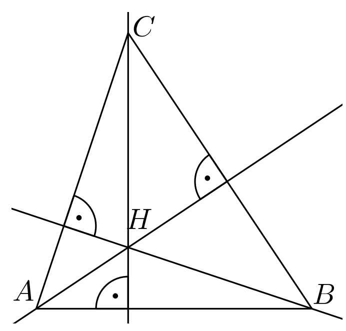
Vzorové riešenia 2. série letnej časti KMS 2015/2016

Úloha č. 1: *Maťko si na tabuľu nakreslil tri body, ktoré neležia na jednej priamke. Potom s bodmi na tabuli začal robiť nasledovnú operáciu: môže si vybrať tri nakreslené body, ktoré neležia na jednej priamke, a nakresliť ortocentrum[1] trojuholníka nimi určeného (pokiaľ už ortocentrum nemá na tabuli nakreslené). Túto operáciu niekoľkokrát opakuje, pričom si môže vyberať aj dokreslené body. Najviac koľko bodov môže Maťko takto dokresliť?*

Riešenie: (opravoval JeFo)
Tak a je to tu! Dočkal som sa, po sedem a pol roku! Zdvihnite prosím ruku, ak nemáte 9 (slovom deväť) bodov. Aha, vidíte to! Nikto! Samé deviatky! Za to Vám napíšem rozprávku.
Kde bolo tam bolo, v krajine trojuholníkov vládol starý kráľ trojuholník ABC. Bol dosť ortodoxný a tak chcel aby každý trojuholník v kráľovstve mal ortocentrum. Ako správny kráľ začal hneď od seba a poprosil dvorného šaša Maťka aby mu to ortocentrum dokreslil. Ten tak nebojácne vykonal a kráľ trojuholník ABC sa mohol popýšiť novým ortocentrom H.
Jedného rána kráľa prebudil zlý sen v ktorom sa mu prisnilo, že keď na sebe zostrojí trojuholník ABH, tak tento trojuholník nemá ortocentrum. To nemohol kráľ trojuholník ABC dopustiť a hneď bežal za šašom Maťkom a budil ho s prosbou, nech aj trojuholníku ABH dokreslí ortocentrum.



Rozospatý šašo Maťo sa na neho ospalo zadíval a začal kráľa upokojovať: „Ale kráľ môj, ničoho sa nebojte. Váš trojuholník ABH predsa ortocentrum už dávno má.“ Kráľ sa zadíval na šaša nechápavo a tak šašo pokračoval: „Pozrite sa kráľ môj, výška na stranu AB z vrchola C je tá istá priamka ako výška z vrchola H na tú istú stranu.“ Kráľ sa stále tváril neurčito a tak šašo pokračoval: „Pozri sa kráľ na stranu AC, táto strana je časťou výšky v trojuholníku ABH z vrcholu A na stranu BH.“ Kráľovi sa rozžiarili oči a blažene skonštatoval: „Už to vidím Maťko, ortocentrum trojuholníka ABH je bod C.“
Kráľ bol dostatočne múdry, aby si uvedomil že rovnako to bude s trojuholníkmi BCH a CAH, preto ho už viac nemátali nočné mory.
Ja len na záver ešte podotknem, že je jedno, či je kráľ tupouhlý alebo ostrouhlý. V prípade, že je kráľ pravouhlý, je bod H totožný s vrcholom, pri ktorom je pravý uhol.

Úloha č. 2: *Veronika sa naučila čarovať. Uložila si do radu 100 strieborných mincí a ide ich premeniť na zlaté. Musí kúzliť tri sekundy na to, aby premenila jednu striebornú mincu na zlatú. Ak sa však vedľa premieňanej mince nachádza jedna zlatá minca, tak jej to trvá len dve sekundy. Ak sú vedľa premieňanej mince dve zlaté mince, tak ju premení za jednu sekundu. Viac ako jednu mincu súčasne nemôže premieňať. Najmenej koľko sekúnd musí Veronika kúzliť, aby premenila všetkých sto mincí na zlaté? Nezabudnite zdôvodniť, prečo sa jej to za menej sekúnd nemôže podariť.*

Riešenie: (opravoval Zajo)
Jedna z taktík premieňania mincí, akú môže Veronika zvoliť, je premeniť mincu na kraji a potom postupne všetky ďalšie. Takto to zvládne za 201 sekúnd. Ak jej skúsime vymyslieť nejaký iný postup, nech sa snažíme ako chceme, premieňanie všetkých mincí vždy trvá 201 sekúnd. Preto sa oplatí zamyslieť sa nad tým, či premieňanie nebude vždy trvať rovnako dlho. Väčšina z Vás sa pustila do „ostrovčekového“ prístupu, kedy ste sa snažili v skratke ukázať, že aby sme niečo ušetrili, musíme premeniť nejakú mincu ďalej za 3 sekundy, čím zase ušetrenú 1 sekundu stratíme. Príklad sa takto dal ľahko dorátať, ale vyžadovalo to obšírnejšie vysvetľovanie a bolo treba si dať pozor na pár okrajových prípadov. Ako elegantnejšie sa ukázalo pozerať sa na „susedstvá“ mincí. V rade je 100 mincí, teda 99 susedstiev. Ak sa pozrieme na dve ľubovoľné susedné mince, určite vieme, že najprv bude premenená jedna

