Vzorové riešenia 1. série letnej časti KMS 2015/2016

Úloha č. 1: *Paľo má 100 kariet, na ktorých sú postupne čísla od 1 do 100. Kamarát ho zavolal sa s nimi hrať. Paľo rýchlo zobral karty a utekal ku kamarátovi. Keď začali hrať, zistil, že si vzal len 55 kariet. To Paľa zneistilo, lebo mal premyslenú stratégiu, v ktorej potrebuje mať dve karty s rozdielom 9. Upokojte ho a dokážte, že sa medzi jeho 55 kartami vždy nachádzajú dve karty s rozdielom ich čísel 9, a to bez ohľadu na to, ktorých 55 kariet si zobral.*

Riešenie: (opravovali Anina a Aňa)

Pozrime sa na to, aký maximálny počet kariet si vie Paľo zobrať tak, aby v nich nebol žiaden pár s rozdielom 9. Aby sme si to vedeli ľahko predstaviť, vytvorme si fiktívnu tabuľku tak, že do prvého stĺpca napíšeme čísla od 1 do 9 a v každom ďalšom stĺpci ich o 9 navýšime (teda rozdiel každých dvoch susediacich kariet v riadku bude 9). Čiže v prvom riadku budú čísla, ktoré po delení deviatimi dávajú zvyšok 1, v druhom tie, ktoré dávajú zvyšok 2 atď. až v poslednom riadku tie, ktoré sú deliteľné deviatimi.

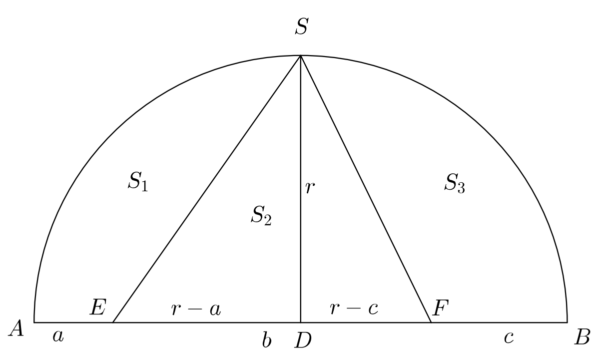
Teda táto tabuľka má 9 riadkov a 11 plných stĺpcov, v dvanástom ostane iba jedna karta s číslom 100. Otázkou je, koľko najviac čísel vieme vybrať, aby žiadne dve nemali rozdiel 9. Všimnime si, že ak vyberieme hociktoré čísla susediace v riadku, tak budú mať rozdiel 9 (a žiadna iná dvojica túto vlastnosť nemá – takže sme naplno „zužitkovali“ informáciu). Z tohto dôvodu sa nám oplatí pozerať sa na jednotlivé riadky a skúmať, koľko najviac čísel vieme vybrať z jedného riadku.

Keďže nevieme vybrať dve susedné čísla z riadku, tak môžme vybrať maximálne polovicu čísel z riadku (pre nepárnu dĺžku riadku je to horná celá časť z polovice). V našom prípade vieme vybrať z každého riadku maximálne 6 čísel, čo dohromady dáva $9 \cdot 6 = 54$ čísel. Dokopy môžme vybrať maximálne 54 kariet, ktoré medzi sebou určite nemajú žiadnu dvojicu s rozdielom 9. Lenže Paľo si zobral až 55 kariet. Z toho vyplýva, že Paľo má v svojom balíčku kariet aspoň jednu dvojicu s rozdielom 9.

Úloha č. 2: *Betkina záhrada má tvar polkruhu s krajnými bodmi A, B. V strede oblúka AB leží bod S. Z bodu S vychádzajú dva chodníky v tvare úsečiek, ktoré záhradu rozdeľujú na tri záhony. Plochy jednotlivých záhonov sú v pomere $1 : 2 : 2$. V akom pomere delia tieto dva chodníky úsečku AB? Obrázok pod úlohou je len ilustračný a pomery v ňom nezodpovedajú zadaniu.*

Riešenie: (opravoval Ľubo)

Ako to už často v geometriách býva, dobrý obrázok nám vždy vie pomôcť. Nakreslime si ho teda a za značme si veci, ktoré vieme:



Do obrázku zo zadania sme zaznačili polomer polkruhu r a strany, ktorých pomer máme zistiť sme označili: a, b a c. Taktiež sme si pridali doplnky strán a a c k r. Vidíme, že dĺžku b môžeme tiež vypočítať ako $(r-a)+(r-c)$. Polomer Betkinej záhradky máme označený ako r, ľahko teda zistíme obsah celého polkruhu, ktorý sa bude rovnať

$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Z pomerov jednotlivých obsahov (1 : 2 : 2) vieme vypočítať ich veľkosti, a síce:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{10}, \qquad S_2 = S_3 = \frac{\pi \cdot r^2}{5}.$$

Začnime obsahom S_2, keďže je to trojuholník, ktorého obsah vieme jednoducho spočítať. Obsah trojuholníka je

$$S_2 = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{5} \implies b = \frac{2}{5} \cdot \pi r.$$

Pozrime sa, ako by sme mohli spočítať stranu a. Dá sa to viacerými spôsobmi, my na to využijeme $\triangle EDS$, z ktorého zistíme dĺžku $r - a$. Z tej dopočítame a. Obsah štvrťkruhu bude

$$\frac{\pi \cdot r^2}{4} = S_1 + S_{\triangle EDS}$$

alebo teda

$$S_{\triangle EDS} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} - S_1.$$

Dosaďme si za S_1 a $S_{\triangle EDS}$ to, čo o nich vieme:

$$\frac{(r-a)r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{\pi \cdot r^2}{10}.$$

Po úpravách dostávame (premyslite si):

$$a = r - \frac{3}{10} \cdot \pi r.$$

Už máme dve z troch hľadaných strán, treba nájsť len poslednú stranu c. Mohli by sme ju hľadať rovnakým spôsobom ako stranu a, ale jednoduchšie využiť, že $a + b + c = 2r$, teda:

$$c = 2r - a - b = 2r - (r - \frac{3}{10} \cdot \pi r) - \frac{2}{5} \cdot \pi r \implies c = r - \frac{1}{10} \cdot \pi r.$$

Teraz nám už len stačí dať do pomeru strany a, b, c. Keď to spravíme, vyjde nám:

$$a : b : c = (r - \frac{3}{10} \cdot \pi r) : (\frac{2}{5} \cdot \pi r) : (r - \frac{1}{10} \cdot \pi r).$$

