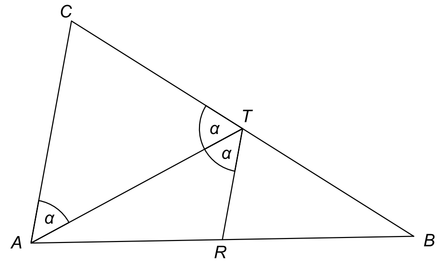
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2014/2015

Úloha č. 1: *Maťo a Hago majú svoje obľubené čísla M, H. Maťo má malú fantáziu, tak jeho obľubené číslo M je toľkociferné, aký je momentálne rok (teda momentálne je 2014 ciferné). Keďže Hago nemá fantáziu, tak jeho obľubené číslo H má presne rovnaké cifry ako M len inak usporiadané. Zrazu prišla Betka, a chcela zistiť, čo všetko zvládnu spolu. Preto zisťovala súčet $M + H$, a vyšlo jej číslo, ktorého cifry boli samé deviatky. Môžu také M, H naozaj existovať? Mohlo by sa to stať o rok (t.j. ak M, H budú 2015-ciferné)?*

Riešenie: (opravoval Palo, Veronika)
Najskôr sa pozrime, ako Maťove a Hagove čísla musia vyzerať. Predstavme si, že máme čísla M a H napísané pod sebou a ideme ich sčítať. Ako prvé si môžeme všimnúť, že súčet dvoch cifier nemôže byť väčší ako 19 $(9 + 9 = 18)$. Preto, ak chceme dostať na konci súčtu cifru 9, nemôžeme prejsť cez desiatku a súčet poslednej cifry čísla M a čísla H je presne 9. Rovnakú úvahu použijeme na ďalšie cifry čísel M a H (neprechádzali sme cez desiatku a teda nikde nám nemohla 1 zvýšiť). Nad sebou preto musia byť vždy dve cifry - *kamarátky*, ktoré spolu dávajú súčet 9. Sú to tieto dvojice (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6) a (4, 5). Všimneme si, že číslo 9 nevieme dostať ako súčet dvoch rovnakých čísel.
Keďže jedna 0 sa vždy kamaráti s práve jednou 9, jedna 1 s práve jednou 8 atď., tak v čísle M musí byť rovnaký počet cifier 0 a 9, 1 a 8, 2 a 7, 3 a 6, 4 a 5. Samozrejme, nič nebráni tomu, aby cifier (napríklad) 1 a 2 bol rôzny počet, lebo 1 a 2 sa nekamarátia (nie sú v spolu v dvojici, ktorá dáva súčet 9). Inak povedané, vieme vytvoriť dvojice medzi ciframi čísla M a preto M musí mať párny počet cifier. V tejto úvahe bolo dôležité to, že 9 sa nedá dostať súčtom rovnakých cifier (rozmyslite si prečo).
Čísla M a H sú 2014-ciferné, majú párny počer cifier, takže by sa nám ich malo podariť skonštruovať. Dá sa to mnohými spôsobmi, ukážeme si jeden z nich. Pritom sa držíme toho, čo sme si o číslach M a H ukázali. Nech číslo M má prvých 1007 cifier 1 a zvyšných 1007 cifier 8, potom H musí mať prvých 1007 cifier 8 a zvyšných 1007 cifier 1. Súčet $M + H$ má cifry samé 9 $(1 + 8 = 9)$. Fungoval by podobný postup aj pre ľubovoľné iné párne číslo?
Na otázku, či M a H môžu byť 2015-ciferné sme už nepriamo odpovedali. Číslo 2015 nie je párne, a teda neexistujú dve čísla M, H s rovnakými, ale inak usporiadanými ciframi, ktoré by v súčte dávali číslo, ktoré má ako cifry samé 9.

Úloha č. 2: *Miro má v ľavom vrecku (alebo batôžku, to je nepodstatné) jablko, nôž, faloš a trojuholník ABC, v ktorom $|AC| = 5$, $|BC| = 10$. Body T, R sú postupne body na stranách BC, AB také, že AT je ťažnica v trojuholníku ABC a TR je ťažnica v trojuholníku ATB. Ukážte, že TA je os uhla CTR.*

Riešenie: (opravovala Betka)
Ťažnica je úsečka, ktorá spája vrchol a stred protiľahlej strany. To znamená, že body T a R sú stredy strán BC a AB. Úsečka TR je potom strednou priečkou a teda je rovnobežná so stranou AC. Potom uhly $\sphericalangle CAT$ a $\sphericalangle RTA$ sú striedavé. Označme si ich α. Pozrime sa teraz na trojuholník ATC. Keďže T je stred strany BC, tak $|TC| = |AC| = 5$ cm. Odtiaľ je jasné, že trojuholník ATC je rovnoramenný, a teda uhly $\sphericalangle CAT$ a $\sphericalangle CTA$ majú rovnakú veľkosť.
Ukázali sme, že $|\sphericalangle RTA| = |\sphericalangle CAT| = |\sphericalangle CTA| = \alpha$, z čoho vyplýva, že TA je os uhla CTR.



Úloha č. 3: *Beren náhodou prehral v kasíne zopár drobných. Náhoda však účinkuje aj niekde inde. Čísla* $1, 2, \ldots, 81$ *sú náhodne vpísané do mriežky* 9×9 *(každé do jedného malého štvorčeka). Dokážte, že vieme vždy vybrať štvorec* 2×2 *taký, že súčet čísel v jeho vnútri je aspoň 138.*

Riešenie: (opravovala Linda)

Chceme dokázať, že naozaj vždy vieme nájsť štvorec s rozmermi 2×2 a s hodnotou minimálne 138 (hodnotou štvorca budeme označovať súčet jeho štyroch prvkov). Tak sa pozrime na všetky takéto štvorce. Takýchto štvorcov je 64 (premyslite si prečo). Na to, aby sme získali súčet hodnôt všetkých štvorcov potrebujeme posčítavať $64 \cdot 4 = 256$ čísel lebo na získanie hodnoty konkrétneho štvorca sme museli sčítať práve 4 čísla. My však máme v našej mriežke iba 81 čísel, čo pre nás môže znamenať len to, že niektoré čísla sme použili viackrát a tieto čísla ležia vo viacerých štvorcoch. Ktoré čísla sme použili viackrát? Koľkokrát sme ich použili?

Ak nemáme výnimočne dobrú predstavivosť, najlepšie bude ak si nakreslíme našu mriežku a pozrieme sa na konkrétne miesta - hor sa do kreslenia. Naše číslo môže ležať

- v rohu - vtedy leží iba v 1 štvorci,
- na okraji ale nie v rohu - vtedy leží vo 2 štvorcoch,
- vo vnútri - vtedy leží až v 4 štvorcoch.

Iným spôsobom ako na to prísť je premyslieť si, či môže byť naše číslo v nejakom rohu štvorca 2×2. Podľa toho, v koľkých rohoch môže byť, tak v toľkých štvorcoch 2×2 sa vyskytuje.

Keďže rohov v mriežke máme práve 4 tak vieme, že práve 4 čísla ležia iba v jednom štvorci a preto ich použijeme práve raz v našom súčte hodnôt všetkých štvorcov. Na okraji máme práve 28 čísel, ktoré použijeme 2-krát v našom súčte hodnôt a čísla vo vnútri, ktorých je 49 použijeme až 4-krát v našom súčte.