[1] Ortocentrum je priesečník výšok v trojuholníku.

z nich a potom druhá. Čas za ktorý sa minca premení je $3 - x$ sekúnd, kde x je počet už premenených susedných mincí. Pre každé zo susedstiev platí, že práve jednej z mincí (tej neskôr premenenej), medzi ktorými je susedstvo, ušetrí pri premieňaní sa jednu sekundu. Každá minca sa premieňa (bez vplyvu susedných mincí) 3 sekundy a teda všetky sa budú premieňať (keby sa mince neovplyvňovali) 300 sekúnd. Za každé susedstvo ušetríme jednu sekundu z času potrebného na premenenie jednej z mincí, medzi ktorými je toto susedstvo. Celkový počet sekúnd potrebný na premenu všetkých mincí je vždy $3 \cdot 100 - 99 = 201$.

<u>Úloha č. 3:</u> *Hago sa hrá nasledujúcu hru. Na tabuľu si napíše všetky celé čísla od 2 po 9 000 000, každé práve raz. Následne v prvom kroku z tabule zmaže všetky tabuľové prvočísla prvej úrovne, čiže také čísla, ktoré sú prvočísla (teda nemajú na tabuli iného deliteľa okrem seba). Potom v druhom kroku zmaže všetky tabuľové prvočísla druhej úrovne, čiže také čísla, ktoré nemajú na tabuli iného deliteľa ako seba (napr. číslo 6, keďže 2 a 3 sú už zmazané). Týmto štýlom pokračuje ďalej. Nájdite všetky čísla, ktoré Hago vymaže v kroku, po ktorom už na tabuli neostane žiadne číslo. Nezabudnite zdôvodniť, že ste našli naozaj všetky čísla.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kika a Mojo)
Určite nám neublíži, keď to skúsime spraviť pre čísla napr. do 50. Získame predstavu o každom čísle, koľkého stupňa je to tabuľové prvočíslo. Keby máme čísla len od 2 do 50, tak Hagovi zostane len 32. Ale prečo? Ako súvisia delitele so stupňom tabuľového prvočísla?
Každé číslo x viem rozložiť na prvočísla a zapísať ho tvare $x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k$, kde prvočísla nemusia byť rôzne. Ak máme v prvočíselnom rozklade jedno prvočíslo, tak číslo je prvočíslo a teda aj tabuľové prvočíslo prvého druhu. Ak má číslo v prvočíselnom rozklade dve prvočísla, tak sa zmaže v druhom kroku a teda je to prvočíslo druhého stupňa. V prvom kroku sa totiž zmažú obe jeho prvočísla a tak na tabuli nezostane žiadny jeho deliteľ. Keďže nezostane žiadny deliteľ, tak číslo bude musieť byť zmazané v druhom kroku. Počkať, ale čo ak sa rovnajú. Potom nezmažem obe jeho prvočísla v prvom kroku. Nuž, vtedy zmažem prvočíslo a na tabuli zostane jeho druhá mocnina (ktorá sa rovná nášmu číslu) a tá už nemá iných deliteľov, takže bude zmazaná v druhom kroku.
Skúsme si to zovšeobecniť. Nech má číslo x v prvočíselnom rozklade k prvočísel. Ako vyzerajú jeho delitele? V koľkom kroku bude zmazané? Najprv si odpovieme na prvú otázku. Medzi jeho delitele patria všetky prvočísla v prvočíselnom rozklade. Potom sú tam všetky súčiny dvoch týchto prvočísel, teda: $p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_3, \dots, p_{k-1} \cdot p_k$. Aj všetky súčiny troch prvočísel z prvočíselného rozkladu, aj štyroch, …, aj súčiny k-tich prvočísel z prvočíselného rozkladu (súčin k-tich je len jeden a to samotné číslo x). Už vieme, že v prvom kroku budú zmazané všetky prvočísla. V druhom kroku budú zmazané všetky súčiny dvoch prvočísel, pretože už nebudú mať svojich deliteľov-prvočísla. Delitele, ktoré sú súčinmi aspoň troch prvočísel nebudú zmazané, pretože medzi ich deliteľmi sú súčiny dvoch prvočísel. V treťom kroku budú zmazané budú zmazané všetky súčiny troch prvočísel, pretože ich deliteľmi boli prvočísla a súčiny dvoch prvočísel. Čísla ktoré sú súčinom k prvočísel budú zmazané v k-tom kroku, pretože už tam nebudú mať žiadneho zo svojich deliteľov, ktorý je súčinom $k - 1$ a menej prvočísel.
Hľadáme číslo, ktoré je menšie ako 9 000 000, a má v prvočíselnom rozklade čo najviac prvočísel. Najmenšie prvočíslo je 2. Chceme teda mať v prvočíselnom rozklade čo najviac dvojek. Nič nám totiž nebráni, aby tam boli len dvojky. Jednoducho dorátame, že 2^{23} je najväčšie číslo zložené len z dvojok menšie ako 9 000 000. Ešte treba overiť, že žiadne iné číslo zložené z 23 prvočísel menšie ako 9 000 000 neexistuje. Druhé najmenšie číslo zložené z 23 prvočísel je $2^{22} \cdot 3$, avšak toto číslo je väčšie ako 9 000 000, teda nevyhovuje.
Jediné číslo, ktoré zmažeme v 23 kroku je 2^{23}, všetky ostatné boli zmazané v niektorom predchádzajúcom kroku.