Výraz môžeme predeliť r a pre estetickosť vynásobiť číslom 10. Dostaneme teda:

$$a : b : c = (10 - 3\pi) : 4\pi : (10 - \pi).$$

Úloha č. 3: *Janko si rád počíta ciferné súčty čísel. Zaviedol si preto svoje označenia. Pre prirodzené číslo k označil jeho ciferný súčet ako $s_1(k)$. Ciferný súčet čísla $s_1(k)$ zas označil $s_2(k)$ a ciferný súčet čísla $s_2(k)$ označil $s_3(k)$.*[1] *Potešte Janka a nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m, n, pre ktoré platí $m + n = 2016$ a $s_3(m) + s_3(n) = 9$.*

Riešenie: (opravoval Ke3n)

Na začiatku riešenia úlohy je fajn sa s ňou trošku pohrať a zistiť, ako sa správa pre nejaké konkrétne prípady. Vyskúšajte si teda dvojice čísel 1 a 2015, 2 a 2014, …, 17 a 1999, 18 a 1998 (ale naozaj!). Z týchto prípadov sa môže zdať, že nevyhovujú jedine také dvojice čísel, kde sú obe čísla deliteľné 9. Ak sa to nezdá, je fajn vyskúšať viac prípadov. Poďme sa pozrieť, či je to naozaj tak.

Najprv sa zamyslime, v akom rozsahu môžu byť čísla s_1, s_2, s_3. Čísla m a n sú prirodzené čísla od 1 po 2015, takže najväčšie s_1, aké môžeme dostať, je $s_1(1999) = 28$ (premyslite si). Z toho vyplýva, že $s_1(k)$ sú čísla z rozsahu 1 až 28, $s_2(k)$ sú už len z rozsahu 1 až 10 a k chudákovi $s_3(k)$ sa dostanú už len čísla z rozsahu 1 až 9.

Zaujíma nás, kedy $s_3(m) + s_3(n) = 9$. Ak $s_3(m) = 9$, alebo $s_3(n) = 9$, šípime problém, ich súčet určite nemôže byť 9. Kedy bude pre nejaké prirodzené číslo k platiť $s_3(k) = 9$? Po krátkom zalovení v pamäti prichádzame na to, že číslo je deliteľné 9, ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9 a aj naopak (ak je ciferný súčet čísla deliteľný 9, potom je naše číslo deliteľné 9). Takže ak $s_3(k) = 9$, čo je ciferný súčet čísla $s_2(k)$, potom je určite $s_2(k)$ deliteľné 9. Z toho istého dôvodu je aj $s_1(k)$ deliteľné 9 a teda aj to k bude deliteľné 9. Naspäť k našej dvojici m, n: prišli sme k tomu, že ak je číslo m deliteľné 9, potom $s_3(m) = 9$. Ešte si uvedomme, že ak je m deliteľné 9, tak aj n bude automaticky deliteľné 9 (lebo ich súčet je 2016, čo je deliteľné 9). Teda n sa môže aj zblázniť, ale $s_3(m) + s_3(n)$ nebude 9.

[1] Napríklad $s_1(2\,999\,999) = 56$, $s_2(2\,999\,999) = 11$ a $s_3(2\,999\,999) = 2$.

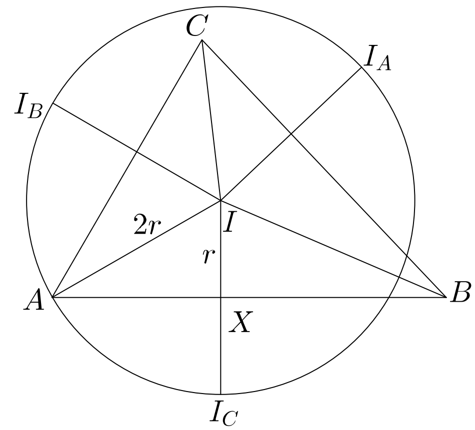
Zatiaľ sme ukázali iba to, že pre dvojice čísel, ktoré sú obe deliteľné 9 nemôže platiť $s_3(m)+s_3(n) = 9$. To znamená, že ostatné majú šancu, aby $s_3(m)+s_3(n) = 9$, ale nie, že to pre ostatné určite platí (viacerí z vás si to neuvedomili)! Stále by niekde mohol byť skrytý dôvod, pre ktorý nejaké tieto dvojice nevyhovujú.
Poďme sa teda sa pozrieť bližšie na dvojice čísel m, n, z ktorých ani jedno nie je deliteľné 9. Platí $m + n = 2016$ a 2016 je deliteľné 9, takže zvyšok m po delení 9 a zvyšok n po delení 9 musia dať v súčte 9 (ešte by mohli dať 0, ale m a n deliteľné 9 sme už poriešili). Čo sa deje zo zvyškom čísla po delení 9, ak urobíme jeho ciferný súčet? Napíšme si číslo k v „cifernom“ zápise: $k = k_1 + k_2 \cdot 10 + ... + k_n \cdot 10^{n-1}$, potom $s_1(k) = k_1 + k_2 + ... + k_n$. Ako sa správajú zvyšky pri násobení a sčítavaní čísel? Ak a dáva po delení 9 zvyšok z_a a b dáva zvyšok z_b, tak $a \cdot b$ dáva zvyšok $z_a \cdot z_b$ a $a + b$ dáva zvyšok $z_a + z_b$ (premyslite si). Všetky desiatky v cifernom zápise dávajú po delení 9 zvyšok 1, preto špeciálne pre delenie 9 ostane zvyšok ciferného súčtu rovnaký. A sme hotoví! Čísla m a n majú súčet zvyškov po delení 9 rovný 9 a zvyšky ostanú rovnaké pre s_1, s_2 aj s_3. Takže $s_3(m) + s_3(n) = 9$, ak nie sú súčasne m aj n deliteľné 9 (vtedy $s_3(m) + s_3(n) = 18$).