Ak by každý z týchto 64 štvorcov mal hodnotu maximálne 137, tak vieme, že súčet hodnôt týchto 64 štvorcov by nepresiahol $64 \cdot 137 = 8768$. Takže ak by náš súčet hodnôt bol vždy väčší ako 8768 (teda aj náš najmenší možný súčet hodnôt), tak vieme s istotou povedať, že sme tvrdenie zo zadania dokázali.

Aký je náš najmenší možný súčet hodnôt? Ktoré čísla započítame koľkokrát? Oplatí sa nám započítať 4-krát číslo 81 a 1-krát číslo 1 alebo naopak?

Keďže máme čísla $1, 2, 3, \ldots, 80, 81$, tak chceme najväčšie čísla použiť čo najmenej krát. Preto rozdelíme naše čísla nasledovne

- $78, 79, 80, 81$ použijeme iba 1-krát,
- $50, 51, ..., 76, 77$ použijeme 2-krát,
- $1, 2, 3, ..., 48, 49$ použijeme 4-krát.

Teraz už len zistime hodnotu nášho najmenšieho súčtu:

$1 \cdot (78 + 79 + 80 + 81) + 2 \cdot (50 + 51 + ... + 76 + 77) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 48 + 49) = 1 \cdot 318 + 2 \cdot 1778 + 4 \cdot 1225 = 8774$

Náš najmenší súčet je ale väčší ako 8768 a z toho čo sme si už vyššie povedali vieme povedať, že vždy vieme nájsť taký štvorec, ktorého hodnota je minimálne 138.

Úloha č. 4: *Ľubo má v ľavom vrecku (alebo batôžku, zase je to nepodstatné) jablko, nôž, faloš a trojuholník* ABC*, v ktorom* $|AB| = 4$ cm, $|\mathrm{AC}| = 6$ cm *a* $|\sphericalangle BAC| = 150°$. *Zostrojte trojuholník dvojnásobného obsahu, ktorého niektoré dve strany sú zhodné (t.j. majú rovnakú dĺžku) s niektorými dvoma stranami trojuholníka* ABC. *Nájdite všetky riešenia.*

Riešenie: (opravoval Ľubo, Kubo)

Chceme dostať trojuholník s dvojnásobným obsahom,ktorý má aspoň dve strany rovnaké ako náš pôvodný. To znamená, že potrebujeme vyriešiť tri možné prípady, a to

a) dve zhodné strany budú AB a AC
b) dve zhodné strany budú AB a BC
c) dve zhodné strany budú AC a BC

Dôležité je si uvedomiť, že nám teraz stačí nájsť počet rôznych trojuholníkov v každej z týchto možností. Potom o týchto trojuholníkoch vieme s určitosťou povedať, že medzi nimi nie sú žiadne dva rovnaké. Sporom, nech nejaké také dva trojuholníky dostaneme. Potom sme ich nutne museli dostať v dvoch rôznych možnostiach. Z toho nám však vyplýva, že majú všetky tri strany zhodné s pôvodným trojuholníkom ABC. Toto je však zjavne spor s tým, že novovzniknuté trojuholníky majú dvojnásobný obsah oproti trojuholníku ABC.

Keďže chceme hľadať trojuholníky s dvojnásobným obsahom oproti trojuholníku ABC, môže byť užitočné vedieť, aký obsah má samotný trojuholník ABC. Ak si zoberieme stranu AC za podstavu, tak z veľkosti uhla $\sphericalangle BAC$ a dĺžky strany AB vieme zrátať výšku v_b na stranu AC ako

$$v_b = |AB| \sin(|\sphericalangle BAC|) = 4 \sin(150°) = 2.$$

No a teraz už jednoducho vieme, že obsah trojuholníka ABC je daný vzťahom:

$$S = \frac{v_b \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6 \text{ cm}^2.$$

Z tohto vzťahu si však aj môžme uvedomiť, čo vlastne budeme počas celého riešenia robiť. Tým, že sa snažíme zachovať dĺžky niektorých strán a zdvojnásobovať obsah, nutne musíme zdvojnásobiť výšku. Zaujímavejším faktom však je, že je jedno, ktorú z výšok zdvojnásobíme tzn. ak nájdeme trojuholník, ktorý má dve strany zhodné s trojuholníkom ABC a má dvojnásobnú výšku na jednu z týchto strán, musí mať dvojnásobnú výšku aj na druhú z nich, keďže

$$S = \frac{v_a \cdot a}{2} = \frac{v_b \cdot b}{2} = \frac{v_c \cdot c}{2}.$$

Poďme sa teda pozrieť na jednotlivé podproblémy:

a) Vieme, že potrebujeme nájsť trojuholník s obsahom 12 cm^2. Ak by sme teda chceli zdvojnásobiť výšku na stranu AC, ktorá má pôvodne 2 cm, tak by nová výška musela mať 4 cm. Ale to je vlastne dĺžka strany AB. A tak existuje len jeden vyhovujúci trojuholník v tejto možnosti a to pravouhlý trojuholník s dĺžkami odvesien 4 cm a 6 cm (ktorý všetci skonštruovať vieme).

b) V tomto prípade sa nám však už počíta ťažšie, keďže dĺžku strany BC nevieme veľmi pekne vyjadriť. No my stále máme poznatok o zdvojnásobovaní výšky. Zoberme si za základňu stranu BC a v polrovine BCA narysujme priamku p rovnobežnú s BC, ktorej vzdialenosť od priamky BC je dvakrát taká veľká ako výška na stranu BC. Teraz nám už len stačí urobiť kružnicu k z bodu B s polomerom 4 cm (dĺžka strany AB). Táto sa nám pretne s priamkou p v dvoch bodoch, čím dostaneme dve možnosti trojuholníkov s dĺžkami dvoch strán $|AB|$, $|BC|$ a dvakrát väčším obsahom oproti trojuholníku ABC.

c) Tak ako v možnosti b) si zoberieme za podstavu stranu BC a narysujeme priamku p. Tentokrát však narysujeme kružnicu l so stredom v bode C a polomerom 6 cm (dĺžka strany AC). A podobne ako v možnosti b) aj tu dostávame dva prieniky priamky p a kružnice l, čím dostávame dva trojuholníky dĺžkami dvoch strán $|AC|$, $|BC|$ a dvakrát väčším obsahom oproti trojuholníku ABC.

Odpoveď: Existuje 5 rôznych trojuholníkov, ktoré majú dve strany rovnaké s trojuholníkom ABC a zároveň dvojnásobný obsah.

Úloha č. 5: *Prirodzene krásny Hopko si hľadá prirodzene krásne dievča. Pomôžte mu! Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b takých, že platí $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$.*

Riešenie: (opravoval Hiphop, Luxusko)

Úloha bola ako vyšitá na precvičenie práce z výrazmi, trošku ťažšími než bežne stretneme v škole. Roznásobíme obe strany a upravíme do čo najjednoduchšieho tvaru:

$$a^4 + a^3b^3 + ab + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$a^2b^2 + 1 = 4a^2 + 6ab + 4b^2$$

Existuje „kladivové“ riešenie[1], ktoré niektorí z Vás zvolili, spočívajúce vo vyjadrení poslednej rovnosti ako kvadratickej rovnice v premennej a s parametrom b (alebo naopak). Určíme si čo budú koeficienty, vyjadríme známym vzorčekom korene. Nakoniec si všimneme, že v prirodzených číslach nám to sadne iba pre málo dvojíc a, b.
Ak ale tento vzorček nepoznáme, alebo sme leniví, radšej ešte ponaťahujeme poslednú rovnosť aby nám výsledok vypadol sám. Na oboch stranách máme skoro štvorec. Vľavo aj vpravo chýba $2ab$, tak prečo ho tam nepridať?