<u>Úloha č. 4:</u> *Jožko sa učil v škole rysovať os uhla. Hneď si na papier narysoval dve priamky a išiel rysovať. Prišla však Anička a odstrihla mu časť papiera, na ktorom sa nachádzal ich priesečník. Jožkovi tak ostal iba papier s dvomi časťami priamok bez ich priesečníka. Ako zostrojí len pomocou pravítka a kružidla os uhla ktorý zvierajú? Rysovať môže len na papieri, čo mu zostal.*[2]

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ivka a Adam)
Snažíme sa nájsť os uhla. Na to nám stačí nájsť ľubovoľné dva body ležiace na tejto osi, ktorými už bude os jednoznačne určená. Ako budeme tieto body hľadať?
Zamyslíme sa. Čo vieme o osiach uhlov? V trojuholníku sa správajú veľmi pekne, všetky tri sa pretínajú v jednom bode (stred vpísanej kružnice). Vieme niekde v našom príklade zostrojiť trojuholník?
Skúsme si predstaviť náš obrázok spolu s odstrihnutou časťou. Keď k ramenám uhla pridáme tretiu stranu ktorá ich bude pretínať, dostaneme trojuholník. V tomto trojuholníku poznáme dva vrcholy (tretí je v ustrihnutej časti, ktorú si iba predstavujeme). Osi uhlov pri známych vrcholoch Jožko vie zostrojiť. Pretnú sa v jednom bode. Avšak týmto bodom musí prechádzať aj os uhla pri vrchole, ktorý si len predstavujeme. Tadááá, máme prvý bod ležiaci na našej osi!
Ako získame druhý? No presne rovnako, akurát budeme pracovať v inom trojuholníku (chceme dva rôzne body). Tretiu stranu si zvolíme rovnobežnú s predošlou, aby sa nám nestalo, že sa stredy vpísaných kružníc zhodujú. Vieme spraviť rovnobežku? Máme k dispozícii iba pravítko a kružidlo. Rovnobežku spravíme tak, že si do kružidla

[2] Nemôže si dokresliť priesečník týchto dvoch priamok. Je totižto v škole a nesmie poškodiť lavicu. Nemá pri sebe ani ďalšie papiere.

vezmeme nejakú náhodnú veľkosť a nanesieme ju z krajných bodov pôvodnej tretej strany, na ramená uhla. Vzniknú nám takto dva body, ktorými budeme viesť našu novú tretiu stranu v novom trojuholníku. Zopakujeme postup a nájdeme priesečník osí uhlov.
Takto sme získali už oba body, teraz ich pomocou pravítka spojíme a dostaneme našu hľadanú os.

Úloha č. 5: *Adam má z zelených a m modrých autíčok, ktoré si ukladá do jedného radu na poličku. Autíčka vyzerajú úplne rovnako, líšia sa len farbou. Skupinu modrých autíčok tvorí niekoľko (nie 0) za sebou uložených modrých autíčok, ktoré sú ohraničené zeleným autíčkom alebo krajom radu.*[3] *Koľkými rôznymi spôsobmi môže Adam uložiť autíčka na poličku, aby vytvoril práve s skupín modrých autíčok?*

Riešenie: (opravoval Ľubo)
Nazačiatok sa zamyslime, kedy má túto úlohu vlastne zmysel riešiť. Ak chceme spraviť s skupín autíčok, tak na to potrebujeme aspoň s modrých autíčok. Na to, aby sme ich do týchto s skupín vedeli rozdeliť potrebujeme aspoň $s-1$ zelených autíčok. Takže máme tieto dve podmienky:

$$m \geq s$$

$$z \geq s-1$$

Teraz si úlohu rozdelíme na dve časti. Ako prvé zistíme, koľkými spôsobmi vieme usporiadať m modrých autíčok do s skupín. Predstavme si nejaký rad modrých autíčok. Na oddelenie skupiny vždy pridáme jedno zelené autíčko medzi nejaké dve modré. Dokopy chceme pridať $s-1$ zelených autíčok, ktoré nám vytvoria hľadaných s skupín. Zelené autíčko vieme pridať do ľubovoľnej medzery medzi dve modré, teda na $m-1$ miest, pričom do každej medzery dáme najviac jedno. Počet možností si z toho vieme vyjadriť kombinačnýmm číslom:

$$\binom{m-1}{s-1}$$

Prvú časť máme za sebou, poďme sa pustiť do tej druhej. Musíme ešte zistiť, koľkými spôsobmi vieme doplniť zvyšné zelené autíčka. Ostalo nám ich $z-s+1$, keďže $s-1$ sme už použili na oddelenie modrých autíčok. Tieto zelené autíčka chceme rozdeliť do $s+1$ skupín ($s-1$, ktoré tvoria oddelenia skupín modrých autíčok a 2 na krajoch). Avšak nie v každej skupine musí byť nejaké autíčko. Predstavme si teda nejaký rad zvyšných zelených autíčok, do ktorého pridáme už vytvorených s skupín modrých autíčok (jednu skupinu si označíme ako S a budeme o nej uvažovať, ako keby je to len jeden člen). Dokopy máme teda $z+1$ členov. Chceme zistiť, koľkými spôsobmi vieme tieto prvky usporiadať. Predstavme si teda $z+1$ „chlievikov", do ktorých vpíšeme buď Z (zelené autíčko) alebo S (skupina modrých autíčok). To vieme spraviť tak, že do $z-s+1$ „chlievikov" vložíme Z a do zvyšných doplníme S. Teda vlastne vyberieme $z-s+1$ „chlievikov" z celkového počtu $z+1$ „chlievikov". A keďže chceme zistiť, koľkými spôsobmi to vieme niečo takéto spraviť, tak dostávame opäť kombinačné číslo:

$$\binom{z+1}{z-s+1} = \binom{z+1}{s}$$

A teda celkový počet možností, ako usporiadať z zelených autíčok a m modrých autíčok tak, aby modré autíčka tvorili s skupín dostaneme vynásobením týchto dvoch kombinačných čísel a síce:

$$\binom{m-1}{s-1} \cdot \binom{z+1}{s}$$

Úloha č. 6: *Desať vedúcich KMS je zmrzlinu. Každý z nich má medzi nimi práve* 6 *kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Zmrzlina obsahuje presne* 120 *porcií. Vedúci však majú len jednu lyžičku, preto jedia nasledujúcim spôsobom: ten, kto má lyžičku, zje jednu porciu zmrzliny a podá lyžičku nejakému svojmu kamarátovi. Toto sa opakuje, až kým nezjedia celú zmrzlinu. Dokážte, že ak má na začiatku lyžičku ľubovoľný vedúci, tak vedia zjesť zmrzlinu tak, aby každý zjedol 12 porcií.*

Riešenie: (opravoval Jožo)
Potrebujeme nájsť nejaký spôsob, ako si budú vedúci podávať lyžičku tak, aby každý zjedol 12 porcií. O ňom musíme samozrejme dokázať, že je správny. Jedna možnosť je vybaviť zopár vedúcich hneď na začiatku. Napríklad vedúci v_1, čo má na začiatku lyžičku, si ju môže posúvať so svojím kamarátom v_2, kým obaja nezjedia 12 porcií a lyžička skončí u vedúceho v_2. Ten ju potom podá ďalšiemu kamarátovi v_3. Ten zopakuje to isté, teda bude si vymieňať lyžičku so svojim kamarátom v_4. Potom ju v_4 podá ďalšej dvojici kamarátov, čo sa bude opakovať, kým sa takto nenajedia všetky dvojice.

[3] Napríklad, ak si modré autíčka označíme ako M a zelené ako Z, tak v uložení $MMMZZMZMM$ sa nachádzajú práve tri skupiny modrých autíčok.

Musíme však zaručiť, aby vedúci, čo dojedol svojich 12 porcií mal ešte nejakého nenajedeného kamaráta, ktorému posunie lyžičku. Ak sa nad tým zamyslíme, zistíme, že nám stačí, aby si vedúci vedeli vedľa seba posadať do radu v_1, v_2, …, v_{10} tak, aby každý vedúci sedel medzi dvoma svojimi kamarátmi. Dôležité je, že tento rad musí začínať vedúcim, čo má na začiatku lyžičku.

Poďme teda postupne usádzať vedúcich do radu. Zoberme vedúceho v_1, ktorý má na začiatku lyžičku, a posaďme vedľa neho nejakého jeho kamaráta v_2. Vedľa vedúceho v_2 posaďme jeho kamaráta v_3. Toto opakujeme, pokiaľ sa nám dá. Skončíme, ak posledný vedúci v_n, ktorého sme posadili, nebude mať stojacich kamarátov. Keďže každý vedúci má šesť kamarátov, tak sa nám to môže stať najskôr až pre $n \geq 7$.