Úloha č. 4: *Anina sa ocitla v bludisku. Bludisko má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky n a je rozdelené na sieť rovnostranných trojuholníčkov s dĺžkou strany 1. Anina sa nachádza v najvyššom trojuholníčku a potrebuje sa dostať na stredný trojuholníček v najspodnejšom riadku. Môže sa pohybovať len cez stredy hrán trojuholníčkov dole, doprava alebo doľava, pričom sa nesmie vrátiť do trojuholníčka, v ktorom už bola. (Vyjsť z veľkého trojuholníka nemôže.) Pre každé prirodzené číslo n určte, koľkými spôsobmi môže Anina prejsť bludiskom. Na obrázku je znázornené bludisko pre $n = 4$ a jedna možná cesta bludiskom.*

Riešenie: (opravovali Kajo a Domča)
Na začiatok si uvedomme jednoduchú vec: Keďže sa nemôžeme hýbať smerom hore, akonáhle zídeme z nejakého riadku nahol, už sa doňho nevrátime. Zároveň platí, že ak vieme akým trojuholníkom sme opúšťali k-ty riadok, vieme aj, ktorým sme prišli do $(k+1)$-ho riadku. Keď v danom riadku poznáme aj trojuholník, ktorým sme prišli, aj ten, ktorým sme odišli, tak existuje len jedna cesta medzi nimi vrámci daného riadku (keďže sa nemôžeme vrátiť do toho istého trojuholníka). Taktiež platí, že keď sa dostaneme do posledného riadku, ostáva nám už len ísť vpravo alebo vľavo smerom ku stredu, a teda k cieľu.
Keď si to zhrnieme, tak stačí sledovať trojuholníky, ktorými vychádzame z (prípadne vchádzame do) jednotlivých riadkov. Toto nám jednoznačne určí celú cestu a zároveň každú cestu môžeme cez tieto trojuholníčky popísať.
V prvom riadku má Anina 1 možnosť, v druhom 2, ..., v $(n-1)$-vom riadku má $n-1$ možností a v poslednom už len jednu. Všetky možnosti sa môžu ľubovoľne kombinovať, teda Anina má dokopy $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$ možností.

Úloha č. 5: *Ketrin našla v galérii zaujímavý obraz. Bol na ňom znázornený trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I. Obrazy bodu I v osovej súmernosti podľa strán trojuholníka BC, CA a AB boli postupne označené ako I_a, I_b a I_c. Zaujímavosťou obrazu bolo, že body I_a, I_b, I_c, A ležali na jednej kružnici. Ketrin po chvíli rozmýšľania určila veľkosť uhla BAC. Určte veľkosť uhla BAC aj vy.*

Riešenie: (opravovali Adam a Mojo)
Keďže bod I je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, tak leží na priesečníku osí všetkých vnútorných uhlov trojuholníka. Strany trojuholníka ABC sú dotyčnice k jeho vpísanej kružnici. Ak teda spravíme kolmice z bodu I na strany AB, BC a AC, dostaneme polomery vpísanej kružnice. Všetky budú rovnako dlhé, označme si túto dĺžku r.



Keď budeme robiť obrazy bodu I v osovej súmernosti podľa strán trojuholníka, znova spravíme kolmice na strany trojuholníka. Teraz ich ale predĺžime tak, aby boli body I_A, I_B a I_C ktoré dostaneme, vzdialené od bodu I dvakrát toľko, ako od svojich osí súmerností. Úsečky I_AI, I_BI a I_CI, majú dĺžku $2r$. Z toho nám vyplýva, že to sú polomery kružnice so stredom v bode I. Na tejto kružnici bude (zo zadania) ležať aj bod A. Preto platí: $|IA| = 2r$. Označme si bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AB ako X. O trojuholníku AIX vieme celkom dosť – je pravouhlý a poznáme dĺžky jeho dvoch strán IA a IX. To je dosť na dopočítanie zvyšku, a teda aj uhla IAX. Na to použijeme sínus:

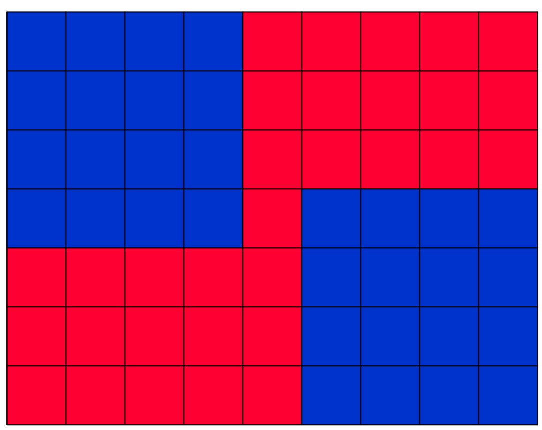
$$\sin(|\sphericalangle IAX|) = \frac{|IA|}{|XA|} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$|\sphericalangle IAX| = 30^\circ.$$

Uhol IAX je polovica uhla BAC, preto $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. A to je presne to, čo chcela Ketrin vedieť.

Úloha č. 6: *Ľudka a Kika si zobrali tabuľku $m \times n$ políčok, kde m, n sú nepárne prirodzené čísla. Každé jej políčko zafarbili namodro alebo načerveno. Ľudke sa páčia červeno dominantné riadky. To sú také riadky, ktoré obsahujú viac červených políčok ako modrých. Kika zas obľubuje modro dominantné stĺpce, teda také stĺpce, ktoré obsahujú viac modrých políčok ako červených. Ľudka a Kika pri zafarbovaní spolupracovali, aby boli obe spokojné. V závislosti od čísiel m, n nájdite najväčší súčet počtu modro dominantných stĺpcov a červeno dominantných riadkov, ktorý Ľudka s Kikou mohli dostať. Nezabudnite zdôvodniť, prečo väčšie súčty dostať nemohli.*