$$a^2b^2 + 2ab + 1 = 4a^2 + 8ab + 4b^2$$
$$(ab + 1)^2 = (2a + 2b)^2$$

Pre prirodzené a, b budú $ab + 1$ aj $2a + 2b$ kladné takže môžeme beztrestne odmocniť a neriešiť prípady keby bolo niečo záporné.

$$ab + 1 = 2a + 2b$$
$$ab - 2a - 2b + 1 = 0$$

Aby sme mali prehľad v možných riešeniach, chceli by sme poslednú rovnicu nejak rozdeliť na súčin – vhodný tvar by mohol byť $(a - x)(b - y) = ab - xb - yb + xy$. V našom prípade to vyzerá na $(a - 2)(b - 2)$. Pridajme teda 3 k obom stranám.

$$ab - 2a - 2b + 4 = 3$$
$$(a - 2)(b - 2) = 3$$

[1] inak povedané riešenie hrubou silou

Celočíselné delitele čísla 3 sú však iba tieto: $-3,\ -1,\ 1,\ 3$ (rozmyslite si, prečo nestačí uvažovať prirodzenočíselné delitele). Nakoľko a, b sú obe prirodzené, tak ani $a-2$, ani $b-2$ sa nemôže rovnať -3. Teda jedna zo zátvoriek bude 1 a druhá 3. Preto (a, b) je buď $(3, 5)$ alebo $(5, 3)$. Hľa, veď ono to dáva zmysel, lebo rovnica zo zadania bola symetrická (t.j. ak zameníme a za b tak sa nezmení).

Úloha č. 6: *Miki chce zistiť superschopnosti jedného psa (ktorý je kladný a reálny). Máme ľubovoľné kladné reálne čísla $p,\ e,\ s,$ pre ktoré platí $pes = 1$. Dokážte, že vždy platí $p^{e+s}e^{s+p}s^{p+e} \leq 1$.*

Riešenie: (opravovali JeFo a Murko)

Rozhodli sme sa zaradiť dve riešenia podľa riešiteľov. Prvé, viac-menej priamočiare riešenie nevyžaduje žiadne špeciálne poznatky. Druhé riešenie je trikovejšie a určené skôr náročnejšiemu čitateľovi.

Riešenie podľa Eduarda Batmendijna:

Keďže $p, e, s \in \mathbb{R}^+$, tak $p^p \cdot e^e \cdot s^s > 0$, teda $\frac{p^p \cdot e^e \cdot s^s}{p^p \cdot e^e \cdot s^s} = 1$. Preto

$$p^{e+s}e^{p+s}s^{e+p} = \frac{p^{p+e+s}e^{p+e+s}s^{p+e+s}}{p^p e^e s^s} = \frac{(pes)^{p+e+s}}{p^p e^e s^s} = \frac{1}{p^p e^e s^s}.$$

$\forall$[2] $k \in \mathbb{R}^+$ platí $k^k \geq k$. Dôkaz:

- Ak $k = 1$, tak $k^k = 1 \geq k$.
- Ak $k < 1$, tak potom je funkcia $f(x) = k^x$ klesajúca a platí $k^k > k^1 = k$.
- Ak $k > 1$, tak potom je funkcia $f(x) = k^x$ rastúca a platí $k^k > k^1 = k$.

Preto $p^p \geq p, e^e \geq e, s^s \geq s$, a keďže p, e, s sú kladné, tak nutne platí $p^p e^e s^s \geq pes = 1$. Z toho ale nutne platí $\frac{1}{p^p e^e s^s} \leq 1$ a keďže $\frac{1}{p^p e^e s^s} = p^{e+s}e^{p+s}s^{e+p}$, tak aj $p^{e+s}e^{p+s}s^{e+p} \leq 1$, čo sme chceli dokázať.

Riešenie podľa Bui Truc Lama:

Najskôr si úlohu transformujeme:

$$p^{e+s}e^{p+s}s^{e+p} = (es)^p(sp)^e(pe)^s = \frac{1}{p^p e^e s^s}$$

Z AG-nerovnosti dostaneme:

$$\frac{p+e+s}{3} \geq \sqrt[3]{pes}$$
$$p+e+s \geq 3$$

Použitím váženej AG-nerovnosti[3] (s váhami $\frac{p}{p+e+s} + \frac{e}{p+e+s} + \frac{s}{p+e+s} = 1$) dostaneme:

$$1 = \frac{p \cdot \frac{1}{p} + e \cdot \frac{1}{e} + s \cdot \frac{1}{s}}{3} \geq \frac{p \cdot \frac{1}{p} + e \cdot \frac{1}{e} + s \cdot \frac{1}{s}}{p+e+s} \geq \sqrt[p+e+s]{\frac{1}{p^p} \cdot \frac{1}{e^e} \cdot \frac{1}{s^s}}$$
$$1 \geq \frac{1}{p^p e^e s^s}$$

čo sme chceli dokázať.

Úloha č. 7: *Maťko sa hrá na detektíva. Kto je vrah? Aký mohol mať motív? Kde zahodil vražednú zbraň? Pre ktoré prirodzené čísla n sú všetky n-ciferné čísla, ktoré obsahujú práve jednu cifru 7 a ostatné cifry 1, prvočísla? Nájdite všetky možnosti*[4].

Riešenie: (opravoval Samo, Vodka)

Keď sa pozrieme na takúto úlohu, vyzerá celkom zložito. Nevieme totiž jedoducho overiť, či je nejaké číslo prvočíslom alebo nie. Ak by sme chceli napríklad zisiť, či n je prvočíslo, museli by sme skúsiť, či je deliteľné nejakým prirodzeným číslom od 2 po $\sqrt{n}$. To je však pre väčšie n ťažké. Poznáme kritériá pre deliteľnosť 2, 3, či 5, kritérium pre deliteľnosť pre nejaké väčšie číslo ako 29 však asi už také pekné nebude. Preto by mohlo platiť, že od nejakého n budú už tieto čísla nejakého deliteľa mať.

O deliteľnosti čísla, ktoré má $n-1$ jednotiek a 1 sedmičku toho ale veľa povedať nevieme. Poďme si ho teda rozdeliť na súčet nejakých dvoch krajších čísel. Vieme ho zapísať ako číslo s n jednotkami. Označme si ho ako $B(n)$. A k nemu potrebujeme prirátať číslo, ktoré nám práve jednu cifru $B(n)$ zmení na sedmičku. To číslo bude $6 \cdot 10^j$,

[2]Znak $\forall$ sa číta ako pre všetky alebo pre každé.

[3]O váženej AG-nerovnosti sa môžete niečo dočítať napríklad na `http://mks.mff.cuni.cz/library/NerovnostiMTa/NerovnostiMTa.pdf`.