Máme teraz $n \geq 7$ vedúcich v_1, v_2, …, v_n sediacich v rade. Ak $n = 10$, tak sme dosiahli, čo sme chceli. V opačnom prípade sa pozrime na nejakého vedúceho u, čo stojí. Okrem neho stojí ešte ďalších $9-n$ vedúcich, pričom s každým sa môže kamarátiť. Avšak aspoň $6-(9-n) = n-3$ kamarátov vedúceho u už sedí. Z toho je nám jasné, že nejakí dvaja jeho kamaráti sedia vedľa seba. Totiž ak si spravíme postupne zľava dvojice vedúcich, tak nám vznikne najviac $(n+1)/2$ skupín vedúcich (väčšina skupín budú dvojice, ešte nám môže ostať jeden sám). Keďže pre $n = 7, 8, 9$ platí $9-n > (n+1)/2$, tak z Dirichletovho princípu vyplýva, že aspoň v jedenej skupine sú dvaja kamaráti vedúceho u. Títo kamaráti určite sedia vedľa seba. Preto si vedúci u môže sadnúť medzi nich.

Ak si teda na začiatku neposadali všetci vedúci, vie si jeden zo stojacich vedúcich k nim prisadnúť. Potom však dostaneme podobnú situáciu a postupne môžeme rovnakým spôsobom usadiť zvyšných vedúcich, čo ostali stáť (ak nejakí vôbec ostali). Všimnite si, že vedúci v_1, čo mal na začiatku lyžičku ostal na svojom mieste, teda na začiatku radu. Toto by napríklad neplatilo, ak by sme počas usádzania pred neho posadili nejakého kamaráta. Vtedy by sme nemali zaručené, že na začiatku radu môže byť ľubovoľný vedúci. A keď ich už máme pekne posadených tak, že každý sedí medzi svojimi dvomi kamarátmi, môžu si lyžičku podávať tak, ako sme opísali na začiatku. Tak každý vedúci zje 12 porcií.

Iné riešenie:

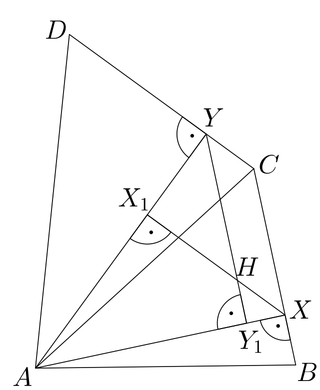
Vedúcich si môžeme predstaviť ako vrcholy grafu a hranou spojíme tých, čo sa kamarátia. Keďže každý komponent grafu musí mať aspoň sedem vrcholov, preto tento graf musí byť súvislý. Keďže z každého vrcholu vychádza párny počet hrán a náš graf je súvislý, tak obsahuje uzavretý eulerov ťah.[4] Inak povedané, dá sa nakresliť jedným ťahom tak, aby sme začali aj skončili v rovnakom vrchole, pričom tento vrchol môže byť ľubovoľný. Takže vedúci si budú lyžičku podávať po tomto eulerovom ťahu. Po jeho dokončení každý vedúci zje tri porcie (dostane lyžičku, zje kopček a posunie lyžičku) a lyžičku bude mať opäť vedúci, čo ju mal na začiatku. Ak toto vedúci zopakujú trikrát, každý zje 12 porcií.

Iné riešenie:

Ďalším spôsobom je ukázať, že graf vedúcich obsahuje hamiltonovskú kružnicu, t. j. kružnicu, ktoré prechádza všetkými vrcholmi. Toto vyplýva z Diracovho kritéria, keďže každý vrchol grafu má stupeň aspoň polovicu z počtu vrcholov. Teda vedúci si budú posúvať lyžičku po tejto kružnici a po 12 kolách zje každý vedúci 12 porcií.

Úloha č. 7: *Hopko sa stratil v lese. Našťastie našiel rázcestie s názvom „Ortocentrum trojuholníka AXY". Vytiahol rýchlo mapu a začal hľadať, kde sa nachádza. Les má tvar štvoruholníka $ABCD$, v ktorom AC je os uhla BAD a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Body X, Y sú zaznačené ako päty výšok z bodu A v trojuholníkoch ABC, ADC. Pomôžte Hopkovi zorientovať sa a dokážte, že ortocentrum trojuholníka AXY leží na priamke BD.*

Riešenie: (opravoval)



Zo zadania vidíme, že štvorúholník $ABCD$ je zložený z dvoch podobných trojuholníkov ABC a ACD (podľa vety uu). Navyše trojuholník ACD vznikne otočením o uhol BAC a zväčšením (rovnolahlosťou v strede s A) trojuholníka ABC. Toto zobrazenie nám zobrazí AX na AY. Takže označme $|\sphericalangle XAY| = \gamma = |\sphericalangle BAC|$.