Riešenie: (opravovali Hopko a Dominik)
Ako prvé je v podobných úlohách dobré začať si vyfarbovať tabuľku tak, aby bol čo najväčší súčet modro dominantných stĺpcov (MDS) a červeno dominantných riadkov (ČDR). Po chvíľke „hrania sa" si všimneme, že počet MDS a ČDR spolu súvisí. Totiž, intuícia vraví, že čím viac MDS, tým viac modrých políčok v tabuľke a tiež, že čím viac ČDR, tým viac červených políčok v tabuľke. Ale súčet počtu modrých a červených políčok je konštantný (konkrétne mn). Takže intuitívne platí, že čím viac MDS, tým menej ČDR a naopak. Rečnícka otázka na koniec odstavca: Čo s tým spravíme?
Chceli by sme zaplátať diery v našej intuícii. Totiž občas platí, že prefarbenie modrého políčka na červené nemusí znížiť počet MDS. Kedy niečo také nastane? Keď sme prefarbili políčko v stĺpci, v ktorom nebolo $(m+1)/2$ modrých políčok. A týmto spôsobom vieme „získať" nejaké červené políčka navyše – ak je v stĺpci viac ako $(m+1)/2$ modrých políčok, môžme beztrestne prefarbiť všetky okrem $(m+1)/2$ a ak je v stĺpci menej než $(m+1)/2$ modrých políčok, tak ich vieme všetky beztrestne prefarbiť na červené. Metaforické okienko: Ak vyhrám 10 zápasov 1 : 0 a jeden prehrám 10 : 0, moje skóre je 10 : 10, ale mám 10 výhier a len jednu prehru.
Taktiež to vieme robiť aj opačne a získavať modré políčka navyše. Teda dáva zmysel, aby v každom stĺpci bolo buď $(m+1)/2$ alebo 0 modrých políčok (a podobne pre červené riadky). Keď už toto máme, nie je veľký problém nájsť konštrukciu, ktorá to takmer spĺňa, a súčet ČDR s MDS je $m+n-2$. Vo všeobecnosti, je celkom rozumné robiť konštrukcie čo najjednoduchšie a najsymetrickejšie ako to len ide, jednak sa nám to potom ľahšie kontroluje a dvak takéto konštrukcie často vychádzajú. V tomto prípade vyhovuje napríklad stredovo symetrická tabuľka (viď. obrázok). Pozrime sa, čo sme vlastne dostali. Číslo $m+n-2$ je dosť veľké, okrem dvoch stĺpcov/riadkov



sú všetky správne dominantné. A navyše, v našej konštrukcii je len jeden riadok (prostredný), ktorý nespĺňa našu podmienku, aby bol prázdny alebo mal $(n+1)/2$ červených políčok. Navyše, tento riadok sa od našej podmienky líši len v jednom políčku. To by mohlo nasvedčovať, že väčší súčet MDS a ČDR by sa nemal dať dosiahnuť. Okrem toho to naznačuje spôsob dôkazu – ak by len jeden riadok/stĺpec nebol správne dominantný, museli by sme mať v riadkoch príliš veľa červených a v stĺpcoch príliš veľa modrých políčok. Poďme to teda skúsiť spraviť.
Formálne na to ideme sporom a predpokladáme, že vieme skonštruovať tabuľku so súčtom ČDR a MDS rovným $m+n-1$. BUNV [2] vieme povedať, že máme m ČDR a $n-1$ MDS. V každom ČDR musí byť aspoň $(n+1)/2$ červených políčok, teda dokopy musíme mať aspoň $m(n+1)/2$. V každom MDS musí byť aspoň $(m+1)/2$ modrých políčok, teda dokopy musíme mať aspoň $(n-1)(m+1)/2$. Takže dokopy musí byť v tabuľke aspoň $m(n+1)/2+(n-1)(m+1)/2 = mn + (n-1)/2$. Ak $n > 1$, tak platí, že $mn + (n-1)/2 > mn$ (počet všetkých políčok), čo je spor. Ak ale $n = 1$, tak tento záver nevieme spraviť a musíme to špeciálne ošetriť. Rozmyslite si, že v takom prípade bude súčet MDS a ČDR dokonca $m+n-1$.

Úloha č. 7: *Nech p, q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že*

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor .$$

[2] Bez Ujmy Na Všeobecnosti

Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.

Riešenie: (opravoval Jožo)

Zoberme si najprv ľavú stranu rovnosti a vyjadrime jej hodnotu. Keďže práca s dolnými celými časťami môže byť pre nás nepohodlná, skúsime ich odstrániť. Rozmyslite si, že

$$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = \frac{a}{b} - \frac{z}{b},$$

kde z je zvyšok čísla a po delení b. Preto ľavú stranu vieme rozpísať

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{p}{q} + \frac{2p}{q} + \dots + \frac{(q-1)p}{q} - \frac{z_1}{q} - \frac{z_2}{q} - \dots - \frac{z_{q-1}}{q},$$

kde z_1, z_2, …, z_{q-1} sú postupne zvyšky čísel p, $2p$, …, $(q-1)p$ po delení číslom q. Nie je ťažké si všimnúť, že tieto zvyšky sú 1, 2, …, $(q-1)$, len v inom poradí. Intuíciu k tomu môžme nadobudnúť p, q. Poďme si to ale dokázať.

Zapíšme si čísla p, $2p$, …, $(q-1)p$ všeobecne ako ip. Pre žiadne i $(0 < i < q)$ číslo ip nie je deliteľné číslom q. Čísla p, q sú totiž nesúdeliteľné a q nemôže deliť i, lebo $i < q$. Môže sa stať, že pre rôzne i, j budú dávať čísla ip a jp rovnaký zvyšok po delení q? Predpokladajme, že áno. Potom ich rozdiel $ip - jp = (i-j) \cdot p$ je deliteľný číslom q. Keďže však čísla p a q sú nesúdeliteľné, tak q musí deliť $i - j$. Vzhľadom na to, že i, j môžu nadobúdať len hodnoty 1, 2, …, $q-1$, tak $i - j$ je deliteľné q len vtedy, ak $i = j$. Dostali sme spor s predpokladom, že i a j sú rôzne. Preto pre rôzne i, j majú čísla ip a jp rôzne zvyšky po delení q.

Dokázali sme, že zvyšky z_1, z_2, …, z_{q-1} sú navzájom rôzne a nenulové. Preto sú to v nejakom poradí zvyšky 1, 2, …, $q-1$. Pri sčítavaní však na poradí nezáleží a my si ich môžeme poprehadzovať. Tak môžeme dokončiť výpočet ľavej strany.

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor &= \frac{p + 2p + \dots + (q-1)p}{q} - \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_{q-1}}{q} = \\ &= \frac{p(1 + 2 + \dots + q - 1)}{q} - \frac{1 + 2 + \dots + q - 1}{q} = \\ &= \frac{pq(q-1)}{2q} - \frac{q(q-1)}{2q} = \frac{1}{2}(q-1)(p-1)\end{aligned}$$

Vyjadrili sme tak hodnotu ľavej strany. Ak sa pozorne pozrieme na pravú stranu, tak je taká istá ako ľavá, len má vymenené p a q. Preto aj jej hodnota bude rovnaká, len s vymenenými p, q, teda $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$. To je tá istá hodnota, akú má ľavá strana. Tým sme rovnosť zo zadania dokázali.

Iné riešenie:

Uvažujme štvorčekovú sieť $p \times q$ štvorčekov so stranou dĺžky 1. Na každý vnútorný mrežový bod položme kamienok (ako na obrázku). Spočítajme po riadkoch kamienky pod uhlopriečkou (na obrázku sú okrúhle). Zvoľme bod X ako vnútorný mrežový bod úsečky AB, teda $|AX| \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. Priesečník riadku, v ktorom sa nachádza bod X s uhlopriečkou AC označme Y. Ak $|AX| = i$, tak z podobnosti trojuholníkov $|XY| = (ip)/q$. Rozmyslite si, že počet kamienkov na úsečke XY je rovný $\lfloor (ip)/q \rfloor$. Takýmto spôsobom vieme postupne spočítať počet kamienkov pod uhlopriečkou v prvom, druhom až $(q-1)$-om riadku. Dostaneme tak

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor,$$

čo je výraz na ľavej strane rovnice.

Podobne vieme spočítať po stĺpcoch počet kamienkov nad uhlopriečkou (štvorčekové). V j-tom stĺpci je časť stĺpca nad uhlopriečkou dlhá $(jq)/p$ a teda obsahuje $\lfloor (iq)/p \rfloor$ kamienkov nad uhlopriečkou. Ak toto spravíme v každom od prvého po $(p-1)$-vý stĺpec, dostaneme

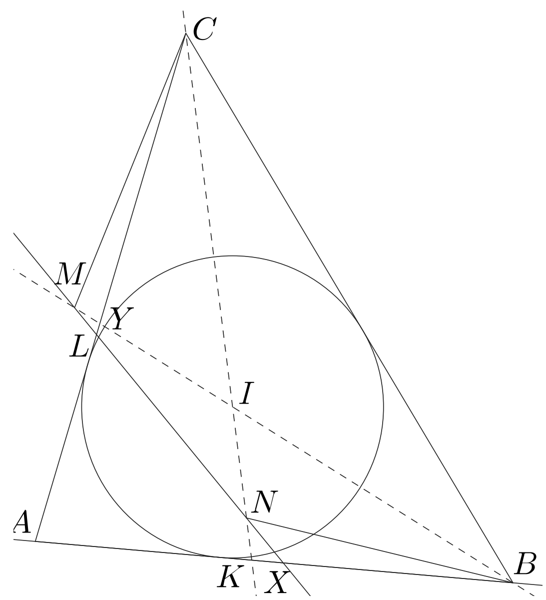
$$\left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor,$$

čo je výraz na pravej strane. Počet kamienkov nad uhlopriečkou je rovnaký ako počet kamienkov pod uhlopriečkou. Vďaka nesúdeliteľnosti p, q ani žiaden kamienok nie je na uhlopriečke. Keďže ľavá a pravá strana rovnosti vyjadrujú ten istý počet kamienkov, musia sa rovnať.

Komentár: Rovnosť zo zadania platí, aj keď sú p a q súdeliteľné. Dôkaz pomocou štvorčekovej sieti sa drobnou úpravou dá zovšeobecniť pre ľubovoľné čísla. V prvom spôsobe to bude vyžadovať viac námahy.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Miki a Zajo hrajú hru s bojovými figúrkami. Keďže nie sú žiadni amatéri, vystačili si s perom a papierom a figúrky si zaznačili ako body. Po dlhom boji ostali Mikimu tri figúrky uložené v bodoch A, B, C. Zajovi zas ostali štyri figúrky uložené v bodoch K, L, M, N. Body K, L sa nachádzajú postupne na stranách AB, AC v bodoch dotyku vpísanej kružnice do trojuholníka ABC. Body M, N ležia postupne na osiach uhlov ABC, BCA tak, že $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BNC| = 90°$. Miki sa pousmial a rozhodol sa vystreliť po priamke MN. Myslí si, že takto zasiahne všetky Zajove figúrky. Dokážte, že priamka MN prechádza bodmi K, L.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kika a Mišo)
Máme trojuholník ABC, nejaké špeciálne body a chceme dokázať, že body K, L, M a N sú na jednej priamke. To sa dá dokázať rôzne, napríklad tak, že dokážeme, že úsečka MN pretína strany AB a AC v bodoch K a L, alebo dokážeme, že úsečky KL, KN a aj LM sú kolmé na na tú istú priamku. Taktiež môžeme dokátať, že $|\sphericalangle KML| = 180°$ (ak je M vnútri trojuholníka), alebo $|\sphericalangle MLK| = 180°$ (ak je bod M mimo trojuholníka), a zároveň $|\sphericalangle NKL| = 180°$ (ak je N mimo trojuholníka) alebo $|\sphericalangle KNL| = 180°$ (ak je bod N v trojuholníku). Všetky tieto cesty viedli k správnemu riešeniu. My si dopodrobna prejdeme možnosť dokazovania, ktorú sme spomenuli ako prvú.



Priesečník osí vnútorných uhlov trojuholníka ABC si označme I, priesečník priamky MN so stranou AB označme X a priamky MN so stranou AC ako Y. Ak dokážeme, že body B, I, N a X ležia na kružnici, tak $|\sphericalangle BNI| = |\sphericalangle BXI|$, pretože sú to obvodové uhly k oblúku BI a keďže $|\sphericalangle BNI| = 90°$, tak aj $|\sphericalangle BXI| = 90°$ a teda X je bod dotyku vpísanej kružnice trojuholníku ABC a strany AB. Podobne, keď budú body C, I, M a Y na kružnici.
Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle BMC| = 90°$ a aj $|\sphericalangle BNC| = 90°$. Keďže toto platí, tak musia body B, C, M a N ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom BC. Tak a teraz poďme uhliť! Ak máme uhly štandardne označené ($|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$), tak $|\sphericalangle ABI| = |\sphericalangle IBC| = \beta/2$ a $|\sphericalangle ACI| = |\sphericalangle ICB| = \gamma/2$. Nakoľko body B, C, M a N ležia na kružnici, tak aj $|\sphericalangle YNC| = \beta/2$ a $|\sphericalangle XMB| = \gamma/2$.
Keďže $|\sphericalangle YNC| = \beta/2$, tak veľkosť susedného uhla $|\sphericalangle XNC| = 180° - \beta/2$. Pozrime sa na štvoruholník $BINX$. Súčet protiľahlých uhlov je $|\sphericalangle XBI| + |\sphericalangle INX| = \beta/2 + (180° - \beta/2) = 180°$ a teda je to tetivový štvoruholník, čo sme chceli dokázať.
Ešte treba dokázať, že body C, I, M a Y sú na kružnici. Tak sa pozrime na štvoruholník $CIYM$. Už vieme, že $|\sphericalangle YCI| = |\sphericalangle YMI| = \gamma/2$. Počkať, počkať, ale toto môže platiť, iba ak sú to obvodové uhly v štvoruholníku $CIYM$ prislúchajúce oblúku YI. Teda tento štvoruholník musí byť tiež tetivový. Hotovo.
Úlohu sme dokázali pre prípad, keď N je v trojuholníku ABC a M je mimo trojuholníka ABC. Ale ošetriť to všeobecne nechávam už na vás, milí riešitelia.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *V mestečku Algebrovo žije niekoľko výrazov. Klub racionálnych čísiel zorganizoval súkromný večierok, na ktorý sú pozvané len výrazy, ktoré nenadobúdajú často celočíselné hodnoty. Zistite, ktoré výrazy to sú. Nájdite všetky párne celé čísla a také, že $\dfrac{a^n+1}{n}$ je celé číslo len pre konečne veľa prirodzených čísiel n.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Zajo a Ľudka)
Pre párne celé číslo a si označme výraz zo zadania ako