[4]stačí, ak zodpoviete len na poslednú otázku

pričom $j \in \{0, \dots, n-1\}$ nám určuje cifru, na ktorej je sedmička. Teda množinu n-ciferných číslel zo zadania vieme zapísať ako:

$$A(n) = B(n) + 6 \cdot 10^j = \sum_{i=0}^{n-1} 10^i + 6 \cdot 10^j$$

Keď budeme skúšať deliteľnosť $A(n)$ nejakým číslom, kde poznáme pekné pravidlo, tak narazíme na problém. Pre väčšinu n totiž deliteľné nebudú. Poďme sa teda napríklad pozrieť na deliteľnosť siedmimi. Aj keď nepoznáme žiadne pravidlo, vieme si pomôcť. Pozrime sa na zvyšky $B(n)$ po delení 7.

n	1	2	3	4	5	6	7
$B(n)$	1	11	111	1111	11111	111111	1111111
$B(n) \mod 7$	1	4	6	5	2	0	1

Vidíme, že $B(1) \equiv B(7) \pmod 7$ (čítaj $B(1)$ má rovnaký zvyšok po delení 7, ako $B(7)$). Dokonca vieme povedať, že $B(n+6) \equiv B(n) \pmod 7$, pretože $B(n+6) = 10^n B(6) + B(n)$, pričom $B(6) \equiv 0 \pmod 7$. Takže si už jednoducho vieme dorátať zvyšok ľubovoľného $B(n)$ po delení 7. Teraz sa poďme pozrieť na zvyšky $6 \cdot 10^j$ po delení 7.

j	0	1	2	3	4	5
$6 \cdot 10^j$	6	60	600	6000	60000	600000
$6 \cdot 10^j \mod 7$	6	4	5	1	3	2

Pre $i \in \{0, \dots, 5\}$ dostávame všetky zvyšky od 1 po 6. To je ekvivalentné tomu, ako sa nám zmení zvyšok nášho čísla, keď zmeníme jednu z posledných 6 cifier na sedmičku (teda uvažujeme, že $n \geq 6$). Označme si tento zvyšok ako r. Potom na to, aby celé číslo bolo deliteľné 7, musí $B(n)$ dávať zvyšok $7-r$. Všimnime si, že takéto r môžme vybrať vždy, okrem prípadu keď $B(n) \equiv 0 \pmod 7$. Musíme teda ešte vyriešiť takéto prípady. Keďže $B(6) \equiv 0 \pmod 7$, v takýchto prípadoch platí $n = 6k$, pričom $k \in \mathbb{N}$. Ciferný súčet takéhoto čísla bude $6k + 6 = 3 \cdot (2k + 2)$. To ale znamená, že ľubovoľné takéto číslo bude deliteľné tromi. Teda nebude prvočíslo (3 to byť nemôže).
Musíme ešte vyriešiť prípady, keď $n < 6$. Pri tých však vieme veľmi ľahko a rýchlo povedať, či dané tvrdenie platí. Pre $n = 1$ máme $A(n) = \{7\}$. Pre $n = 2$ je zas $A(n) = \{17, 71\}$. Preto pre ne tvrdenie platí. Ale $117 = 3^2 \cdot 13$, $1711 = 29 \cdot 59$ a $11711 = 7^2 \cdot 239$. Takže $n \in \{1, 2\}$.

__**Úloha č. 8:**__ *Jožo má v ľavom vrecku (alebo batôžku, stále je to nepodstatné) jablko, nôž, faloš a štvorec*[5]. *Jožo ale obľubuje hlavne ostrouhlé trojuholníky. Je možné, aby tento štvorec rozkrájal*[6] *konečným počtom rezov na ostrouhlé trojuholníky? Rezom v tomto prípade myslíme nejakú úsečku, ktorá môže mať svoje koncové body aj vnútri štvorca.*

Riešenie: (opravoval Cvrki)
Našou úlohou je zistiť, či vieme štvorec rozdeliť konečným počtom rezov na ostroulé trojuholníky. Odpoveď nebudeme tajiť a povieme si ju hneď teraz — dá sa to!
V tomto vzoráku si najskôr povieme, ako sa dá na nejaké rozrezanie prísť. Potom si povieme, ako dokázať, že sme to rozrezali naozaj na ostrouhlé trojuholníky. Nakoniec si povieme, ako sa dá prejsť od prístupu *idem dokázať, že sa to nedá* k prístupu *tak predsa len sa to dá.*

Ako to rozrezať:
Uvedieme si zopár nápadov, ako by sa dalo na nejaké rozrezanie prísť:

- ⋄ Z každého rohu štvorca, musí ísť aspoň jedna hrana. Ináč by nám ostal pravý uhol, a teda nejaký trojuholník by nebol ostrouhlý. Z podobných dôvodov platí, že ak máme nejaký vrchol vnútri štvorca, tak z neho musí ísť aspoň 5 hrán. A nakoniec z vrcholu na niektorej zo strán štvorca musia ísť aspoň dve hrany.
  Skúsme vymyslieť čo najjednoduchšie rozrezanie. Stačí chvíľu skúšať a zistíme, že ak máme vo vnútri štvorca iba jeden (prípadne žiadny) vrchol, tak nevieme dostať iba ostrouhlé trojuholníky. Nebudú nám stačiť vnútri štvorca dva vrcholy (z každého vyšleme najmenší počet hrán, teda 5)? Určite budeme potrebovať aj nejaké vrcholy trojuholníkov na stranách štvorca, no znie to nádejne. Vyskúšajte si, či sa vám takto podarí rozdeliť štvorec na ostrouhlé trojuholníky.
- ⋄ Skúste si dnu do štvorca nakresliť menší štvorec, rovnako natočený a s rovnakým stredom ako pôvodný štvorec. Vedeli by ste toto "medzištvorcie"rozdeliť na ostrouhlé trojuholníky? Ak nie, tak zmenšite vnútorný štvorec. Ak áno, tak sme hotoví. Teda až na malú drobnosť — dnu nám opäť ostal štvorec. Takže sme vlastne nič nedocielili. No čo keby sme dnu namiesto štvorca vkreslili iný pravidelný n-uholník? Všetky pravidelné n-uholníky (okrem štvorca) sa delia na ostrouhlé trojuholníky veľmi jednoducho. Nuž a potom nám stačí rozrezať na ostrouhlé trojuholníky len ten zvyšok medzi štvorcom a pravidelným n-uholníkom . Skúste, či by ste to pre nejaký vhodne zvolený pravidelný n-uholník zvládli :)

[5] to je ale prekvapenie
[6] trojuholníky sa nedajú lepiť dokopy

- ◇ Už sme si povedali, že pravidelný n-uholník sa dá pre $n \neq 4$ rozrezať na ostrouhlé trojuholníky veľmi jednoducho. Vedeli by ste rovnoramenný pravouhlý trojuholník rozrezať na "skoro" pravidelný 5-uholník (slovo skoro je podstatné) a dva ostrouhlé trojuholníky? Ak áno, tak by ste mali zvládnuť rozrezať na ostrouhlé trojuholníky aj celý štvorec.

Samozrejme je veľa ďalších možných rozrezaní. Len medzi vašimi riešeniami bolo 10 rôznych typov.