Ortocentrum AXY označme H. Päty výšok v trojuholníku AXY z vrcholov X, Y označme postupne X_1, Y_1. Vidíme, že $|\sphericalangle X_1Y_1H| = 180-\gamma = |\sphericalangle XHY| = |\sphericalangle XCY|$ (rozmysli si platnosť poslednej rovnosti).

Trojuholníky AXX_1 je podobný s AYY_1 podľa vety uu. Preto aj $|\sphericalangle AXX_1| = |\sphericalangle AYY_1|$ teda aj $|\sphericalangle HYC| = |\sphericalangle HXC|$. Vidíme teda, že $HXCY$ je rovnobežník. Špeciálne teda $|\sphericalangle BXH| = |\sphericalangle HYD|$

Teraz by sme chceli ukázať, že H leží na BD. Stačí nám spočítať uhol BHD a radi by sme dostali priamy uhol.

Z podobnosti trojuholníkov ABC a ACD vieme, že $|BX|/|XC| = |CY|/|YD|$.

Z rovnobežníka vieme, že $|CX| = |HY|$ a $|CY| = |XH|$. Dostávame $|BX|/|YH| = |XH|/|YD|$, z čoho vidíme, že trojuholník HBX je podobný s trojuholníkom DHY. Dopočítame uhol BHD a zistíme, že je priamy.

[4] Dôkaz môžete nájsť v zbierke KMS, str. 98

Úloha č. 8: *Nech $n \geq 3$ je prirodzené číslo. Žaba skáče pozdĺž číselnej osi. Začína na čísle 0 a urobí n skokov: Jeden dĺžky 1, jeden dĺžky 2, ..., jeden dĺžky n. Tieto skoky môže urobiť v ľubovoľnom poradí. Ak však žaba sedí na kladnom čísle, ďalší skok musí urobiť doľava (smerom do záporných čísel) a ak je na nekladnom čísle, ďalší skok musí urobiť doprava. Nájdite najväčšie prirodzené číslo k také, že žaba vie urobiť svojich n skokov tak, aby nikdy nebola na žiadnom z čísel $1, 2, \ldots, k$.*

Riešenie: (opravovala Vodka)
Pozrime sa najprv na to, po akých políčkach môže žaba vôbec skákať. Samozrejme predpokladáme, že skáče tak, že na čísla $1, 2, \ldots, k$ sa nikdy nedostane. Zrejme, aby mohla urobiť vôbec prvý skok, platí $k < n$. Na aké najväčšie číslo sa môže dostať? No na najväčšom čísle bude zrejme po skoku smerom doprava. A najväčšie číslo, z ktorého môže skákať doprava je 0. Najdlhší skok je n, a preto najväčšie číslo na ktoré sa žaba môže dostať je n.
Obdobne určíme najmenšie. To bude zrejme po skoku doľava. Najmenšie číslo, z ktorého môže skočiť doľava je $k+1$ (keďže na menšie sa nikdy nedostane). Opäť je najdlhší možný skok n, a preto najmenšie číslo na aké sa žaba môže (aspoň teoreticky) dostať je $-(n-k-1)$.
Z tohto hneď niečo vidno. Napríklad to, že skáče len po číslach, ktoré sú v takých dvoch blokoch. A to od $-(n-k-1)$ po 0, a druhý blok je od $k+1$ po n. V rámci jedného bloku môže urobiť skok dĺžky max. $n-k-1$. A ak skáče z jedného bloku do druhého, urobí skok dĺžky aspoň $k+1$. No tu hneď vidíme, že ak $k > n-k-1$, tak žaba nemôže žiadnym spôsobom urobiť skok dĺžky k. Preto nutne $k \leq n-k-1$ a teda $k \leq (n-1)/2$.
Ukážeme, že tento odhad je už dosť dobrý a že žaba vie tak skákať pre $k = (n-1)/2$ ak je n nepárne resp. pre $k = (n-2)/2$ ak je n párne. Tí šikovnejší z vás vedia, že sa to dá zapísať ako $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$
Takže tá spomínaná konštrukcia. Ak položíme $k = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, tak žaba urobí postupne skoky dĺžok $k+1$, $k+2$, 1, $k+3$, 2, $k+4$, 3, $\ldots$, $k+i+1$, i, $\ldots$, $2k+1$, k, pričom ak n bolo nepárne, tak skončila, a ak n bolo párne ešte urobí skok dĺžky $n = 2k+2$. Zjavne urobila všetky skoky.
A rozmyslieť si, že nikdy neskočila na žiadne z čísel $1, 2, \ldots, k$ je tiež pomerne ľahké, stačí si uvedomiť, že po každom nepárnom skoku je buď na čísle 0 alebo $k+1$, a potom skočí o viac ako k.
Takže hľadané k je $k = \lfloor (n-2)/2 \rfloor$.

