9	9		9		45	45
1.	Švarc Radovan	4.	Česká Třebová	9			9	9	9	9	9		45	45
4.	Hanzely Slavomír	3.	GJAR PO	7		9	9	6	6		9		39	39
5.	Frankovská Zuzana	3.	Gamča BA	5		9	7	8	9	4			37	37
5.	Hronkovičová Nina	4.	GKom PE	8			3	7	9	9	9		37	37
7.	Mišlanová Kristína	3.	GAlej KE	7		9	9	9	9				36	36
7.	Truc Lam Bui	4.	Gamča BA	11			9	9	9		9		36	36
9.	Bodík Juro	3.	Gamča BA	7		9	7	7	6	6			35	35
9.	Semanišinová Žaneta	3.	GAlej KE	7		9	9	8	9				35	35
9.	Súkeník Peter	3.	GVar ZA	6		8	1	8	9		9		35	35
12.	Halabrin Juraj	3.	GJH BA	6		9	8	6	9	2	0		34	34
12.	Králik Matej	4.	GJH BA	10			7	5	8	6	8		34	34
12.	Murin Marek	3.	GJH BA	7		8	4	7	6		9		34	34
12.	Oravkin Eduard	3.	1SG BA	7		9	8	9	6		2		34	34
16.	Kluvanec Roman	4.	GPár NR	6		6	7	5	9	6			33	33
16.	Kulla Filip	3.	BiG Sučany	7		9	7	7	4	6			33	33

[3] Ak nevieš čo sú kongruencie, odporúčame ti prečítať si zbierku KMS: `http://www.kms.sk/zbierka`

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
16.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	1	8	9	7		9				33	33
16.	Pišťák Daniel	3.	GChD Praha	5		8	9	2	8	6			33	33
20.	Veselá Simona	4.	GJH BA	5	9	9	9	5	9				32	32
21.	Bialas Filip	2.	GOp Praha	5		9	9		9		3		30	30
22.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	3	9	9	7		4				29	29
23.	Kopf Daniel	3.	G Slez ČR	7		9	4	6		7	2		28	28
23.	Krakovská Ema	4.	Gamča BA	8			8	6	6		8		28	28
23.	Tóthová Andrea	3.	GJH BA	4	6	7	9	3	3				28	28
26.	Onduš Daniel	3.	GAlej KE	6		9	8		9				26	26
27.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	3	6	8	9		2				25	25
27.	Choma Matej	3.	Gamča BA	6		9	8	5			3		25	25
27.	Nepšinská Silvia	4.	GJH BA	9			9	4	6	6			25	25
27.	Porubsky Michal	3.	GsvCM NR	4	9	8	8						25	25
31.	Žídek Matěj	3.	Frýdlant ČR	6		8	8	7					23	23
32.	Darmovzal Ondřej	4.	Brno ČR	5		9	4		8				21	21
33.	Krasula Dominik	2.	Krnov ČR	4	9		7		4				20	20
34.	Martinka Matej	3.	SŠsvFA	4	8	5		6					19	19
34.	Molčan Samuel	3.	GJAR PO	6		9	4	6					19	19
36.	Dráček František	4.	GŠkol PB	9			4	6	4	4			18	18
36.	Prešinská Kristína	4.	GPár NR	9			8	3	3	4			18	18
38.	Král Adam	3.	GVar ZA	5	3	9	8						17	17
38.	Tesař Emanuel	3.	GBST LC	6		9	7		1				17	17
40.	Krajmerová Barbora	3.	G Šurany	5		6	5	4					15	15
40.	Marčeková Katarína	3.	GJH BA	6		7	4	3		1			15	15
40.	Ralbovský Peter	3.	ŠPMNDG BA	6			7			6	2		15	15
43.	Hollý Dominik	4.	ŠPMNDG BA	7		7	5	0	1				13	13
44.	Kašša Ladislav	3.	G Šamorín	6		6	5						11	11
44.	Santrová Michaela	4.	GMH Trstená	10			7		4				11	11
46.	Liu Zhen Ning Dávid	4.	GJH BA	11							9		9	9
46.	Trenčanská Tereza	3.	Gamča BA	5	8		7		2				9	9
48.	Škrlec Adam	3.	GJH BA	5			1	6		1			8	8
48.	Vančo Šimon	3.	CGsvM SL	4			7		1				8	8
50.	Kurimský Ján	3.	GsvMo	5		6							6	6
51.	Barbora Dávid	4.	GFS Nová Baňa	6									0	0
51.	Rozhoň Václav	4.	GJir ČB	4									0	0

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Mičko Juraj	2.	GPoš KE	3			9	9	9	9	9		45	45
1.	Parada Matej	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9	9	6			45	45
3.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9		8	7		44	44
4.	Horanský Marek	2.	ŠPMNDG BA	2	9	9	9	9	9	7			43	43
4.	Smolárová Paulína	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	5	9	7	0		43	43
6.	Bošková Dagmar	1.	GJH BA	1	9	9	9	8	7				42	42
6.	Drotár Pavol	2.	GPoš KE	3			9	9	9	7	8		42	42
8.	Leinwatherová Michaela	1.	GPan BA	1	9	9	9		7	7	4		41	41
8.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	2		9	9	9	8		6		41	41
10.	Banhegyi Tomas	3.	GJH BA	3			9	9	9	7	5		39	39
10.	Švihorík Tomáš	1.	GPár NR	1	9	9	9	8			4		39	39
12.	Dlugošová Michaela	1.	GKuk PP	1	9	9	9		9	2			38	38
13.	Belan Pavol	1.	GVar ZA	1	9	9	9	1	5	2	5		37	37
13.	Krett Jakub	1.	GMA BA	1		9	9	3	9	7			37	37