<u>Ako dokázať správnosť:</u>
Je dôležité uvedomiť si, že nestačí iba načrtnúť/nakresliť/narysovať vyhovujúce rozrezanie. Obrázok v takomto prípade ani náhodou nenahrádza dôkaz, môže byť len pomôckou. Aj presné rysovanie je iba určité aproximácia a nevieme vedecky povedať ako presná (t.j., aj keď trojuholníky môžu vyzerať ostrouhlo, mohlo sa tak stať len vďaka nepresnému rysovaniu a matematicky nevieme overiť, či sme rysovali presne).
Dokázať ostrouhlosť trojuholníkov sa dalo tiež viacerými spôsobmi:

- ◇ Jeden z možných prístupov je analytický — určím presné súradnice všetkých vrcholov, a potom pre každý uhol overím, či je ostrý. Toto overenie sa dá robiť rôznymi spôsobmi, napríklad rýchlo a elegantne využitím skalárneho súčinu. V správnom analytickom riešení nie je nutné dokazovať, že každý jeden uhol je ostrouhlý. Stačí udať presné súradnice vrcholov a rozrezanie (napríklad náčrtom na štvorčekový papier, pričom vrcholy sú v mrežových bodoch) a napísať metódu akou sa dá overiť ostrosť uhlov.
- ◇ Ďalší možný prístup využíva fakt, že uhol v trojuholníku je ostrý práve vtedy, keď k nemu prislúchajúci vrchol leží mimo Tálesovej kružnice nad protiľahlou stranou. Tento prístup je praktický v prípade, keď máme relatívne málo vrcholov vo vnútri trojuholníka.
- ◇ Pri niektorých rozrezaniach sa dá ostrouhlosť trojuholníkov dokázať veľmi jednoducho len pomocou odhadovania veľkosti uhlov. Často sa dá využiť fakt, že v rovnoramennom trojuholníku sú oba uhly pri základni ostré. Prípadne fungujú veľmi hrubé odhady — uhol menší od pravého je ostrý a podobne. Prácu nám vie veľmi zjednodušiť rozrezanie, ktoré je symetrické podľa všetkých osí štvorca. Vtedy nám stačí overiť len rádovo štvrtinu trojuholníkov.

Opäť platí, že ste objavili aj niekoľko iných možných prístupov.

<u>Ako zmeniť prístup:</u>
Niektorým z vás sa určite pri tomto príklade stalo, že ste sa rozhodli dokázať, že sa to nedá. A niektorí to aj dokázali, ale očividne niekde spravili nepravdivú úvahu a neodhalili to. Ak už raz sami seba presvedčíte, že to nejde, tak je veľmi ťažké zmeniť názor. Vo všeobecnosti je najlepší spôsob neriešiť matematické problémy sám — čím viac ľudí v tíme, tým menšia šanca, že si všetci budú myslieť, že sa to nedá. No v súťaži ako KMS to nie je povolené. Tu sú rady, ako sa z tohto problému dostať aj pri samostatnej práci:

- ◇ Aj ak chcete dokázať, že sa niečo nedá, tak si vyskúšajte spraviť to. Možno zistíte, že sa to predsa len dá.
- ◇ Pri dôkaze, že sa to nedá, kontrolujte každý jeden krok a snažte sa vymyslieť situáciu, kedy by neplatil. Častý argument riešení, ktoré sa snažili dokázať, že sa to nedá, bol nasledovný: *ak by sme mali nejaké vrcholy dnu vo štvorci, tak aspoň z niektorých musí ísť hrana, ktorá má druhý koniec na strane štvorca. A tým pádom rozdelí priamy uhol na ostrý a tupý, čiže dostaneme tupouhlý trojuholník.* Ak sa nad týmto argumentom zamyslíme, tak zistíme, že neplatí. Stačí, aby nám zo všetkých vrcholov na stranách vychádzali aspoň 2 hrany.
- ◇ Overte si, či ste náhodou nedokázali zjavnú blbosť — môže sa stať, že váš dôkaz vyzerá vcelku dôveryhodne, no v skutočnosti dokazuje niečo, čo zjavne nie je pravda. Konkrétne k našej úlohe — niektoré z dôkazov, že sa to nedá, dokázali aj to, že sa to nedá ani pre pravidelný 5-uholník. To však zjavne ide.

Na záver je tu zopár námetov na rozmýšlanie počas dlhých zimných večerov:

- ◇ Na koľko najmenej trojuholníkov sa to dá?
- ◇ Koľko najmenej typov zhodných trojuholníkov nám stačí?
- ◇ Koľko najmenej typov podobných trojuholníkov nám stačí?
- ◇ Skúste vymyslieť, čo najprefíkanejší dôkaz, že sa to nedá (t.j., dôkaz, kde sa bude fakt ťažko hľadať chyba).
- ◇ Vedeli by ste nájsť taký n-uholník (nie nutne pravidelný), ktorý sa nedá rozrezať na ostrouhlé trojuholníky?

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Niekto si praje svetový mier, iný zase nový mobil, no Aňa si praje trojuholník do ľavého vrecka. Dokážte, že existuje trojuholník (so štandartným značením strán a uhlov), pre ktorého ťažnice platí $t_a^2 + t_b^2 = t_c^2$ a pre ktorého výšky platí $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$. Ďalej dokážte, že pre jeho uhly platí $|\alpha - \beta| = 90°$ a $cos\gamma = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.*
<u>Riešenie:</u> (opravoval Miki)

Máme ukázať, či existuje trojuholník spĺňajúci dve rovnosti. Tieto rovnosti hovoria niečo o súčte dĺžok ťažníc a výšok. Je dobré si uvedomiť, že tieto dĺžky vieme ľahko spočítať. Preto by sme si mali hneď uvedomiť, že chceme popočítať dĺžky a niečo z toho vyvodiť.

Z kosínusovej vety vieme o ťažnici t_a že: $t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$ a obdobne aj pre ťažnice t_b, t_c Teraz sa nám ponúka dosadiť tieto vyjadrenia do našej podmienky $t_a^2 + t_b^2 = t_c^2$:

$$\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2) + \frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2) = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$$

Z čoho po úprave dostávame $5c^2 = a^2 + b^2$

Navyše chceme, aby zároveň aj pre výšky platil vzťah $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$, preto si chceme vyjadriť výšky v závislosti na dĺžkach strán trojuholníka. Nech S je dvojnásobok obsahu trojuholníka ABC. Potom $v_a = \frac{S}{a}$, obdobne aj ostatné výšky. Dosadením do vzťahu o výškach dostávame:

$$\left(\frac{S}{a}\right)^2 + \left(\frac{S}{b}\right)^2 = \left(\frac{S}{c}\right)^2$$

Z čoho po vydelení S^2 a prenásobením $a^2b^2c^2$ dostávame:

$$b^2c^2 + a^2c^2 = a^2b^2$$
$$c^2(a^2+b^2) = a^2b^2$$

Prepísali sme teda podmienky o ťažniciach a výškach na podmienky o stranách trojuholníka ABC. Pri pozeraní na podmienky by sme si mali všimnúť, že sú homogénne (to znamená, že ak všetky strany zväčšíme λ-krát, tak rovnosti budú stále splnené. Vyberáme si teda jeden z mnoha podobných trojuholníkov). Vieme si teda pridať podmienku na veľkosť jednej strany, aby sa nám ľahšie počítalo. Dobrá podmienka by mohla byť $c^2 = 1$. Rovnosti sa nám následne zjednodušia na:

$$5 = a^2 + b^2 = a^2b^2$$

Túto sústavu hravo vyriešime. Napíklad dosadíme $a^2 = 5 - b^2$ do druhej rovnosti a získame $5 = (5-b^2)b^2$. Po vyriešení kvadratickej rovnice dostaneme korene $b_1^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $b_2^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Teraz už iba dorátame $a_1^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $a_2^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

BUNV $b \geq a$ Zoberme si a_1, b_1 a skontrolujme trojuholníkovú nerovnosť $b - a \leq c \leq b + a$ (rozmyslite si, že je to naozaj trojuholníková nerovnosť).

$$0.726 \doteq \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \leq 1 \leq \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \doteq 3.078$$

Tým sme dokázali, že existuje vyhovujúci trojuholník.