$$V_a(n) = \frac{a^n+1}{n}.$$

Dokazovať, že výraz $V_a(n)$ je celé číslo pre nekonečne veľa n, je podstatne jednoduchšie ako dokazovať, že $V_a(n)$ je celé číslo len pre konečne veľa n. V prvej možnosti nám totiž stačí nájsť niekoľko (samozrejme nekonečne veľa) čísel n, s ktorými sa nám bude ľahko pracovať, pre ktoré bude daný výraz celé číslo. Napríklad pri $a = 2$ to sú mocniny čísla 3. Pri hlbšom pozorovaní sa nám ako dobrý kandidát pre všeobecný prípad ponúknu mocniny čísla $a + 1$, prípadne mocniny ľubovoľného deliteľa $a + 1$. Tak si môžeme za toho deliteľa zvoliť nejaké prvočíslo, lebo tie majú pekné vlastnosti a môžu nám uľahčiť nejakú prácu. V tomto príklade dokonca dôkaz s mocninami čísla $a + 1$ nie je ani o veľa zložitejší.
Zoberme teda prvočíslo p, ktoré delí číslo $a + 1$. Na to, aby také prvočíslo existovalo, tak $a + 1$ musí byť rôzne od -1 a 1, teda a je rôzne od 0 a -2. Navyše $p > 2$, keďže $a + 1$ je nepárne. Matematickou indukciou podľa k ukážeme, že pre $n = p^k$ je výraz $V_a(n)$ celé číslo. Teda, že pre všetky prirodzené čísla k číslo p^k delí $a^{(p^k)} + 1$.
Zoberme $k = 1$. Keďže $p \mid (a+1)$, tak $a \equiv -1 \pmod p$. S využitím toho, že p je nepárne, dostaneme $a^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod p$, teda $p \mid (a^p + 1)$.

Predpokladajme, že pre $k = t$ platí $p^t \mid (a^{(p^t)} + 1)$. Pre $k = t+1$ máme čitateľ zlomku rovný $a^{(p^{t+1})} + 1$, čo si vieme upraviť na $(a^{(p^t)})^p + 1$. Označme $A = a^{(p^t)}$. Vďaka tomu, že p je nepárne, vieme čitateľa upraviť

$$a^{(p^{t+1})} + 1 = A^p + 1 = (A+1)(A^{p-1} - A^{p-2} + \cdots + A^2 - A + 1).$$

Z indukčného predpokladu vieme, že $A + 1 = a^{(p^t)} + 1$ je deliteľné p^t. Už nám stačí ukázať, že druhá zátvorka je deliteľná prvočíslom p. Keďže $p^t \mid (A+1)$, tak aj $p \mid (A+1)$, teda $A \equiv -1 \pmod p$. Z toho vieme vypočítať zvyšok druhej zátvorky po delení p ako

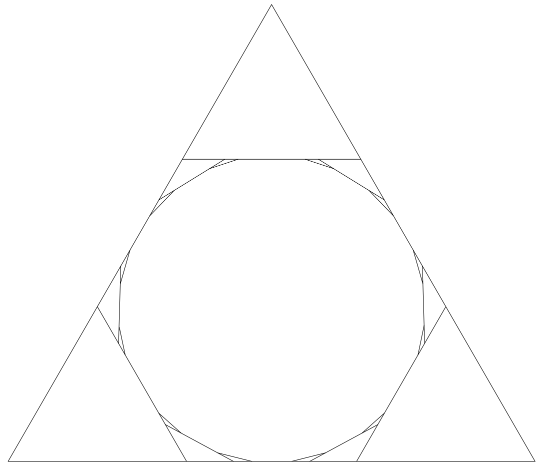
$$(-1)^{p-1} - (-1)^{p-2} + \cdots + (-1)^2 - (-1) + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1 \equiv p \equiv 0 \pmod p.$$

Dostali sme, že druhá zátvorka je deliteľná p, teda celý výraz $A^p + 1 = a^{(p^{t+1})} + 1$ je deliteľný číslom p^{t+1}, čo sme chceli dokázať.
Ukázali sme, že pre a rôzne od 0 a -2 výraz $V_a(n)$ je celé číslo pre každé $n = p^k$ a takých n je nekonečne veľa. Ostáva nám vyriešiť zvyšné prípady. Pre $a = 0$ ide o výraz $1/n$, ktorý je celočíselný len pre $n = 1$, teda $a = 0$ vyhovuje zadaniu.
Pozrime sa teraz na $a = -2$. Ak je n párne, tak $(-2)^n + 1$ je nepárne a teda ich podiel nebude celé číslo. Ukážeme, že pre nepárne n rôzne od 1 nie je číslo $(-2)^n + 1$ deliteľné n. Poďme na to sporom a predpokladajme, že pre nejaké nepárne $n \neq 1$ platí $n \mid ((-2)^n + 1)$. Zoberme najmenšie prvočíslo p, ktoré delí n (najmenšie preto, aby sme ľahšie dospeli ku sporu). Keďže n je nepárne, tak p musí byť tiež nepárne. Potom $p \mid ((-2)^n + 1)$, čo v reči zvyškov znamená, že $(-2)^n \equiv -1 \pmod p$. Keďže n je nepárne, vieme si to upraviť na $2^n \equiv 1 \pmod p$. Podľa Malej Fermatovej vety platí $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Ak označíme D ako najväčšieho spoločného deliteľa n a $p - 1$, tak si rozmyslite, že musí platiť $2^D \equiv 1 \pmod p$.
Ak $D > 1$, tak dostávame, že $D \mid n$. Ale keďže aj $D \mid (p - 1)$, tak $D < p$ a číslo n tak musí mať menšieho prvočíselného deliteľa ako p, čo je v spore s našou voľbou p. Ak $D = 1$, tak zas dostávame $2 \equiv 1 \pmod p$, čo pre žiadne prvočíslo p nemôže nastať.
Ukázali sme, že pre $a = -2$ nadobúda výraz $V_{-2}(n)$ celočíselnú hodnotu len pre $n = 1$, čo je konečne veľa čísel n. Teda -2 a 0 sú jediné hodnoty a, pre ktoré je výraz $V_a(n)$ celé číslo len pre konečne veľa prirodzených čísel n.

Úloha č. 10: *Maťo má rád mozaiky, tak sa rozhodol, že si jednu spraví. Tak zapálene sa pustil do navrhovania, až sa pozastavil nad tým, či to vôbec tak komplikovane pôjde spraviť. Rozhodnite, či je možné rozdeliť rovnostranný trojuholník na viac ako* 9000 *konvexných*[3] *častí tak, aby ľubovoľná priamka pretínala menej ako* 26 *z nich.*

Riešenie: (opravoval Vodka)
Na prvý pohľad sa zdá, že to vôbec nie je možné. Skrátka to číslo, 9 000, je naozaj absurdne veľké. Avšak ak sa pokúsime dokázať (poriadne), že by to nemalo ísť, tak nám nejde ani to. A z našich pokusov môžeme nadobudnúť dojem, že by to predsa len mohlo ísť.
Dobre povedzme si to na rovinu, ide to a konštrukcia vôbec nie je náročná. Ako však na ňu prísť? Treba skúšať a skúšať, až nám ten správny vzor nejako napadne. Základné dobré pozorovanie je to, že ak niekde budeme mať 1 000 000-uholník, tak je to dobré, lebo ak za časti použijeme jeho rohy, tak budme mať 1 000 001 častí a ľubovoľná priamka pretína najviac 3 z nich. Viac pokecu a motivácie o tom, ako na to prísť, nájdete vo videovzoráku[4].
Takže tá spomínaná konštrukcia: Budeme postupovať v krokoch. Na začiatku máme trojuholník a odsekneme mu 3 rohy – pri každom vrchole úsečkou oddelíme trojuholník (tak aby sa nepretínali). Tieto 3 trojuholníky budú 3 časti. V strede zostal 6-uholník. Tomu zase odsekneme 6 rohov – 6 trojuholníkov. V strede ostane 12-uholník. Takto pokračujeme, až v poslednom 12. kroku máme v strede $3 \cdot 2^{11}$-uholník a odsekneme jeho $3 \cdot 2^{11}$ rohov. A ako posledná časť ostane v strede $3 \cdot 2^{12}$-uholník. Takto nám vznikne $3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{11} + 1 = 3(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{11}) + 1 = 3(2^{12} - 1) + 1 = 12\,286 > 9\,000$ častí. Zjavne sú všetky konvexné.
Čo si ostáva uvedomiť je, že ľubovoľná priamka pretína najviac 2 trojuholníky odrezané v jednom kroku. Nech sme osekali n-uholník. Ak priamka pretína nejaký trojuholník, musí pretínať aj jednu z jeho 2 strán ktoré sú na obvode n-uholníka. Avšak obvod tohto n-uholníka je preťatý tou priamkou maximálne 2-krát, a preto pretína maximálne dve také strany tých trojuholníkov. Tým je dokázané, že pretína najviac 2 trojuholníky z ľubovoľného kroku.
Krokov bolo 12 to znamená, že každá priamka pretína najviac $2 \cdot 12$ trojuholníkov a ešte môže pretínať ten veľký $3 \cdot 2^{12}$-uholník v strede. To je však spolu len maximálne 25 častí. Dokázané.

[3] Konvexný útvar je taký útvar, v ktorom spojnica ľubovoľných dvoch vnútorných bodov leží celá vnútri útvaru.
[4] `https://www.youtube.com/watch?v=pJQDgbkyfRM`



Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Onduš Peter	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9	9				45	45
1.	Sásik Tomáš	2.	Gamča BA	4	9	9	9	9	9	9			45	45
1.	Sládek Samuel	4.	GAB NO	7			9	9	9	9	9		45	45
1.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	4	9	9	9	9	9				45	45
5.	Koževnikov Danil	2.	GJK Praha	2	9	9	9	8		9			44	44
5.	Vištanová Laura	3.	Gmaď KE	4	9	9	8	9	9				44	44
7.	Parada Matej	2.	Gamča BA	4	9	9	7	9	7				41	41
8.	Csenger Géza	3.	GHS	4	9	9	1	9	9				37	37
9.	Kopfová Lenka	1.	G Mendel ČR	3	9	9		7	9				34	34
9.	Poljovka Jakub	2.	GPár NR	4	9	9	9		7				34	34
11.	Dlugošová Michaela	2.	GKuk PP	4	9	9	3	8	4				33	33
12.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	4	9	9	7		7				32	32
13.	Pišťák Daniel	4.	GChD Praha	8			9	9	7	6			31	31
14.	Sládeček Michal	3.	GVar ZA	5		9	9	9					27	27
14.	Súkeník Peter	4.	GVO ZA	9			9	9	9				27	27
16.	Murin Marek	4.	GJH BA	9			7	9	6	4			26	26
17.	Kuťková Sára	2.	Gamča BA	4	9	9	7						25	25
17.	Švihorík Tomáš	2.	GPár NR	4	9	9	7			0			25	25
19.	Mertanová Hana	4.	PiarG TN	4	9	1	7		7				24	24
20.	Hanzely Slavomír	4.	GJAR PO	9			8	8	7				23	23
20.	Tóthová Andrea	4.	GJH BA	6		9	7	4	3				23	23
22.	Bodík Juro	4.	Gamča BA	10			9	8		4	1		22	22
22.	Kopf Daniel	4.	G Slez ČR	10			7	8	7				22	22
24.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	2	9	9			0	2			20	20
24.	Ralbovský Peter	3.	GJH BA	8			4	9	7	0			20	20
26.	Frankovská Zuzana	4.	GJH BA	8			9		9				18	18
27.	Škrlec Adam	4.	GJH BA	6		9			6				15	15
28.	Onduš Daniel	4.	GAlej KE	8			9	5					14	14
29.	Krajmerová Barbora	4.	G Šurany	6		9	2						11	11
30.	Vančo Šimon	4.	CGsvM SL	5		9				1			10	10
31.	Mičko Juraj	3.	GPoš KE	7		9							9	9
31.	Porubsky Michal	4.	GsvCM NR	6		9							9	9
33.	Szöllősová Timea	0.	Gamča BA	0	2	1	1		0		0		4	4
34.	Kudelčíková Martina	4.	GVO ZA	7		1							1	1
34.	Marčeková Katarína	4.	GJH BA	8			1		0				1	1

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Brezinová Viktória	1.	GAlej KE	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Ďuračková Mária	1.	GJH BA	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Fülöp Jozef	0.	Gamča BA	0	9	9	9	8	9	9	9		45	45
1.	Glevitzká Štefánia	1.	GVBN PD	2		9	8	9	9	9	9		45	45
1.	Kollár Pavol	1.	Gamča BA	2		9	9	9	9		9		45	45
1.	Krajčoviechová Lucia	0.	GIH BA	0	9	9	9	9	9	9			45	45
1.	Mišiak Dávid	1.	GJH BA	2		9	9	9	9	9	9		45	45
1.	Oravkin Richard	1.	1SG BA	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Pisoňová Karolína	1.	G Bánovce	1	9	9	9	9	9				45	45
1.	Poturnay Marián	1.	GPdC PN	2		9	8	9	9	9	9		45	45
1.	Števko Martin	1.	GAlej KE	2		9	9	9	9	9	7		45	45
1.	Winczer Tobiáš	1.	ŠPMNDG BA	2		9	9	9	9		9		45	45
13.	Adam Dominik	1.	GJH BA	1	9	9	8	9	9				44	44
13.	Klein Pavol	1.	GPdC PN	2		9	8	9	9	9			44	44
13.	Krajči Samuel	1.	GAlej KE	2		9	8	9	9	9			44	44
13.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	1	8	9	9	9	9				44	44
13.	Staník Michal	1.	GĽŠ TN	1	9	9	8	9	9				44	44
13.	Šánta Adam	1.	GJH BA	1	9	9	8	9	9				44	44
19.	Zubčák Matúš	1.	GPár NR	2		9	9	9	9	6			42	42
20.	Hečko Michal	1.	GPOH DK	2		9	2	9	9	5	8		40	40
20.	Lacko Dávid	1.	GPOH DK	1		9	3	9	9	5	8		40	40
20.	Mráz Michal	1.	ŠPMNDG BA	2		9	7	9	9	6			40	40
23.	Jóža Bohdan	1.	GJH BA	2		9	5	9	9	7			39	39
23.	Molnár Michal	1.	Gamča BA	2		9	8	9	9	4			39	39
23.	Moško Matej	1.	Gamča BA	2		9	5	9	9	1	7		39	39
23.	Prokopová Tereza	1.	GJH BA	1		9	4	9	9	8			39	39
23.	Rosinsky Juraj	1.	I de Lancy	2		9		7	9	7	7		39	39
23.	Studeničová Katarína	2.	GPOH DK	3			6	9	9	7	8		39	39
29.	Machalová Monika	1.	GJH BA	2		9	5	9	9	6			38	38
30.	Portašiková Jasmína	1.	GVar ZA	1		9	4	9	9	6			37	37
31.	Hrmo Matej	1.	GPár NR	2		9	9	9	9				36	36
31.	Juríková Róberta	1.	GVBN PD	1		9	5	9	9	4			36	36
31.	Kebis Pavol	1.	G PK	2		9	7	9	9	2			36	36
31.	Královič Tomáš	1.	GPár NR	2		9	7	9	9	2			36	36
31.	Pifková Andrea	2.	Gamča BA	2		9	2	9	9	7			36	36
31.	Tódová Tereza	1.	GPár NR	2		9	8	9	9	1			36	36
37.	Dujava Jonáš	1.	SPŠE Prešov	2		9	8	9	9				35	35
37.	Hluško Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	8	9					35	35
37.	Koževnikov Danil	2.	GJK Praha	2				9	9	9	8		35	35
37.	Ždímalová Michaela	1.	GIH BA	1	9	9	7	9	1				35	35
41.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	2		9	7	9	9				34	34
42.	Benková Nina	1.	GPdC PN	2		9	4	9	9	2			33	33
43.	Číž Jozef	1.	GJH BA	1	9	9	4	9	0				31	31
43.	Findra Michal	1.	GDT PP	2	9	9	4	9	9				31	31
45.	Ondovčíková Lucia	1.	G Modra	2		9	4	7	9	1	1		30	30
46.	Baláž Lukáš	1.	G Bánovce	1		9	2	9	9				29	29
47.	Galíková Kristína	1.	SúkG Česká	2	9	9	7	9		3			28	28
48.	Kalašová Martina	1.	GJH BA	2	9	6		9	9	1			25	25
48.	Kopfová Lenka	1.	G Mendel ČR	3				9	9		7		25	25
48.	Pieš Dávid	1.	ŠPMNDG BA	2		2	3	9	9	2			25	25

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
51.	Belák Tomáš	1.	GAV LV	2		3	6	9	1	4			23	23
51.	Kňaze Gabriel	1.	GJCh BR	1			4	9	9	1			23	23
51.	Novota Matej	1.	SŠsvFA	1		9	5	9					23	23
54.	Častulíková Katarína	2.	1SG BA	3			2	9	7	3			21	21
55.	Turčanová Veronika	2.	GJav	2		9	2		9				20	20
56.	Ghirbaková Karin	1.	Gamča BA	1	9		2	7	0				18	18
57.	Rečková Veronika	1.	GJH BA	1	1	9	5		0	2			17	17
58.	Feketeová Viola	1.	GBST LC	1	0	9	2	3	1	1	1		16	16
59.	Cinová Tatiana	1.	GPár NR	2	3		3		9				12	12
59.	Pozsonyi Karol	1.	GBil BA	2		8	3		0	1	0		12	12
61.	Sarvaš Marek	2.	GBST LC	2				9					9	9
62.	Majer Matúš	1.	ŠPMNDG BA	2	4			6					6	6
62.	Sadovská Jana	2.	ŠPMNDG BA	3		5		6					6	6
64.	Kofira Eduard	3.	BiG Sučany	3				4	0	0	1		5	5
64.	Szöllősová Timea	0.	Gamča BA	0	1			2	1	1			5	5