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
13.	Pajger Šimon	1.	GVO ZA	1	9	9	9	9		1			37	37
16.	Domes Tomáš	2.	G Mendel ČR	2		9	9	4	9	5			36	36
16.	Kuťková Sára	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9					36	36
16.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1	9	9	9	9					36	36
16.	Onduš Peter	1.	GAlej KE	1	9	9	9		9				36	36
16.	Pulmannová Barbara	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9					36	36
16.	Sadovská Jana	1.	ŠPMNDG BA	1	9	5	9	8	5	1	3		36	36
22.	Steinhauser Václav	1.	G Dacice	1	7	7	9	7		4			34	34
22.	Sucikova Svetlana	1.	G-BMA UK	1	9	5	9		7	4			34	34
22.	Urbán Ádám	1.	GPoš KE	1		9	9	9		7			34	34
25.	Poláková Nikola	1.	G Šurany	1	9	9	9			3	3		33	33
25.	Svobodová Zuzana	1.	Frýdlant ČR	1				9	9	9	6		33	33
27.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	3			9	6	8	9			32	32
27.	Škrotnárová Lucia	2.	G Šurany	2		9	9	4	8	2			32	32
27.	Tureničová Martina	1.	GJH BA	1	9	9	9	3	2	2			32	32
30.	Žídková Dorota	1.	Frýdlant ČR	1	9	8	9	2	3				31	31
31.	Tóthová Natália	1.	GAlej KE	1	9	9	9	3					30	30
31.	Zajacová Terézia	1.	1SG BA	1	7	9	9		5				30	30
33.	Mikuláš Matúš	1.	GBST LC	1	6	8	9	2	4	1			29	29
33.	Oravkin Richard	0.	1SG BA	0	9	9	9	2					29	29
35.	Barteková Katarína	2.	GCSL BA	2	6	9	9	2	6	2	0		28	28
35.	Piala Martin	2.	GVO ZA	2		9	9	2	5	3	1		28	28
35.	Rosinská Veronika	2.	G Šurany	2		9	9	7	3				28	28
38.	Šimková Jarmila	1.	GPár NR	1	9	9	9						27	27
39.	Juran Matúš	1.	GJH BA	1			9	2	9	3	3		26	26
40.	Čatloš Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	7	9	8	1		0			25	25
40.	Čermák Michal	1.	1SG BA	1	9	9	3	4					25	25
40.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	3				9	9	7			25	25
43.	Bajnohová Natália	1.	GCSL BA	1	8	9			7				24	24
43.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3			8	9	7				24	24
43.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	1				8	9	7			24	24
46.	Kozmala Peter	1.	GJH BA	1	9		9	3		2			23	23
47.	Častulíková Katarína	1.	1SG BA	1	7	3	9	2			1		22	22
47.	Homola Marek	2.	GJH BA	2	9	9	9	2		2			22	22
47.	Podžubanová Martina	2.	GPH MI	2		9	9	1		3	0		22	22
47.	Rozgoň Martin	1.	G Šurany	1	9	8		2			3		22	22
51.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3			9		9	1	2		21	21
51.	Hóz Martin	2.	Gamča BA	2		9	9	1		2			21	21
51.	Ivan Peter	1.	GJH BA	1	*	4	9	1	6	1	1		21	21
54.	Ďurina Marián	1.	G Šurany	1	6	3	9	1					19	19
54.	Majtán Martin	2.	GPdC PN	2		9	9				1		19	19
56.	Pándy Michal	2.	GPoš KE	3			9	9					18	18
56.	Poljovka Jakub	1.	???	1	*	*	9	9					18	18
58.	Brablecová Patrícia	2.	GBST LC	2		9	3	1	4				17	17
58.	Hruška Rajmund	2.	GPoš KE	2		9		8					17	17
60.	Remperová Natália	1.	GKom PE	1	2		9						11	11
61.	Horkavá Alexandra	2.	BiG Sučany	2	7	3	3	1	2	1	0		10	10
62.	Báb Samuel	1.	GCSL BA	1	7		2						9	9
62.	Cavalieri Costauzo	2.	GSpor NR	2			9			0			9	9
64.	Borčin Martin	1.	GCSL BA	1	6								6	6
65.	Petrová Simona	3.	ŠPMNDG BA	3			3	1		0			4	4
65.	Šimová Mária	2.	EGMT	2	2		3	1		0			4	4
67.	Németh Richard	3.	GCSL BA	3		9		1					1	1

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
68.	Glovičková Katarína	1.	GCSL BA	1									0	0
68.	Lavuš Eduard	2.	GAlej KE	2									0	0
68.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2									0	0
68.	Poláková Tatiana	1.	1SG BA	1									0	0
68.	Porges Eduard	2.	GCSL BA	2	7								0	0
68.	Schmidtová Veronika	2.	GAlej KE	2									0	0
68.	Tanzer Jozef	1.	GJH BA	1									0	0
68.	Turčeková Diana	1.	GKom PE	1									0	0