Teraz ľahko pomocou kosínusovej vety zrátame $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 1}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Čo sme chceli dokázať. Teraz si vyjadríme aj ostatné cos, aby sme mohli použiť súčtové vzorce na rozklad $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Lebo ak tento súčet bude 0, tak potom $|\alpha - \beta| = 90°$

Takže obdobne vyjadríme: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, $|\cos\beta| = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

Absolútnu hodnotu máme preto, že vieme vyjadriť iba $\cos^2\beta$ Keby sme chceli vyjadrovať samotné $\cos\beta$ tak by nám pod odmocninou vzniklo záporné číslo. Teraz si všimneme, že $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. My ale vieme, že $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, takže $\sin\alpha = |\cos\beta|$, obdobne $\sin\beta = |\cos\alpha|$ Z kosínusovej vety vieme, že $\cos\beta$ je záporný, ak $b^2 > a^2 + c^2$ Pretože vieme, že tento výraz je záporný (dosadením), tak $\sin\alpha = -\cos\beta$. Dosadením dostávame:

$$\cos(\alpha-\beta) = \left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = 0$$

Takže rozdiel $|\alpha - \beta| = 90°$ Čo sme chceli dokázať.

Príklad bol do veľkej miery počítací. Ale bolo potrebné si uvedomiť čo ideme počítať a ako najefektívnejšie to vieme spraviť.

Úloha č. 10: *Koniec srandy. Tabuľku 6×6 obsahujúcu len čísla 0 a 1 nazvime pravá ak súčet čísel v každom riadku a každom stĺpci je 3. Dve pravé tabuľky nazvime podobné, ak jednu môžeme dostať z druhej iba preusporiadaním riadkov alebo stĺpcov. Nájdite najväčšiu možnú množinu pravých tabuliek, ktoré sú každá s každou navzájom podobné.*

Riešenie: (opravoval Mišo, Jožo)
Najprv sa pozrime, čo to znamená, keď sú dve tabuľky *podobné*. Ak sú tabuľky A a B *podobné* (čo budeme ďalej zapisovať $A \sim B$), tak vieme riadky a stĺpce tabuľky A preusporiadať tak, aby sme dostali tabuľku B. Potrebujeme nájsť vhodný spôsob ako si to preusporiadanie predstaviť. Očíslujme si riadky zhora a stĺpce zľava číslami 1 až 6. Každú tabuľku *podobnú* s A určíme poradím riadkov a stĺpcov pôvodnej tabuľky A (napr. 124635 pre riadky a 654312 pre stĺpce), takto je tabuľka jednoznačne určená, pričom je jedno, či najprv prehadzujeme riadky alebo stĺpce (skúste si to!). Toto preusporiadanie riadkov a stĺpcov budeme nazývať *permutácia* tabuľky A.
Na začiatok si môžeme všimnúť, že ak A je *pravá* tabuľka, je zrejmé, že aj všetky tabuľky s ňou *podobné* sú *pravé*. Ak $A \sim B$ a $B \sim C$, tak aj $A \sim C$. Tým pádom nám na určenie ľubovoľnej množiny navzájom *podobných* tabuliek stačí jedna tabuľka z tej množiny.
Zoberme si *pravú* tabuľku A. Ako získame všetky tabuľky s ňou podobné? Tak, že spravíme všetky *permutácie* jej stĺpcov a ku každej všetky permutácie riadkov (čiže všetky možné preusporiadania riadkov a stĺcov). Dostaneme všetky tabuľky *podobné* s A, ktorých bude $(6!)^2$. Problémom je, že nejaké sa tam môžu opakovať.
Zoberme si ľubovoľné dve *podobné* tabuľky A, B. Nech π_1 je *permutácia* prevádzajúca tabuľku A na B a π_2 *permutácia* prevádzajúca B na A. *Permutáciu* π tabuľky A nazvime *pevnou*, ak tabuľku A nezmení (za *pevnú permutáciu* považujeme aj to, keď s tabuľkou nič nespravíme). Potom, ak vykonáme za sebou *premutácie* π_2, π, π_1 je zjavné, že dostaneme znovu tabuľku B, čiže ide o *pevnú permutáciu* tabuľky B. Ak má teda tabuľka A m a tabuľka B n *pevných permutácií*, tak musí platiť $m \leq n$. Výmena tabuliek A a B tieto úvahy neovplyvní a dostaneme $n \leq m$ a teda musí platiť $m = n$.
Ak si zoberieme ľubovoľnú *pravú* tabuľku, ktorá má n *pevných permutácií*, každá tabuľka s ňou *podobná* bude mať tiež n *pevných permutácií*. Množina tabuliek *podobných* s tabuľkou A bude obsahovať $(6!)^2/n$ prvkov. Táto množina bude najväčšia pre tabuľku s najmenším počtom *vlastných permutácií*.

Pri skúmaní všetkých možných *pravých* tabuliek zistíme, že sú dosť rozdielne. Preto nájdeme vhodný spôsob ako si rozdeliť tabuľky na niekoľko prípadov a všetky prípady rozoberieme. Keďže *podobné* tabuľky majú rovnaký počet *pevných permutácií*, vieme z nich vybrať tú tabuľku, s ktorou sa nám bude ľahšie pracovať. Napríklad ku každej tabuľke vieme nájsť *podobnú* tabuľku v tvare A, z tej budeme zakaždým vychádzať. Počas umiestňovania prvkov budeme bez ujmy na všeobecnosti (ďalej len BUNV) umiestňovať prvky vhodným spôsobom, ten totiž vieme dosiahnuť preusporiadaním riadkov a stĺpcov. Prvky umiestňujeme tak, aby sa výsledná tabuľka nedala previesť na tabuľku, ktorú sme už rozobrali. Zápisom (r, s) budeme označovať políčko tabuľky v riadku r a stĺpci s.

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Ukážeme, že najmenší počet *pevných permutácií* je 4 a to tak, že rozoberieme všetky možnosti a o každej *pravej* tabuľke ukážeme, že má aspoň 4 *pevné permutácie*. Potom len nájdeme tabuľku s práve štyrmi *pevnými permutáciami*.
Zoberme si tabuľky, ktoré majú aspoň dva riadky rovnaké (pre stĺpce to vyjde rovnako), BUNV nech 1. a 2. riadok sú rovnaké.

- Keby $(3, 2) = 1$ (tabuľka B), tak máme dve *pevné permutácie*: výmena 1. a 2. stĺpca a výmena 1. a 2. riadku. Spolu s ich kombináciami (vymeníme stĺpce aj riadky alebo nevymeníme nič) dostávame aspoň $2^2 = 4$ *pevné permutácie* (bez ohľadu na ostatné políčka). Toto zahŕňa aj prípad $(3, 3) = 1$, len vymeníme 2. a 3. stĺpec.
- Ak $(3, 2) = (3, 3) = 0$, tak do 2. a 3. stĺpca musíme pridať jednu jednotku, každú do iného riadku (ak by sme ich pridali do rovnakého, tak dostávame tabuľku podobnú s B). BUNV na pozície $(4, 2)$ a $(5, 3)$. Do 4. 5. a 6. stĺpca potrebujeme doplniť po jednej nule BUNV na $(3, 4), (4, 5), (5, 6)$ dostávame tak tabuľku C, kde máme aspoň 4 *pevné permutácie*: výmena 1. a 2. riadku; výmena 1. a 2., 4. a 5. stĺpca a súčasne 3. a 4. riadku; a ich kombinácie.