Úloha č. 9: *Macocha nechce pustiť Popolušku na bál. Keďže by Popoluška strukoviny rýchlo roztriedila, macocha pre ňu vymyslela prefíkanejšiu úlohu. Popoluška musí roztriediť prirodzené čísla do 2016 nekonečných rastúcich aritmetických postupností takých, že:*

- *Každé prirodzené číslo sa nachádza v najviac jednej postupnosti.*
- *Existuje iba konečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa nenachádzajú v žiadnej postupnosti.*
- *Každá postupnosť obsahuje prvočíslo väčšie ako 2016.*

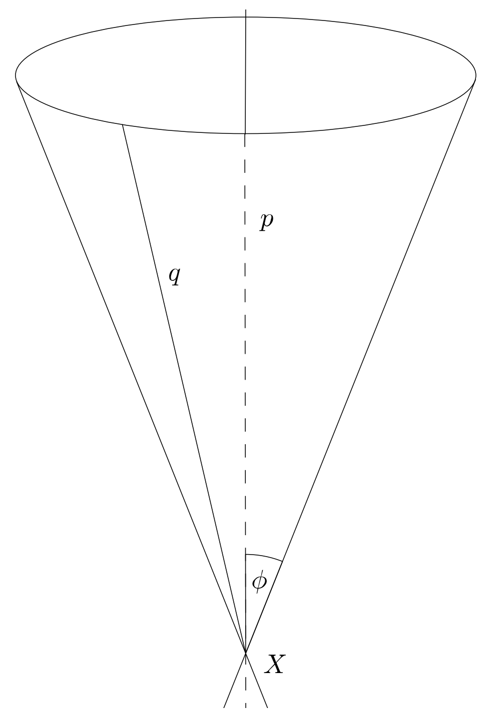
Podarí sa to Popoluške a stihne bál? Zistite, či existuje 2016 takých postupností.

Riešenie: (opravoval Mišo)
Z prvej podmienky vieme, že žiadne dve postupnosti nemajú spoločné číslo. Pre diferencie týchto aritmetických postupností preto musí platiť, že sú súdeliteľné. To si hňeď aj dokážeme.
Nech sú teda dve diferencie nesúdeliteľné. Ich veľkosti si označme d_1 a d_2. Prvky postupnosti s diferenciou d_1 majú rovnaký zvyšok po delení číslom d_1 a od určitého čísla do tejto postupnosti patria všetky prirodzené čísla s týmto zvyškom.
Druhá postupnosť má s ňou diferenciu nesúdeliteľnú, teda jej členy postupne nadobúdajú všetky zvyšky po delení d_1. Preto dostatočne veľké číslo druhej postupnosti s vyhovujúcim zvyškom po delení d_1 bude patriť aj do prvej postupnosti. Týmto sme ukázali, že ak majú dve rastúce aritmetické postupnosti nesúdeliteľné diferencie, musia obsahovať nejaké rovnaké prvky.
Naše aritmetické postupnosti však žiadne dva prvky spoločné nemajú. Každé dve postupnosti teda musia mať súdeliteľné diferencie. Úlohu si teraz rozdelíme na dva prípady a to prípad, keď jedno prvočíslo delí všetky diferencie a prípad, keď také prvočíslo neexistuje.
Ak nejaké prvočíslo p delí každú diferenciu, tak sa pozrime na jeho (prirodzenočíselné) násobky. Je ich nekonečne veľa a iba konečný počet z nich nie je v nejakej postupnosti. Keďže p delí každú diferenciu a toto sú jeho násobky, existuje nejaká postupnosť, ktorej všetky prvky sú násobkami p.
Aby bola splnená aj tretia macochina podmienka, musí každá postupnosť obsahovať prvočíslo väčšie ako 2016. Jediným prvočíslom v postupnosti tvorenej násobkami p je samotné p. Z toho vyplýva, že p musí byť aspoň 2017. Získali sme 2016 postupností kde každá má diferenciu aspoň 2017. Potom však z každých 2017 po sebe idúcich čísel aspoň jedno nepatrí ani do jednej postupnosti. Nevieme zabezpečiť druhú macochinu podmienku, takže také p, ktoré delí každú diferenciu, neexistuje.
V druhom prípade je ľubovoľná dvojica diferencií súdeliteľná, ale nemajú jedného univerzálneho deliteľa. Preto je každá diferencia zloženým číslom. Túto časť dôkazu sa budeme snažiť riešiť ako časť s p. Namiesto násobku p hľadáme postupnosť, ktorej členy sú deliteľné jej diferenciou.