Ostali nám len tabuľky s navzájom rôznymi stĺpcami a riadkami. Vtedy existuje riadok, ktorý má dve jednotky v stĺpcoch 1 až 3. (rozmyslite si prečo), preto BUNV môžeme položiť $(2, 2) = 1$. Ďalej zvyšné jednotky v 2. riadku a 2. stĺpci môžeme BUNV umiestniť na $(2, 4)$ a $(4, 2)$ (na miestach $(2, 3)$ ani $(3, 2)$ nemôžu byť, lebo by sme dostali dva rovnaké stĺpce/riadky). Teraz vyskúšame všetky možnosti na políčkach štvorca 2×2 uprostred tabuľky v ktorom môžeme prehadzovať riadky a stĺpce: ak vymeníme 3. a 4. stĺpec a 1. a 2. riadok, tak 1. a 2. riadok ostanú rovnaké, ale stĺpce v štvorci 2×2 sa prehodia, podobne prehodíme aj riadky. Pri umiestnení $\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$, $\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}$, $\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}$ alebo ich permutácií nedostaneme nový prípad, resp. ani *pravú* tabuľku (skúste si). Tak dostávame možnosti:

$$D = \begin{matrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{matrix},\ E = \begin{matrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&1\end{matrix},\ F = \begin{matrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{matrix}$$

Pričom každá tabuľka má aspoň 4 *vlastné permutácie* (skúste ich nájsť).

Rozobratím všetkých možností, ako môže tabuľka vyzerať sme dokázali, že každá *pravá* tabuľka má aspoň 4 *pevné permutácie*. Už nám stačí len ukázať, že existuje tabuľka - napr. tabuľka E, ktorá má práve 4 *pevné permutácie*. Ak zavedieme pojem *prienik* dvoch riadkov ako počet stĺpcov, v ktorých majú oba riadky jednotky, tak ľahko overíme, že pri *pevnej permutácii* sa *prieniky* riadkov nemenia. V tabuľke E majú 1. a 6. riadok *prienik* 0, po *pevnej permutácii* to dosiahneme iba vtedy, keď sa tieto riadky vymenia alebo ostanú na mieste.

1. Ak 1. a 6. riadok ostanú na mieste, tak *prienik* 2 majú s 1. riadkom 2. a 4. riadok, ak ostanú na mieste, musia ostať na mieste aj 3. a 5. riadok.
2. Ak vymeníme 2. a 4. riadok, musíme vymeniť aj 3. a 5. (inak by sme nedostali stĺpec 111000).
3. Ak 1. a 6. riadok vymeníme, tak ako nový 2. riadok musíme dostať pôvodný 3. alebo 5. (majú s pôvodným 6. *prienik* 1). Ak tam dáme 3. tak musíme riadky dousporiadať na (634521).
4. Ak na miesto 2. riadku dáme 5., riadky musíme usporiadať (652341).

Pri každej tejto permutácii riadkov vieme stĺpce poprehadzovať práve jedným spôsobom na pôvodnú tabuľku E. Tá má teda práve 4 *pevné permutácie*. Najväčšia množina ja množina tabuliek *podobných* s tabuľkou E a obsahuje $(6!)^2/4$ prvkov.

Trikový postup:

Tabuľku si možno predstaviť ako graf: 6 vrcholov pre stĺpce a 6 pre riadky. Ak sa v riadku r a stĺpci s nachádza jednotka, spojíme vrcholy stĺpca s a riadka r hranou. Ku každému vrcholu riadka môžeme priradiť trojicu čísel - vrcholy stĺpcov, s ktorými je spojený (teda každému riadku priradíme trojicu stĺpcov, v ktorých má jednotky). Potom namiesto tabuľky pracujeme s grafom alebo so 6-timi trojicami čísel. To nám môže uľahčiť rozoberanie jednotlivých možností.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Batmendijn Eduard	4.	CGsvM SL	14			9	9	9	9	9		45	135
1.	Švarc Radovan	4.	Česká Třebová	10			9	9	9	9	9		45	135
3.	Konečný Matěj	4.	GJir ČB	6		8	9	7	9	7			40	123
4.	Hanzely Slavomír	3.	GJAR PO	7		9	4	9	9		4		35	111
4.	Murin Marek	3.	GJH BA	7		9	9	9	9	2			38	111
6.	Hronkovičová Nina	4.	GKom PE	8			9	9	9	9			36	108
6.	Pišťák Daniel	3.	GChD Praha	5		9	9	9	9				36	108
8.	Králik Matej	4.	GJH BA	11			9	9	9	0	5		32	98
9.	Svobodová Zuzana	3.	Frýdlant ČR	3	8	5		3	9				25	97
10.	Súkeník Peter	3.	GVar ZA	7		8	9	8					25	95
11.	Kopf Daniel	3.	G Slez ČR	7		8		7			5		20	88
11.	Truc Lam Bui	4.	Gamča BA	12			9	9					18	88
13.	Halabrin Juraj	3.	GJH BA	6		7	9	2			1		19	86
14.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	1		1	9	9	6				25	84
15.	Molčan Samuel	3.	GJAR PO	6		8	9	8	9				34	83

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
16.	Prešinská Kristína	4.	GPár NR	10			6	8	9		*		23	77
17.	Darmovzal Ondřej	4.	Brno ČR	6		*	9	9	9	9			36	75
18.	Žídek Matěj	3.	Frýdlant ČR	6		9			9		6		24	74
19.	Frankovská Zuzana	3.	GJH BA	6		9	9	9	9				36	73
19.	Krakovská Ema	4.	Gamča BA	8			9	9	6	3			27	73
21.	Bodík Juro	3.	Gamča BA	8		2	9	8	9				26	70
22.	Kulla Filip	3.	BiG Sučany	7		1	9		9				19	68
23.	Král Adam	3.	GVar ZA	5		9	9	2	9		5		34	67
23.	Ralbovský Peter	3.	ŠPMNDG BA	6		0	9	6	1				16	67
23.	Tóthová Andrea	3.	GJH BA	4	3	3	3		1		2		12	67
26.	Kluvanec Roman	4.	GPár NR	7		1	9		1				11	65
26.	Nepšinská Silvia	4.	GJH BA	10					9				9	65
28.	Choma Matej	3.	Gamča BA	6					9				9	63
28.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	3	1	7		3	6				17	63
30.	Marčeková Katarína	3.	GJH BA	6		8		8					16	57
31.	Dráček František	4.	GŠkol PB	9				1	9				10	55
32.	Onduš Daniel	3.	GAlej KE	6									0	54
33.	Hollý Dominik	4.	ŠPMNDG BA	7		1	5	8	7				21	52
34.	Kurimský Ján	3.	GsvMo	5									0	50
35.	Tesař Emanuel	3.	GBST LC	7		9	0	8	6				23	49
36.	Bialas Filip	2.	GOp Praha	6									0	47
37.	Veselá Simona	4.	GJH BA	5									0	41
38.	Mišlanová Kristína	3.	GAlej KE	7									0	36
39.	Semanišinová Žaneta	3.	GAlej KE	7									0	35
40.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	3	1	8							9	34
40.	Oravkin Eduard	3.	1SG BA	7									0	34
42.	Krajmerová Barbora	3.	G Šurany	5		1	2	3	1		2		9	33
43.	Kašša Ladislav	3.	G Šamorín	6		9	3						12	29
43.	Krasula Dominik	2.	Krnov ČR	4									0	29
43.	Trenčanská Tereza	3.	Gamča BA	5					9				9	29
46.	Porubsky Michal	3.	GsvCM NR	4									0	25
47.	Petráš Peter Pavel Arthur	3.	ŠPMNDG BA	6		9	6	9					24	24
48.	Santrová Michaela	4.	GMH Trstená	10			9	2	1				12	23
49.	Martinka Matej	3.	SŠsvFA	4									0	19
50.	Kudelčíková Martina	3.	GVO ZA	6									0	14
50.	Tureničová Martina	1.	GJH BA	1		1			3				4	14
52.	Petrová Simona	3.	ŠPMNDG BA	3	3	1	1	1					6	11
53.	Barbora Dávid	4.	GFS Nová Baňa	6									0	9
53.	Liu Zhen Ning Dávid	4.	GJH BA	12									0	9
55.	Škrlec Adam	3.	GJH BA	5									0	8
55.	Vančo Šimon	3.	CGsvM SL	4									0	8
57.	Častulíková Katarína	1.	1SG BA	1		1		1					2	7
58.	Rozhoň Václav	4.	GJir ČB	6									0	0

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Sásik Tomáš	1.	Gamča BA	1	9	9	9		8		9		44	128
2.	Leinwatherová Michaela	1.	GPan BA	1	8	9	9	5			8		39	125
2.	Lipták Jozef	2.	GJGT BB	2		9	9	8	9	9	8		44	125
4.	Mičko Juraj	2.	GPoš KE	3			9	4	8	9	9		39	124
5.	Dlugošová Michaela	1.	GKuk PP	1	9	9	9	1	8				36	119
5.	Drotár Pavol	2.	GPoš KE	3			9	2	8	9	9		37	119
7.	Pajger Šimon	1.	GVO ZA	1	9	9	9	3	6				36	118
7.	Parada Matej	1.	Gamča BA	1	9	9	8	8	9		2		43	118

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
9.	Belan Pavol	1.	GVar ZA	1	9	9		6	0	9			33	115
9.	Pulmannová Barbara	1.	Gamča BA	1	9	9	9	8	8				43	115
11.	Domes Tomáš	2.	G Mendel ČR	2		9	9	7	8	7			40	114
12.	Švihorík Tomáš	1.	GPár NR	1	7	9	9	4	5				34	111
13.	Marčeková Michaela	0.	GPár NR	0	9	9	3		8		9		38	109
14.	Bošková Dagmar	1.	GJH BA	1	8	*		6	8				22	108
15.	Horanský Marek	2.	ŠPMNDG BA	2	6	9	9	6	9				33	106
16.	Krett Jakub	1.	GMA BA	1		9	7	5	7				28	105
17.	Banhegyi Tomas	3.	GJH BA	3			3	4	9	9	9		34	102
18.	Onduš Peter	1.	GAlej KE	1	9	9		1	9				28	99
19.	Smolárová Paulína	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9		2	1				21	97
20.	Mikuláš Matúš	1.	GBST LC	1	9	9	7	5	6				36	96
21.	Sučíková Svetlana	1.	G-BMA UK	1	8	9		8	8				33	95
22.	Poljovka Jakub	1.	GPár NR	1	9	9	9						27	88
22.	Sadovská Jana	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	3		0		4		24	88
24.	Poláková Nikola	1.	G Šurany	1	4	9	3	8					24	85
25.	Žídková Dorota	1.	Frýdlant ČR	1	4	9		2	8				23	84
26.	Kuťková Sára	1.	Gamča BA	1	4				7				11	81
27.	Komzala Peter	1.	GJH BA	1	7	0	9	0	1	1	3		21	74
27.	Zajacová Terézia	1.	1SG BA	1	4	9			8				21	74
29.	Homola Marek	1.	GJH BA	1	8	0	7	0	2	1	4		22	73
29.	Škotnárová Lucia	2.	G Šurany	2		9	3	4	6	1	2		24	73
31.	Svobodová Zuzana	3.	Frýdlant ČR	3				8	5		3		16	72
32.	Rozgoň Martin	1.	G Šurany	1	8	9		4					21	70
33.	Tóthová Natália	1.	GAlej KE	1									0	69
34.	Steinhauser Václav	1.	G Dacice	1	7	9	8		9				33	67
35.	Hanesz Zoltán	2.	GPoš KE	3			9	8	9				26	66
36.	Juran Matúš	3.	GJH BA	3			2	3	7	3	3		18	65
37.	Ivan Peter	1.	GJH BA	1	7	5		3	1	1	0		17	64
37.	Pándy Michal	2.	GPoš KE	3			9	4	8	6			27	64
39.	Urbán Ádám	1.	GPoš KE	1		9	9	3	8				29	63
40.	Marko Alan	1.	GMRŠ NZ	1					1	9	9		19	61
41.	Barteková Katarína	2.	GCSL BA	2			9	1	6	1	3		20	60
41.	Oravkin Richard	0.	1SG BA	0	5	9							14	60
41.	Tureničová Martina	1.	GJH BA	1	5	4	3		1				13	60
44.	Bajnohová Natália	1.	GCSL BA	1	6	9		4					19	58
45.	Pozsonyi Karol	0.	GBil BA	0	8	1	3	2	1	1	4		18	54
46.	Mach Jakub	2.	GPoš KE	2		9	3	8	7				27	53
47.	Častulíková Katarína	1.	1SG BA	1	4	9			1		1		15	52
48.	Korman Andrej	2.	G Hlohovec	3				1	7		3		11	51
49.	Ďurina Marián	1.	G Šurany	1		8	1	6					15	50
49.	Horňáková Kristína	2.	GPár NR	3			9	1	8				18	50
51.	Šimková Jarmila	1.	GPár NR	1	7	9							16	43
52.	Rosinská Veronika	2.	G Šurany	2									0	36
53.	Čatloš Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	7		3						10	35
54.	Brablecová Patrícia	2.	GBST LC	2									0	30
55.	Piala Martin	2.	GVO ZA	2									0	28
56.	Hruška Rajmund	2.	GPoš KE	2									0	26
57.	Čermák Michal	1.	1SG BA	1									0	25
58.	Májek Juraj	3.	Gamča BA	3									0	24
59.	Babjak Samuel	1.	GCSL BA	1	6	9							15	23
60.	Podžubanová Martina	2.	GPH MI	2									0	22
61.	Hladká Ľubica	2.	GJGT BB	3									0	21
61.	Hóz Martin	2.	Gamča BA	2									0	21
61.	Németh Richard	2.	GCSL BA	2									0	21

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
64.	Majtán Martin	2.	G Hlohovec	2									0	19
65.	Ljutenko Tomáš	1.	1SG BA	1	5		3						8	15
66.	Horkavá Alexandra	2.	BiG Sučany	2									0	14
67.	Petrová Simona	3.	ŠPMNDG BA	3				3	1	1	1		6	13
67.	Remperová Natália	1.	GKom PE	1									0	13
69.	Hrinko Adam	1.	1SG BA	1									0	11
70.	Báb Samuel	1.	GCSL BA	1									0	9
70.	Cavalieri Costauzo	2.	GSpor NR	2									0	9
70.	Poláková Tatiana	1.	1SG BA	1									0	9
73.	Turčeková Diana	1.	GKom PE	1	8								8	8
74.	Hreuzek Ján	2.	GCSL BA	2									0	7
75.	Borčin Martin	1.	GCSL BA	1									0	6
76.	Janeta Tomáš	1.	GAB NO	1									0	5
77.	Šimová Mária	2.	EGMT	2									0	4
78.	Brezina Marek	1.	???	1									0	0
78.	Glovičková Katarína	1.	GCSL BA	1									0	0
78.	Lavuš Eduard	2.	GAlej KE	2									0	0
78.	Porges Eduard	2.	GCSL BA	2									0	0
78.	Schmidtová Veronika	2.	GAlej KE	2									0	0
78.	Tanzer Jozef	1.	GJH BA	1									0	0