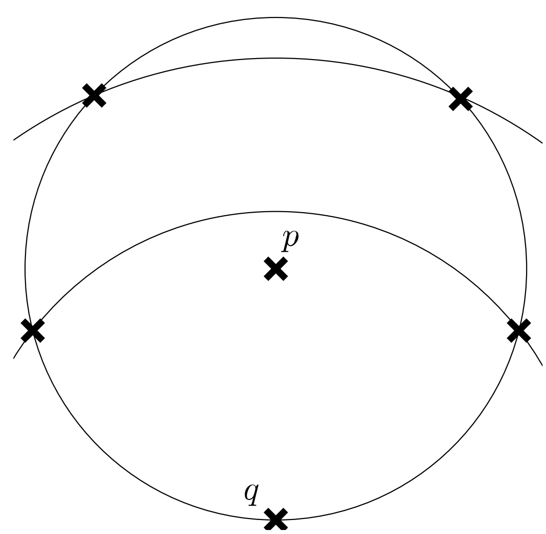
Pozrime sa na najmenší spoločný násobok všetkých diferencií D. So svojími násobkami tvorí nekonečnú postupnosť, takže z druhej macochinej podmienky vyplýva, že existuje postupnosť, ktorá obsahuje nejaké z týchto čísel. Toto číslo je násobkom jej diferencie, takže aj ostatné prvky postupnosti budú násobkami diferencie. Preto žiaden prvok nemôže byť prvočíslom a nesplníme tretiu macochinu podmienku.
Ukázali sme, že nikdy nemôžu platiť všetky tri podmienky naraz. 2016 postupností spĺňajúcich všetky tri podmienky preto neexistuje.
Poznámka: Pri dokazovaní sme mlčky využili ďalšie dve vlastnosti postupností a to, že sú nekonečné a rastúce. Vyskúšajte si skonštruovať vyhovujúce spotupnosti, ktoré jednu z týchto vlastností nemajú.

Úloha č. 10: *Mišo sa rád hrá so špajľami. Ukladá si ich tak, aby zvierali rovnaké uhly a rozmýšľa, koľko sa mu ich podarí uložiť. Nájdite najväčší možný počet priamok v priestore, ktoré všetky prechádzajú jedným bodom a uhol medzi ľubovoľnými dvoma z nich je rovnaký a nenulový.*

Riešenie: (opravoval Hiphop)
Ako prvé je v podobných úlohách dobré utvoriť si predstavu, koľko zhruba výsledok môže byť. Poďme to najprv nejak odhadnúť zdola. Ak by sme nemali priestor, ale rovinu, tak do nej vieme vložiť maximálne 3 priamky, navzájom zvierajuce uhol 60° (premyslite si). Myšlienku tejto konštrukcie vieme zovšeobecniť aj do priestoru, vďaka čomu vieme dostať 4 priamky – spojnice stredu pravidelného štvorstenu a jeho vrcholov, ktoré navzájom zvierajú rovnaké uhly.
Pozrime sa na to teraz z opačnej strany, a síce skúsme nejak ohraničiť náš maximálny počet priamok. Označme si bod, ktorým majú prechádzať všetky priamky ako X a jednu z týchto priamok ako p. Teraz prichádza kľúčová myšlienka – ak chceme, aby všetky zvyšné priamky zvierali s p konštantný uhol ϕ, tak musia ležať na povrchu kužeľa s vrcholom X a osou p. Zároveň je to aj postačujúca podmienka, takže sme naplno využili našu informáciu. Pozrime sa teraz na nejakú priamku (označme q) z povrchu kužeľa. Kde môžu byť zvyšné priamky na kuželi, ktoré s ňou zvierajú konštantný uhol ϕ? Odpoveď nám poskytne prierez kužeľa kolmý na p, viď. obrázok. Čím ďalej od q na priereze sa bude priamka nachádzať, tým väčší uhol bude zvierať. Mohlo by sa teda zdať, že môžu vyhovovať len dve ďalšie priamky, no v skutočnosti okrem priamok zvierajúcich s q uhol ϕ musíme brať do úvahy aj priamky zvierajúce s q uhol $180° - \phi$ (ako uhol medzi dvoma priamkami sa berie tem menší). Preto dostávame maximálne 4 priamky, ktoré môžu s q zvierať uhol ϕ. Spolu s p a q dostávame, že viac ako 6 priamok zvierajúcich rovnaké uhly sa do priestoru nebude dať uložiť.



Počet 6 nevyzerá nedosiahnuteľne – stačí nám dosiahnuť, aby 4 priamky z povrchu kužeľa zvierali navzájom rovnaký uhol. Poďme sa preto skúsiť viac pohrať s konštrukciou. Priamky majú zvierať navzájom rovnaké uhly, preto by nám ku konštrukcii mohlo pomôcť niečo pravidelné. Aké najpravidelnejšie veci v priestore poznáme? Predsa Platónske telesá.[5] Ak sa pozrieme na 12-sten, a priamky vytvoríme ako spojnice stredov protiľahlých strán, dostaneme presne to čo chceme. Rovonsť uhlov vyplýva zo symetrie (premyslite si).



Poznámka: Odporúčam pozrieť si aj videovzorák, v ktorom sa nachádza aj iný (jednoduchší a trikovejší) odhad šiestich priamok.

[5] O Platónskych telesách sa dá niečo dočítať napríklad tu: `https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid`