Vzorové riešenia 3. série letnej časti KMS 2015/2016

**Úloha č. 1:** *Aňa a Veronika sa hrajú hru. Na začiatku majú na stole* 47 *zápaliek. Aňa začína a potom sa striedajú v ťahoch. Každá vo svojom ťahu zoberie zo stola buď* 1*,* 3 *alebo* 5 *zápaliek. Vyhráva tá, ktorá zoberie poslednú zápalku. Má niektorá z nich víťaznú stratégiu?*[1] *Nezabudnite svoje tvrdenie zdôvodniť.*

Riešenie: (opravovali Domča a Mojo)

Všimnime si, čo majú čísla 1, 3 a 5 spoločné. Všetky sú nepárne. A teda ak pred naším ťahom máme párny počet zápaliek, tak po našom ťahu bude počet zápaliek nepárny a naopak.

To znamená, že po Aninom ťahu nám ostane párny počet zápaliek a po Veronikinom ťahu nepárny. To sa opakuje aj pri Aninom a Veronikinom druhom ťahu, tretom ťahu… Z toho vyplýva, že Aňa bude ma po svojom ťahu vždy párny počet a Veronika nepárny počet zápaliek (rozmyslite si prečo).

Keďže nula je párna, tak Veronika ju po svojom ťahu nemôže nikdy dosiahnuť. A teda Veronika nemôže vyhrať. Keďže vždy musí niekto vyhrať (lebo po každom ťahu sa zníži počet zápaliek), tak to musí byť Aňa.

**Úloha č. 2:** *V Kocúrkove je niekoľko miest a medzi niektorými dvojicami miest premáva priama obojsmerná letecká linka. Letecká sieť medzi týmito mestami je súvislá, ak sa z každého mesta dá niekoľkými linkami dostať do ľubovoľného iného mesta. Keďže je to však Kocúrkovo, ich letecká sieť nie je súvislá. Starosta sa preto rozhodol pre komplexnú reformu. Nariadil zrušiť všetky letecké linky a zaviedol nové (opäť priame obojsmerné) letecké linky medzi každými dvomi mestami, ktoré pred reformou neboli spojené priamou linkou. Zistite, či bude po tejto reforme letecká sieť Kocúrkova súvislá. Nezabudnite svoje tvrdenie zdôvodniť.*

Riešenie: (opravoval Dominik)

K tomu, aby sme zistili, ako bude po reforme vyzerať letecká sieť v Kocúrkove, musíme si najskôr uvedomiť, ako mohla vyzerať pred ňou.

Aby bola sieť nesúvislá, musí existovať minimálne jedna dvojica miest, medzi ktorými nevedie žiadne, priame ani nepriame, letecké spojenie. To je ekvivalentné s tým, že sieť je nesúvislá, ak obsahuje dve neprázdne množiny miest, medzi ktorými neexistuje žiadne letecké spojenie. Chceme ukázať, že po reforme bude letecká sieť súvislá. Ako to spraviť? Ukážeme, že sa vieme dostať z ľubovoľného mesta do každého iného. Pozrime sa teda na nejaké dve mestá. Ak mestá neboli pred reformou priamo letecky spojené, tak po reforme budú.

Čo ale ak boli? Na to využijeme fakt, že pred reformou museli existovať dve množiny miest, medzi ktorými nebolo žiadne letecké spojenie. Ak boli mestá spojené už pred reformou, tak musia patriť do rovnakej množiny. Bez ujmy na všeobecnosti si môžme povedať, že patrili do prvej množiny.[2] Po reforme budú obe tieto mestá spojené s nejakým mestom z druhej množiny (lebo pred reformou neboli), a teda existuje letecké prepojenie na jeden prestup medzi pôvodnou dvojicou miest.

Ukázali sme, že ľubovoľná dvojica miest bude po reforme prepojená, čo vlastne znamená, že celá letecká sieť bude súvislá.

**Úloha č. 3:** *Ivka si ukladá svoje okrúhle náušnice do lichobežníkovej krabičky. V rovine je daný lichobežník $ABCD$ so základňami $AB$, $CD$ a výškou dĺžky $v$. Kružnica $k$ sa dotýka strán $AB$, $CD$ a $DA$ a kružnica $l$ sa dotýka strán $AB$, $BC$ a $CD$. Dokážte, že kružnice $k$ a $l$ sa zvonka dotýkajú práve vtedy, keď $|AB| - |BC| + |CD| - |DA| = 2v$.*

Riešenie: (opravovali Peťa a Aňa)

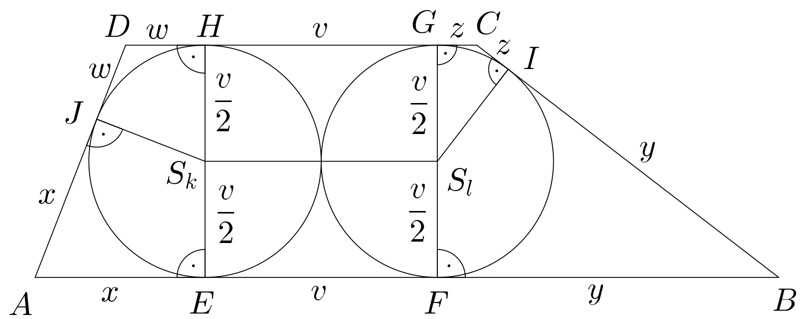
Zo zadania úlohy vieme, že náušnice v tvare kruhov sa dotýkajú oboch základní lichobežníka $ABCD$, pričom jedna náušnica sa dotýka ramena $AD$ a druhá sa dotýka ramena $BC$. To, že sa obe dotýkajú oboch základní, nám hovorí, že kružnice majú rovnaký priemer rovný výške lichobežníka. Preto majú aj rovnaký polomer.

Podľa zadania máme dokázať, že kružnice $k$ a $l$ sa dotýkajú zvonka práve vtedy, keď $|AB|-|BC|+|CD|-|DA| = 2v$. Z toho, že je tam napísané „práve vtedy, keď“ vieme, že úlohu budeme musieť dokázať z oboch strán. Tak sa poďme do toho pustiť!

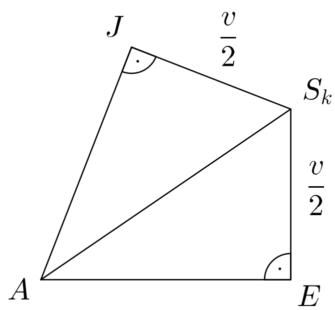
[1] Hráč má víťaznú stratégiu vtedy, ak vie svoje ťahy voliť tak, že vyhrá bez ohľadu na to, ako bude ťahať jeho súper.

[2] Ak by patrili do druhej tak si zmeníme označenie množín.

1. Najprv si dokážeme smer „zľava doprava“, teda ak sa kružnice dotýkajú, tak potom $|AB| - |BC| + |CD| - |DA| = 2v$.
   Už vieme, že kružnice majú rovnaký polomer, a to $r = v/2$. Označme si body $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, $J$, $S_k$, $S_l$ ako na obrázku.




   Keďže sa kružnice dotýkajú a majú rovnaké polomery, tak vzdialenosť stredov kružníc je rovná celkovej výške lichobežníka. Teda $|EF| = v$ a takisto aj $|HG| = v$. Vidíme, že v lichobežníku $ABCD$ sa nám objavil štvorec $EFGH$ so stranou dĺžky $v$.




   Ešte treba zistiť vzdialenosti vrcholov lichobežníka od bodov dotykov. Vezmime si štvoruholník $AES_kJ$. Rozdeľme tento štvoruholník na dva trojuholníky úsečkou $AS_k$. Vďaka vete *ssu* sú tieto trojuholníky zhodné (rozmyslite si prečo), kôli čomu je dĺžka úsečky $AE$ (na obrázku označená ako $x$) rovnaká ako dĺžka úsečky $AJ$. Analogicky vieme prísť aj na nasledovné rovnosti $|FB| = |BI| = y$, $|CI| = |GI| = z$, $|DH| = |DJ| = w$. Teraz si pomocou značenia z obrázka vieme prepísať dĺžky strán nasledovne

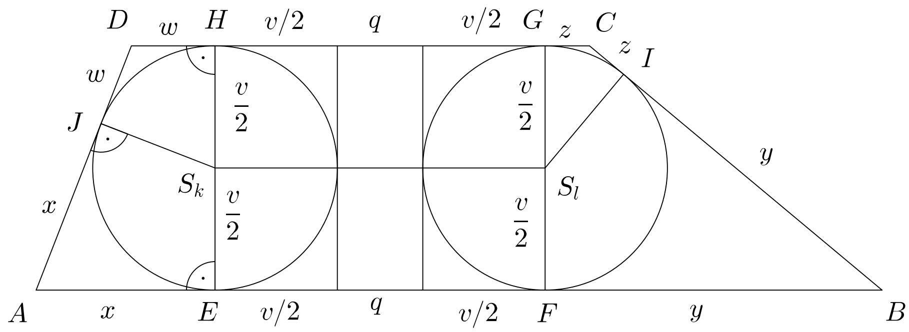
$$\begin{aligned} |AB| &= x + v + y, \\ |AD| &= x + w, \\ |DC| &= w + v + z, \\ |BC| &= z + y. \end{aligned}$$

   Dosadíme do zadania úlohy:

$$\begin{aligned} |AB| - |BC| + |CD| - |DA| &= 2v, \\ k + v + l - m - l + n + v + m - k - n &= 2v, \\ 2v &= 2v. \end{aligned}$$

   Vidíme, že rovnosť platí, teda sme dokázali, že pokiaľ sa kružnice dotýkajú, tak potom $|AB| - |BC| + |CD| - |DA| = 2v$.

2. Ešte treba dokázať úlohu „sprava doľava“, teda ak platí $|AB| - |BC| + |CD| - |DA| = 2v$, tak sa kružnice dotýkajú.




Poďme na to sporom. Predpokladajme, že by sa kružnice nedotýkali. Z obrázku vidíme, že namiesto predchádzajúceho štvorca $EFGH$ s hranou dlhou $v$, by nám teraz vznikol obdĺžnik, ktorého dlhšia hrana je $v + q$. Zo sporu predpokladáme, že $q$ nie je 0 (môže však byť aj záporné). Teraz si môžeme dĺžky strán prepísať nasledovne

$$\begin{aligned} |AB| &= x + v + q + y, \\ |AD| &= x + w, \\ |DC| &= w + v + q + z, \\ |BC| &= z + y. \end{aligned}$$

Po dosadení dostaneme

$$\begin{aligned} |AB| - |BC| + |CD| - |DA| &= 2v, \\ x + v + q + y - z - y + w + v + q + z - x - w &= 2v, \\ 2v + 2q &= 2v. \end{aligned}$$

Tu vidíme, že sme sa dostali do sporu, pretože $2v + 2q \neq 2v$. Týmpádom sme dokázali úlohu aj „sprava doľava“.

**Úloha č. 4:** *Luxusko si objednal ku svojim meninám sadu n luxusných závaží s hmotnosťami* $1!$ kg, $2!$ kg, $3!$ kg, $\ldots$, $n!$ kg.[3] *Koľko rôznych hmotností vie Luxusko pomocou nich odvážiť na rovnoramenných váhach? Závažia môže dávať na obe strany.*

Riešenie: (opravovali Jožo a Zuzka)

Najskôr si vyjasníme jednu filozofickú otázku: Vieme odvážiť 0 kg? Podľa nás, áno. Však ak máme teleso hmotnosti 0 kg, vieme zistiť jeho hmotnosť, dokonca na to ani nepotrebujeme závažia. Keďže ste však mnohí z vás takúto hmotnosť neuvažovali, ani tu ju uvažovať nebudeme. (Je to aj tak jedno, pretože ak by sme ju uvažovali, mali by sme len o 1 väčšie výsledky.)

Položme si teraz dôležitejšiu otázku. Čo znamená odvážiť hmotnosť $x$ kg? Znamená to položiť na misky váh závažia tak, aby rozdiel (v absolútnej hodnote) súčtov hmotností na ľavej a pravej strane bol rovný $x$ kg. Totiž len vtedy môžeme položiť na správnu misku teleso s hmotnosťou $x$ kg a váhy sa vyrovnajú.

Poďme sa teraz pustiť do počítania hmotností. Na začiatok začnime s malými prípadmi. Pre $n = 1$ môže Luxusko odvážiť 1 hmotnosť (1 kg), pre $n = 2$ sú to 3 hmotnosti (1, 2, a 3 kg) a pre $n = 3$ zas 9 hmotností (od 1 kg po 9 kg). Pre $n = 4$ dostaneme hmotnosti 1 až 9 kg a 15 až 33 kg, teda 28 hmotností. Na prvý pohľad sa nám to zdá pri vyšších počtoch závaží dosť chaotické. Niektoré hmotnosti sa dajú odvážiť viacerými spôsobmi ($3 = 3! - 2! - 1! = 1! + 2!$), iné sa zas nedajú odvážiť vôbec (napr. 12 kg). Poďme sa však bližšie pozrieť na to, kedy sa môže stať, že sa nejaká hmotnosť bude dať odvážiť viacerými spôsobmi.

Zoberme si teda takú hmotnosť a dva rôzne spôsoby, ktorými sa dá odvážiť. Pozrime sa na najťažšie závažie, čo sa v týchto dvoch spôsoboch vyskytuje. Ak sa nachádza v obidvoch spôsoboch, môžeme ho odobrať a dostaneme zas inú hmotnosť naváženú dvoma spôsobmi. Toto môžeme opakovať, až kým nám neostane najťažšie závažie s hmotnosťou $k!$, ktoré sa bude nachádzať len v jednom spôsobe (také musí ostať, keďže uvažujeme dva rôzne spôsoby). Najmenšia hmotnosť, ktorú vieme týmto spôsobom odvážiť, je zjavne $k! - 1! - 2! - \ldots - (k-1)!$ kg. Keďže $k!$ kg je najťažšie závažie, druhým spôsobom vieme navážiť najviac $1! + 2! + \cdots + (k-1)!$ kg. Keďže sa hmotnosti navážené týmito spôsobmi majú rovnať, musí platiť

$$k! - 1! - 2! - \ldots - (k-1)! \leq 1! + 2! + \cdots + (k-1)!.$$

[3] Zápis $k!$ označuje súčin prirodzených čísel od 1 po $k$, teda $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Napríklad $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Pre $k \leq 3$ ľahko zistíme, že uvedená nerovnosť platí a taktiež ľahko nájdeme také príklady rôznych kombinácií závaží, ktorými vieme odvážiť tú istú hmotnosť. Keď je však $k$ veľké, ľavá strana je značne väčšia ako pravá. Teda pri veľkých hodnotách $k$ nemôžeme navážiť tú istú hmotnosť viacerými spôsobmi. Presnejšie, pre $k = 4$ platí

$$k! > 2(1! + 2! + \cdots + (k-1)!). \tag{1}$$

Toto naše pozorovanie však potrebujeme aj dokázať. Najjednoduchšie je použitie matematickej indukcie. Pre $k = 4$ dostávame $4! = 24 > 18 = 2(1! + 2! + 3!)$, teda nerovnosť platí.
Teraz predpokladajme, že nerovnosť (1) platí pre nejaké $k$. Chceme ukázať, že potom platí aj pre $k+1$, teda, že platí

$$(k+1)! > 2(1! + 2! + \cdots + (k-1)! + k!).$$

Pričítaním $2k!$ na obe strany nerovnosti (1) dostaneme

$$3k! > 2(1! + 2! + \cdots + (k-1)! + k!)$$

a keďže $k > 3$, tak aj $k+1 > 3$, a teda platí $(k+1)! = (k+1) \cdot k! > 3k!$, z čoho už ľahko vyplýva dokazovaná nerovnosť. Z princípu matematickej indukcie vyplýva, že nerovnosť (1) platí pre všetky $k \geq 4$.
Dokázali sme, že ak nejakú hmotnosť vieme dostať dvoma spôsobmi, tak závažia ťažšie ako 3! kg sú v nich rozostavané rovnako a líšia sa len v rozmiestnení závaží 1!, 2! a 3! kg. Ak teda tieto ľahké závažia dáme nabok a budeme používať len závažia 4! kg, 5! kg, …, n! kg, tak pri každom ich rozmiestnení dostaneme inú hmotnosť, ktorú vieme odvážiť. Toto ostane platiť, aj keď ku každému takému rozmiestneniu pridáme zvyšné ľahké závažia. Poďme teda spočítať, koľkými spôsobmi vieme $n-3$ závaží 4! kg, 5! kg, …, n! kg umiestniť na váhy. Pre každé závažie máme 3 možnosti, čo s ním urobiť: môžeme ho umiestniť na ľavú misku, pravú misku alebo vôbec ho nepoužiť. O každom závaží sa rozhodujeme nezávisle na ostatných, teda celkom máme $3^{n-3}$ možností, ako ich umiestniť. Avšak takto sme zarátali dvakrát tie rozmiestnenia, ktoré majú len vymenené závažia na ľavej a pravej miske. Takisto sme zarátali aj možnosť, kedy na váhy nedáme žiadne závažia, čo je aj jediné rozmiestnenie, ktoré nemá svoju dvojičku s prehodenými miskami. Preto túto možnosť s prázdnymi váhami odčítame a zvyšné možnosti predelíme dvomi. Dostaneme tak $(3^{n-3} - 1)/2$ rozmiestnení závaží, čo je teda aj počet hmotností, ktoré vieme s nimi navážiť.
Teraz potrebujeme k už umiestneným ťažkým závažiam doložiť zvyšné 3 ľahké závažia. S nimi vieme navážiť hmotnosti od 1 po 9 kg. Preto s nimi vieme naváženú hmotnosť znížiť alebo zvýšiť o 1 až 9 kg alebo vôbec nezmeniť. To je spolu 19 možností, ako vieme upraviť hmotnosť naváženú ťažkými závažiami. Keďže sme odčítali možnosť s prázdnymi váhami, nedostaneme tak zápornú hmotnosť. Teda náš počet hmotností vynásobíme 19-timi. Ešte musíme pripočítať hmotnosti, ktoré vieme navážiť len s ľahkými závažiami, čo je 9 hmotností. Pre $n > 3$ je teda počet rôznych hmotností, ktoré vie Luxusko odvážiť

$$19 \cdot \frac{3^{n-3} - 1}{2} + 9.$$

Pre $n = 1$ máme 1 možnosť, pre $n = 2$ dostávame 3 možnosti a pre $n = 3$ máme 9 možností.
<u>Iné riešenie:</u>
Mnohí z vás ste úlohu riešili zistením, ako sa počet hmotností zvyšuje s pridaním nového závažia. Označme $P_n$ počet hmotností, ktoré vie Luxusko odvážiť so závažiami 1! kg, 2! kg, …, n! kg. S týmito závažiami vieme navážiť

1. tých istých $P_{n-1}$ hmotností ako bez závažia $n!$,
2. samotnú hmotnosť $n!$ kg,
3. $P_{n-1}$ hmotností, ktoré dostaneme odčítaním pôvodných hmotností od $n!$,
4. $P_{n-1}$ hmotností, ktoré dostaneme pričítaním pôvodných hmotností k $n!$.

Nakoľko pre $n \geq 4$ platí nerovnosť (1) z predchádzajúceho riešenia, tak hmotnosti v prípadoch 1. a 2. sú rôzne. Preto s $n \geq 4$ závažiami vie Luxusko navážiť $P_n = 3 \cdot P_{n-1} + 1$ hmotností. Pre $n < 4$ platí $P_1 = 1$, $P_2 = 3$ a $P_3 = 9$. Tieto vzťahy už jednoznačne určujú $P_n$ pre každé $n$. Na plný počet bodov však potrebujeme nájsť vyjadrenie $P_n$, ktoré závisí len od $n$ a sú v ňom použité iba bežné operácie. Nesmú v ňom byť žiadne predchádzajúce počty možností a ani žiadne tri bodky.
Ak si začneme rozpisovať $P_n = 3P_{n-1} + 1 = 3^2 P_{n-2} + 3 + 1 = 3^3 P_{n-3} + 3^2 + 3 + 1$ a tak ďalej, tak si môžeme všimnúť, že pre $n \geq 4$ platí

$$P_n = 3^{n-3} P_3 + 3^{n-4} + \ldots + 3^1 + 3^0 = 9 \cdot 3^{n-3} + \frac{(3^{n-4} + \ldots + 3^1 + 3^0)(3-1)}{3-1} = 3^{n-1} + \frac{3^{n-3} - 1}{2},$$

čo je (ak sa trochu zamyslíte) rovnaké vyjadrenie $P_n$ ako v predchádzajúcom riešení. Ešte by sa patrilo dokázať, že tento náš „uhádnutý“ vzťah pre $P_n$ naozaj vyhovuje podmienke $P_n = 3 \cdot P_{n-1} + 1$.

**Úloha č. 5:** *Linduška sedela v autobuse a v dlhej chvíli sa zadívala na svoje ručičkové hodinky. Všimla si, že ak zamení minútovú ručičku s hodinovou, budú ukazovať čas, ktorý môže nastať. Počas koľkých rôznych momentov za 12 hodín môže nastať takáto situácia? Ručičky na Linduškiných hodinkách sa hýbu plynulo.*

Riešenie: (opravovali Kika a Hopko)
Ako prvú vec je fajn si všimnúť, že počas dvanástich hodín nastane každá možná konfigurácia ručičiek na hodinke práve raz, takže môžme počítať výmeny v čase od 00:00 po 12:00.
Pozrime sa na nejakú polohu ručičiek. Na to, aby sme zistili, či po výmene ručičiek budú ukazovať čas, ktorý môže nastať, je fajn nájsť nejakú podmienku, ktorú musia spĺňať ručičky, ak ukazujú nejaký čas. Po chvíľke rozmýšľania nám napadne, že ak vieme presnú polohu hodinovej ručičky, tak poloha minútovej ručičky je už jednoznačná. Táto myšlienka sa dá dobre uchopiť napríklad pomocou uhlov, tj. vyjadrime si uhol veľkej ručičky pomocou uhla malej ručičky. A čo je vlastne uhol nejakej ručičky? Povedzme si, že je to uhol medzi virtuálnou ručičkou ukazujúcou na 12 a našou ručičkou, ktorý sa ráta „v smere času“ (teda nadobúda hodnotu medzi 0° a 360°). Označme si uhol minútovej ručičky ako $\alpha$ a uhol hodinovej ako $\beta$. Rozmyslite si, že platí: $\beta = 30x + \alpha/12$, kde x vyjadruje koľko otočiek už spravila minútová ručička, resp. počet celých hodín.
Čo sa stane keď ručičky vymeníme? Tak minútová sa stane hodinovou a naopak, preto musí platiť aj $\alpha = 30y + \beta/12$, kde y vyjadruje počet celých hodín po výmene ručičiek. Máme teda dve rovnice, z nich si vieme vyjadriť uhol $\alpha$ ako $360 \cdot (12y + x)/143$. Čísla $x$ a $y$ sú celé, pretože určujú počet celých hodín a teda sú aj z intervalu $\langle 0, 11\rangle$. Pre každé $x$ (0 až 11) máme 12 možností, ako zvoliť $y$, čo nám dokopy dá 144 možností. Premyslite si, že okrem prípadu, kedy $x = 0, y = 0$ a $x = 11, y = 11$, dostaneme vždy iný uhol $\alpha$. Keď máme $\alpha$, tak vieme dopočítať $\beta$ (lebo uhol minútovej ručičky je daný uhlom hodinovej). Za 12 hodín vieme ručičky vymeniť tak, aby stále ukazovali reálny čas 143 krát.

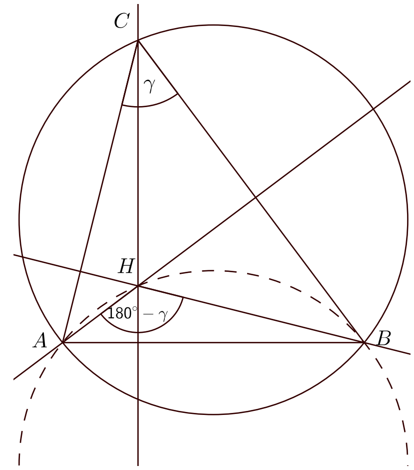
Iné riešenie:
Majme obyčajné hodinky a vedľa nich hodinky, ktoré idú 12-krát rýchlejšie. Na rýchlejších hodinkách sa hodinová ručička hýbe rovnako rýchlo ako minútová ručička na obyčajných hodinkách. Ako pohľadom zistím, či je čas na hodinkách taký, že po výmene ručičiek budem mať reálny čas? No práve vtedy keď ukazujú rovnaký čas ako na zrýchlených hodinkách. Minútová na obyčajných ukazuje to isté ako hodinová na zrýchlených. Minútová na zrýchlených spraví za 5 minút celý okruh, a za týchto 5 minút nastane raz moment, kedy minútová ručička na zrýchlených bude na rovnakom mieste ako hodinová ručička na obyčajných. Teda za 5 minút nastane práve jeden reálny čas po zamenení ručičiek. Za 12 hodín to je 144 krát. Avšak jeden reálny čas tam máme započítaný dvakrát a síce o 00:00 a 12:00, teda tých časov je 143.

**Úloha č. 6:** *Jefo vyšetruje vraždu, ktorá sa stala na rovinatej lúke. Lúka má tvar kružnice $k$ a na jej obvode ležia dva body $A$, $B$. Svedkovia povedali Jefovi, že vrah stál v bode $H$, ktorý bol ortocentrom takého trojuholníka $ABC$, že bod $C$ ležal na kružnici $k$. Nájdite množinu všetkých bodov, v ktorých mohol vrah stáť. Nezabudnite ukázať, že v iných bodoch stáť nemohol.*

Riešenie: (opravoval Vodka)
Pri úlohe, kde nie je zadané, že trojuholník musí byť ostrouhlý, kde bod $C$ môže byť na oboch stranách kružnice, je veľmi nepríjemná diskusia. Pre rôzne polohy bodov sa niektoré uhly prevrátia, a tak musíme všetky polohy bodov rozoberať zvlášť a je to otravné. Ak nás to nebaví, dobrá vec na tieto problémy sú orientované uhly.
Orientovaný uhol medzi priamkou $p$ a priamkou $q$ je uhol, o ktorý musíme otočiť priamku $p$ v kladnom smere, tak aby splývala s priamkou $q$. Je to teda číslo medzi 0° a 180°.
Odteraz budeme pod $|\sphericalangle ABC|$ rozumieť veľkosť orientovaného uhla medzi priamkami $AB$ a $BC$. Orientovaný uhol sa dá normálne značiť ako $|\sphericalangle(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC})|$, ale keďže v riešení budú všetky uhly orientované, tak ich môžeme značiť ako normálne uhly, len ich budeme brať orientovane.
Je si treba dávať pozor na poradie písmen, lebo zjavne $|\sphericalangle ABC| = 180° - |\sphericalangle CBA|$. Okrem toho však majú orientované uhly super vlastnosti. Napríklad to, že bod $C$ leží na kružnici $k$ znamená (z obvodových uhlov), že $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, pre nejakú pevnú veľkosť uhla $\gamma$. A pozor, toto platí pre body na oboch oblúkoch kružnice $k$ (overte si).
Tak poďme na to. Označme si $A_1$, $B_1$ päty výšok z vrcholov $A$, $B$. Zrejme $|\sphericalangle HA_1C| = |\sphericalangle HB_1C| = 90°$, a preto body $H$, $A_1$, $B_1$, $C$ ležia na kružnici. Potom však

$$\gamma = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle B_1CA_1| = |\sphericalangle B_1HA_1| = |\sphericalangle BHA| = 180° - |\sphericalangle AHB|,$$

kde tretia rovnosť platí vďaka spomínanej tetivovosti a ostatné sú vždy orientované uhly medzi rovnakými priamkami. Dostali sme, že $|\sphericalangle AHB| = 180° - \gamma$. To znamená, že bod $H$ leží na nejakej kružnici $l$, ktorá prechádza bodmi $A, B$ a na ktorej má obvodový uhol nad $AB$ príslušnú veľkosť. Túto kružnicu zrejme môžeme dostať tak, že preklopíme $k$ podľa $AB$ (vtedy sa príslušný obvodový uhol zmení na doplnok do 180°).




Povedal som, že týmto sme sa zbavili rozoberania prípadov, nuž nie celkom. Naše úvahy nefungujú, ak niektorý z bodov $A_1, B_1, H$ splýva s vrcholmi $A, B, C$ (vtedy totiž nejaké priamky nie sú priamky lebo dva body cez ktoré ich vedieme sú ten istý bod). To však nastane, len ak $ABC$ je pravouhlý. Prípad, že $AB$ je priemer $k$ odložíme naneskôr, a preto môže byť pravouhlý len pri vrchole $A$ alebo $B$. No potom leží ortocentrum trojuholníka v bode $A$ resp. $B$, a stále leží na spomínanej kružnici.

Teraz samozrejme musíme dokázať obrátenú implikáciu - či každý bod kružnice $l$ môže byť ortocentrum trojuholníka $ABC$. Samozrejme, je relatívne ľahké naše úvahy obrátiť, ale uvediem poučnejšie riešenie. Využíva nasledujúce tvrdenie:

<u>Lema (Myjava):</u> Ak máme 4 rôzne body v rovine $A$, $B$, $C$, $D$ také, že $D$ je ortocentrum $ABC$, tak potom ľubovoľný z týchto 4 bodov je ortocentrum trojuholníka tvoreného zvýšnimi troma bodmi.

Uvedomiť si jeho platnosť je ľahké - stačí si nakresliť obrázok a uvedomiť, si že $AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp CB$. No potom, ak máme daný bod $H$ na kružnici $l$, tak bod $C$ nájdeme ako ortocentrum trojuholníka $ABH$. A ak využijeme to čo sme už dokázali, tak to zrejme leží na kružnici $k$. Teda ľubovoľný bod na kružnici $l$ môže byť ortocenturm nejakého takého trojuholníka $ABC$

OK, opäť nie celkom. Naše tvrdenie požaduje, aby to boli rôzne body. Teda problém je jednak, ak $ABH$ je pravouhlý a dvak, ak $H \equiv A$ alebo $H \equiv B$. Druhý prípad sa ľahko vyrieši, lebo body $A, B$ sú ortocentrá pravouhlých trojuholníkov $ABC$ s pravými uhlami pri vrcholoch $A$, $B$. Prvý prípad je však problém, lebo ak $ABH$ je pravouhlý (s pravým uhlom pri $A$), tak jediný bod $C$, ktorý by mohol spĺňať, že ortocentrum $ABC$ je v $H$ je ortocentrum $ABH$, alebo samotný bod $H$ (lebo Myjava). Avšak bod $H$ neleží na $k$ a ortocentrum $ABH$ je v bode $A$, preto taký bod $C$ neexistuje.

Keď to zosumarizujeme, hľadanou množinou bodov je kružnica $l$, ktorú dostaneme preklopením $k$ podľa osi $AB$, okrem dvoch bodov $X$, $Y$, a to takých, že $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle ABY| = 90°$. Toto platí ak $AB$ nie je priemer.

Odložili sme si prípad, keď $AB$ je priemer kružnice, no vtedy je vždy $ABC$ pravouhlý a ortocentrum má v bode $C$. Preto triviálne je hľadaná množina bodov kružnica $k$ okrem bodov $A, B$.

Dalo teda poriadne zabrať, aby ste naozaj rozobrali všetky možnosti, no aj to treba vedieť. Často práve vznikajú nejaké špeciálne prípady, v ktorých to, čo chceme ani neplatí. Teraz to tak viac menej nebolo, ale skrátka na špeciálne prípady netreba zabúdať.

<u>Iné riešenie:</u>

Ukážeme si ešte riešenie využívajúce vektory. Položme počiatok súradnicovej sústavy do bodu $O$ - stredu kružnice $k$. Pod symbolom $X$ nebudeme rozumieť len bod $X$, ale aj vektor $\overrightarrow{OX}$.

Ak $G$ je ťažisko $ABC$ tak zrejme platí $G = (A + B + C)/3$. Z Eulerovej priamky vieme, že body $O$, $G$, $H$ ležia na priamke, a bod $G$ je v jednej tretine $OH$. Preto platí $H = A + B + C$, odkiaľ $\overrightarrow{CH} = A + B$. No vektory $A$, $B$ sú pevné, preto množina bodov $H$ je kružnica $k$ okrem bodov $A, B$ posunutá o vektor $A + B$, čím presne dostaneme množinu popísanú v prvom riešení.

**<u>Úloha č. 7:</u>** *Marek má v deň termínu série meniny. Keďže obľubuje celé čísla, isto by sa z nich potešil. Nájdite mu k meninám všetky reálne čísla $r$ také, že $\sqrt{2} \cdot r^2$ aj $(\sqrt{2} + 1) \cdot r$ sú celé čísla.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Iveta a Ľubo)

Označme si číslo $\sqrt{2} \cdot r^2$ ako $m$ a číslo $(\sqrt{2} + 1) \cdot r$ ako $n$, pričom $m, n \in \mathbb{Z}$. Pomocou čísla $n$ môžeme vyjadriť $r$

$$r = \frac{n}{\sqrt{2} + 1}$$

a dosadiť do zápisu čísla $m$, dostávame:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 = m \implies \sqrt{2} \cdot \frac{n^2}{2\sqrt{2} + 3} = m.$$

Obe strany rovnosti vynásobíme $\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} + 3)$ (aby sme sa zbavili odmocniny pri člene $n^2$) a upravíme do tvaru:

$$2n^2 - (4 + 3\sqrt{2})m = 0.$$

Keďže čísla $m, n \in \mathbb{Z}$, tak určite aj číslo $2n^2 \in \mathbb{Z}$. Avšak $(4 + 3\sqrt{2})$ je iracionálne číslo. A keď iracionálne číslo vynásobíme celým číslom (v našom prípade číslom $m$) dostaneme znova iracionálne číslo (okrem prípadu, že by sme ho násobili 0, ale $(4 + 3\sqrt{2}) \neq 0$). Jediné riešenie teda je:

$$m = 0 \implies r = 0.$$

**Úloha č. 8:** *Kozzy si do tabuľky* $10 \times 10$ *napísal čísla* 1, 2, ..., 100*, pričom do prvého riadku napísal postupne zľava doprava čísla* 1, 2, ..., 10*, do druhého zľava doprava čísla* 11, 12, ..., 20 *atď. až do posledného riadku napísal zľava doprava čísla* 91, 92 ..., 100*. Potom sa začal s tabuľkou hrať tak, že s ňou vykonával nasledujúce ťahy: V jednom ťahu si vyberie 3 za sebou idúce políčka v riadku, v stĺpci alebo na diagonále a buď krajné políčka zníži o 1 a prostredné políčko zvýši o 2, alebo krajné zvýši o 1 a prostredné zníži o 2. Po konečnom počte ťahov sa Kozzymu podarilo dostať v tabuľke znova čísla* 1, 2, ..., 100*. Dokážte, že sú v pôvodnom poradí.*

Riešenie: (opravovali JeFo a Zajo)
Políčka si označíme indexmi od 1 do 100 tak, aby indexy zodpovedali pôvodným číslam v tabuľke.
Keď vyberieme tri za sebou idúce, ich indexy tvoria aritmetickú postupnosť, teda ich vieme zapísať ako $x$, $x + k$, $x + 2k$ ($k = 1$ ak su políčka v riadku, $k = 10$ ak sú políčka v stĺpci a $k = 9$ alebo 11 ak sú políčka na diagonále). Nech teda na troch vybratých políčkach sú postupne čísla $a$, $b$, $c$. Pozorujme súčet súčinov hodnôt čísel na políčku s indexom políčka. Na začiatku dostávame $ax + b(x + k) + c(x + 2k)$. Po ťahu dostávame pre súčet súčinov:

$$\begin{aligned}(a+1)x + (b-2)(x+k) + (c+1)(x+2k) &= ax + x + bx + bk - 2x - 2k + cx + 2ck + x + 2k \\ &= ax + b(x+k) + c(x+2k),\end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned}(a-1)x + (b+2)(x+k) + (c-1)(x+2k) &= ax - x + bx + bk + 2x + 2k + cx + 2ck - x - 2k \\ &= ax + b(x+k) + c(x+2k).\end{aligned}$$

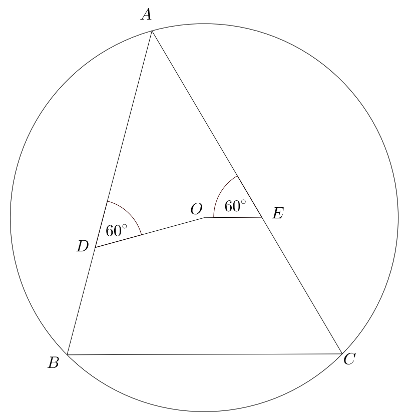
Ako vidíme, súčet súčinov čísel na daných políčkach s indexmi políčok pre dané tri políčka sa pri jednom ťahu zachová. Z toho ale vyplýva, že sa súčet súčinov po ťahu zachová aj pre celú tabuľku, lebo ostatné políčka prispievajú do súčtu rovnakou hodnotou súčinu pred aj po ťahu. Súčet súčinov čísel na daných políčkach s indexmi políčok celej tabuľky je teda invariantný (nemení sa) počas všetkých ťahov.
Chceme dokázať, že ak Kozzy bude mať v tabuľke všetky čísla od 1 do 100, tak určite budú v pôvodnom poradí. Vzhľadom na spomenutý invariant je dobré dokázať, že každá iná permutácia čísel od 1 do 100 bude mať iný súčet súčinov čísel s indexmi políčok ako pôvodná permutácia. Na to využijeme permutačnú nerovnosť[4]. Na začiatku je súčet súčinov rovný $1^2 + 2^2 + ... + 100^2$. Podľa permutačnej nerovnosti ale vieme, že každá iná permutácia čísel bude mať menší súčet súčinov. Poriadne si premyslite, prípadne naštudujte, kedy môže nastať rovnosť v permutačnej nerovnosti a uvedomte si, že v tomto prípade rovnosť nastať nemôže.

Iné riešenie:
Namiesto čísel si v každom políčku predstavme príslušný počet kamienkov. Dá sa nahliadnuť, že povoleným premiestňovaním kamienkov sa ťažisko celej tabuľky nezmení. Stačí nám teda dokázať, že žiadna iná tabuľka obsahujúca všetky počty kamienkov od 1 po 100 nemá ťažisko na rovnakom mieste ako pôvodná tabuľka. Uvažujme tabuľky obsahujúce všetky počty kamienkov od 1 po 100, ktoré majú ťažisko na najnižšom možnom mieste. Rozmyslite si, že pôvodná tabuľka je z nich jediná, čo má ťažisko najviac v pravo.

**Úloha č. 9:** *Miro má doma ostrouhlý trojuholník* $ABC$ *so stredom opísanej kružnice* $O$*. Na jeho polpriamkach* $AB$ *a* $AC$ *má postupne uložené body* $D$ *a* $E$ *tak, že* $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle AEO| = 60°$*. Prezradil nám ešte, že štvoruholník* $BCED$ *je tetivový. Čo za trojuholník má Miro doma? Dokážte, že Mirov trojuholník* $ABC$ *je rovnoramenný alebo* $|\sphericalangle BAC| = = 30°$.

Riešenie: (opravoval Mišo)
Úlohu budeme riešiť pomocou sínusových viet a budeme používať tradičné označenie, teda pri vrcholoch $A, B, C$ budú postupne uhly $\alpha, \beta$ a $\gamma$.
Začnime uhlom $\sphericalangle AOD$. Ten vypočítame z trojuholníka $AOD$, v ktorom je $|\sphericalangle ODA| = 60°$ a $|\sphericalangle DAO| = |\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$. Druhý uhol vieme vypočítať z rovnoramenného trojuholníka $ABO$, ktorý má medzi ramenami $AO$ a $BO$ uhol $2\gamma$ (stredový uhol k obvodovému $|\sphericalangle BCA| = \gamma$). Dopočítaním do 180° sa dozvieme, že $|\sphericalangle AOD| = 30° + \gamma$.
Tým sme využili poznatok zo zadania, že $|\sphericalangle ODA| = 60°$. Rovnakými úvahami pre trojuholník $AOE$ sa dozvieme, že $|\sphericalangle AOE| = 30° + \beta$.
Chceli by sme využiť aj druhú podmienku zo zadania a to, že štvoruholník $BCED$ je tetivový. Využijeme mocnosť bodu $A$ ku kružnici opísanej týmto bodom, čím dostaneme vzťah $|AB| \cdot |AD| = |AC| \cdot |AE|$.

[4] Ak ti permutačná nerovnosť nič nehovorí hľadaj na `https://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf` od strany 26.




Teraz môžme prejsť k sínusovým vetám. Začneme v trojuholníku $AOD$ kde zistíme, že

$$|AD| = |AO| \cdot \frac{\sin(30^\circ + \gamma)}{\sin(60^\circ)}.$$

V trojuholníku $AOE$ analogicky dospejeme k vyjadreniu

$$|AE| = |AO| \cdot \frac{\sin(30^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ)}.$$

Po dosadení do rovnice z mocnosti $A$ ku kružnici sa nám vykrátia členy $|AO|$ a $\sin(60^\circ)$.
Použití sínusovej vety pre trojuholník $ABC$ dostaneme $|AB| = |AC|\sin(\gamma)/\sin(\beta)$.
Po dosadení, vykrátení a prenásobení $\sin(\beta)$ dospejeme k rovnici

$$\sin(30^\circ + \gamma) \cdot \sin(\gamma) = \sin(30^\circ + \beta) \cdot \sin(\beta)$$

Odtiaľto by sme chceli prejsť k výsledku, teda dokázať, že rovnosť nastáva, iba ak $\beta = \gamma$ alebo $\alpha = 30^\circ$. Tých $30^\circ$ už v rovnici máme, ešte by sme tam chceli namontovať $\alpha$. Zvládneme to tak, že namiesto $\sin(\beta)$ použijeme $\sin(\alpha + \gamma)$ (čo platí, lebo $\sin(x) = \sin(180^\circ - x)$). Taktiež $\sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta)$.

$$\sin(30^\circ + \gamma) \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin(30^\circ + \beta) \cdot \sin(\alpha + \gamma)$$

Využitím vzorca pre sínus súčtu dvoch uhlov sa prepracujeme k nasledujúcemu

$$\begin{aligned}&(\sin(30^\circ) \cdot \cos(\gamma) + \cos(30^\circ) \cdot \sin(\gamma)) \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)) = \\ &\qquad = (\sin(30^\circ) \cdot \cos(\beta) + \cos(30^\circ) \cdot \sin(\beta)) \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma)).\end{aligned}$$

Po roznásobení a odčítaním celej pravej strany zaniknú členy, kde sú $\beta$ a $\gamma$ v rovnakej funkcii (sin či cos). Ostane nám

$$\begin{aligned}&\sin(30^\circ) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) - \sin(30^\circ) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ &\qquad -\cos(30^\circ) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(30^\circ) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) = 0.\end{aligned}$$

Pomocou vzorca na sínus súčtu uhlov zložíme dohromady prvé dva a druhé dva členy, ktoré vieme znovu zložiť dohromady

$$\sin(30^\circ) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta - \gamma) - \cos(30^\circ) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta - \gamma) = \sin(30^\circ - \alpha) \cdot \sin(\beta - \gamma) = 0.$$

Posledná rovnosť platí, ak je jeden zo sínusov nulový. Keďže je trojuholník $ABC$ ostrouhlý, môže to nastať iba ak $\alpha = 30^\circ$ alebo $\beta = \gamma$. Takže buď má $\alpha$ veľkosť $30^\circ$, alebo je torjuholník rovnoramenný.
Úloha je tým dokázaná. Za zmienku ešte stojí, že body $D, E$ môžu ležať aj vnútri aj mino trojuholníka $ABC$. Uhly ktoré sme použili to však neovplyvní, takže toto je riešenie pre všetky možnosti.

__Úloha č. 10:__ *Dané je reálne číslo a, ktoré je rôzne od* $-1$, $0$, $1$. *Vodka a Hopko s ním hrajú nasledujúcu hru: Vo výraze*

$$*x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + *$$

*nahradzujú striedavo hviezdičky celočíselnými mocninami čísla a. Vodka začína. Na konci sa pozrú na to, či výsledný polynóm má aspoň jeden reálny koreň. Ak áno, vyhráva Hopko, inak vyhrá Vodka. Zistite v závislosti od a, kto z nich má víťaznú stratégiu.*

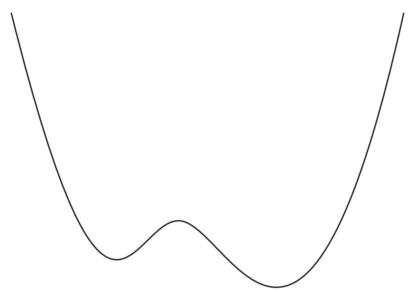
Riešenie: (opravoval Hago)
Na začiatok si ujasnime zopár vecí, ktoré nám zjednodušia rozmýšľanie nad touto úlohou. Nezáleží, či je absolútna hodnota $a$ väčšia alebo menšia ako jedna, pretože $a^{-1}$ má tú druhú absolútnu hodnotu a namiesto $a^n$ môžeme uvažovať $(a^{-1})^{-n}$. Nakoniec sa táto úloha zvrhne na to, či vieme nájsť lubovoľne veľkú (v absolútnej hodnote) mocninu $a$. To samozrejme vždy vieme. Dokonca, ak máme záporné $a$, tak vieme zvoliť aj ľubovoľne veľkú zápornú (nepárnu) aj ľubovoľne veľkú kladnú (párnu) mocninu. Potom už zostane len otázka, či dostatočne veľký koeficient pri nejakom člene *prebije* ostatné koeficienty. Ale nepredbiehajme.
Označme si koeficienty nasledovne (koeficient pri $x^k$ označíme $b_k$)

$$b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Nakoľko je $a$ nenulové, tak náš polynóm nemôže mať koreň v nule, pretože tam bude jeho hodnota rovná $b_0$, čo nie je nula. Dosaďme si teraz do polynómu $x = 1/y$ a vynásobme výsledok $y^4$, dostaneme

$$b_0y^4 + b_1y^3 + b_2y^2 + b_3y + b_4.$$

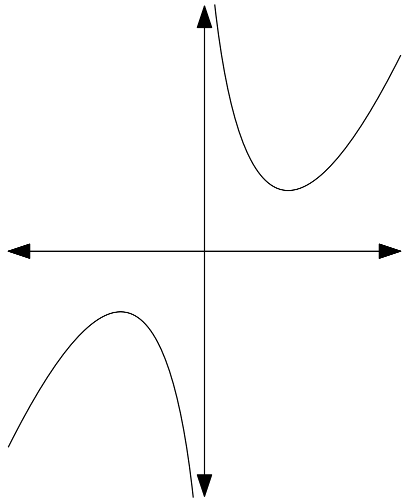
Máme teda polynóm v premennej $y$, ktorý má prehodené koeficienty oproti pôvodnému. Ak má jeden z polynómov koreň v nejakej hodnote, tak druhý bude mať koreň v jej prevrátenej hodnote. Z hľadiska našej úlohy je teda irelevantné, ktorý polynóm skúmame a môžeme sa tváriť, že $b_0$ je to isté ako $b_4$ a $b_1$ je zasa to isté ako $b_3$.
Skúste si predstavovať (alebo sa pozrite na obrázok) ako asi vyzerajú grafy takýchto polynómov, a čo asi tak robia jednotlivé koeficienty. Znamienko $b_4$ určuje, či bude graf smerovať hore alebo dole. Pri kladnom vyzerá tak, ako na obrázku, pri zápornom je preklopený smerom dole. Koeficient $b_0$ posúva graf v smere $y$-ovej osi a ako sme si už povedali, určuje hodnotu v nule. Zvyšné koeficienty určujú polohu a veľkosti tých dvoch *doliniek*, čo vidno na obrázku.



Polynóm bude mať koreň vtedy, keď sa graf pretne s $x$-ovou osou. Keď teda nechceme koreň, tak musí byť celý graf buď nad alebo pod $x$-ovou osou, čiže polynóm nesmie meniť znamienko. Ak by bolo niečo zmätočné, tak vo všetkých ďalších úvahách sa možno budeme tváriť, že ešte nezvolené koeficienty sú zatiaľ nulové.
Poďme sa teraz pozrieť, čo sa stane pre kladné $a$. Vodka ide posledný a vie zaručiť, aby mu na konci zostal koeficient pri párnej mocnine. V prípade, že mu zostane koeficient $b_0$, mu stačí graf posunúť o toľko dohora, aby sa nepretínal s $x$-ovou osou. Ak mu zostane $b_2$, tak v nule už má určite kladnú hodnotu a zvyšné hodnoty vie dostatočne veľkou voľbou $b_2$ zvýšiť do kladných hodnôt, čím zaručí neexistenciu koreňa. Vodka teda pre kladné $a$ vyhrá.
Záporné bude trochu zložitejšie. Vieme, že $b_4$ ovláda smerovanie buď do kladných alebo záporných hodnôt a $b_0$ ovláda hodnotu v nule. Ak budú znamienka týchto dvoch koeficientov rôzne, tak koreň bude existovať. Vodka teda za žiadnych okolností nemôže zvoliť prvý z nich a vzápätí ako ho Hopko zvolí, Vodka musí zvoliť ten druhý. Inak by Hopkovi vlastne daroval víťazstvo.
Keby Vodka zvolil ako prvé $b_3$, tak Hopko môže zvoliť $b_4$, na čo Vodka musí zvoliť $b_0$. Teraz Hopko vie správnou hodnotou $b_2$ zaručiť, aby existoval koreň aj naľavo aj napravo od nuly. Vodkovi zostane $b_1$ a bez ohľadu na jeho voľbu jednému z tých koreňov pridá a druhému uberie, čiže máme aj kladnú aj zápornú hodnotu, čo znamená koreň.
Jediná šanca pre Vodku je na začiatok zvoliť $b_2$. Čo sa stane ak Hopko zvolí $b_3$ si premyslite sami. Ja mu odporúčam $b_4$, čím Vodku donúti dať $b_0$ a sám môže zvoliť $b_3$. Otázka znie, či vie hodnotu zvoliť tak, aby Vodka voľbou $b_1$ už nijakovsky nevedel zabrániť existencii koreňa. Vydeľme celý polynóm $x$, dostaneme

$$b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + \frac{b_0}{x} + b_1.$$

Tvárme sa, že Hopko zvolil $b_4$ kladné, čiže Vodka zvolil $b_0$ kladné. Kým nezvolíme $b_1$ a $b_3$ tak má tento výraz graf ako na obrázku.



Ak má tento výraz koreň, tak aj pôvodný polynóm má koreň. Hopkovi teda stačí zaručiť aby mal tento výraz koreň. Vodka bude voliť $b_1$, čím celý graf len posúva v smere $y$-ovej osi. Dá sa na to pozerať aj tak, že posúva $x$-ovú os. Hopko teda potrebuje zaručiť aby v ľubovoľnej výške existoval prienik s $x$-ovou osou. Podľa obrázka to zatiaľ nie je pravda. Hopko volí $b_3$, čím veľmi neovplyvní, čo sa deje príliš blízko nuly, kde to neohraničene klesá a stúpa. Potrebuje teda len nejako zaplátať tú medzeru medzi kladnými a zápornými hodnotami. To sa mu podarí napríklad, ak nejaký bod naľavo od nuly bude mať väčšiu hodnotu ako nejaký bod napravo od nuly. Stačí mu teda zvoliť také $b_3$, aby pre nejaké záporné $-y$ a kladné $x$ platilo (po treťom riadku sme pre jednoduchosť skúsili $x = 1/y$)

$$\begin{aligned}
-b_4y^3 + b_3y^2 - b_2y - \frac{b_0}{y} &\geq b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + \frac{b_0}{x} \\
0 &\geq b_4(x^3 + y^3) + b_3(x^2 - y^2) + b_2(x + y) + b_0\frac{x + y}{xy} \\
0 &\geq \left(b_4(x^2 - xy + y^2) + b_3(x - y) + b_2 + b_0\frac{1}{xy}\right)(x + y) \\
0 &\geq -b_4 + b_2 + b_0 + \frac{b_4}{y^2} + \frac{b_3}{y} + b_4y^2 - b_3y.
\end{aligned}$$

Hopkovi už pomaly začala dochádzať trpezlivosť, že tento vzorák ešte nie je napísaný, a tak sa rozhodol, že zvolí $b_3 = 2b_4y$ a vyhlásil, že existuje $y$, pre ktoré platí

$$0 \geq b_4 + b_2 + b_0 + \frac{b_4}{y^2} - b_4y^2.$$

Tým pádom Hopko pre záporné $a$ vyhral.

**Anketa**

Ďalší rok KMS je za nami. Pripravili sme si pre Teba anketu, kde nám môžeš napísať, čo sa Ti pri riešení KMS páčilo a čo nie. Tvoj názor nám pomôže budúci rok zmeniť KMS k lepšiemu. Anketu môžeš vyplniť na `http://goo.gl/forms/hphYbfUhG9` (odkaz nájdeš aj na našej stránke). Tešíme sa na Tvoje postrehy.

## Výsledková listina

**kategória BETA**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Sásik Tomáš | 2. | Gamča BA | 4 | 9 | 9 | 6 | 9 | 9 | | | | 42 | 131 |
| 2. | Vištanová Laura | 3. | Gmaď KE | 4 | 2 | 9 | 7 | 9 | 9 | 9 | | | 43 | 123 |
| 3. | Záhorský Ákos | 2. | G Šahy | 4 | 8 | | 8 | 9 | | | | | 25 | 112 |
| 4. | Csenger Géza | 3. | GHS | 4 | 9 | 9 | 6 | 9 | | | | | 33 | 109 |

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5. | Parada Matej | 2. | Gamča BA | 4 | 8 | 9 | 2 | 8 | 0 | | | | 27 | 105 |
| 6. | Sládek Samuel | 4. | GAB NO | 7 | | | 9 | 9 | | 9 | | | 27 | 104 |
| 7. | Onduš Peter | 2. | GAlej KE | 4 | 6 | 9 | 7 | 9 | | | | | 31 | 102 |
| 8. | Dlugošová Michaela | 2. | GKuk PP | 4 | 4 | 5 | 1 | 9 | | | | | 19 | 81 |
| 9. | Poljovka Jakub | 2. | GPár NR | 4 | | | | 9 | | 3 | | | 12 | 80 |
| 10. | Pišťák Daniel | 4. | GChD Praha | 8 | | | 9 | 9 | | 9 | | | 27 | 76 |
| 11. | Švihorík Tomáš | 2. | GPár NR | 4 | 5 | 5 | 2 | 9 | | | | | 21 | 75 |
| 12. | Murin Marek | 4. | GJH BA | 9 | | | 5 | 9 | | | | | 14 | 71 |
| 13. | Kuťková Sára | 2. | Gamča BA | 4 | | | | | | | | | 0 | 68 |
| 13. | Poljak Marián | 3. | Gymnázium Jakuba Škody | 5 | | 5 | 6 | 9 | | 7 | | | 27 | 68 |
| 15. | Ralbovský Peter | 3. | GJH BA | 8 | | | 6 | 8 | 9 | 2 | | | 25 | 67 |
| 16. | Tóthová Andrea | 4. | GJH BA | 6 | | 9 | 0 | 9 | | | | | 18 | 65 |
| 17. | Bodík Juro | 4. | Gamča BA | 10 | | | 4 | 8 | 1 | | 2 | | 15 | 64 |
| 17. | Mertanová Hana | 4. | PiarG TN | 4 | 1 | 3 | 5 | 9 | | 1 | | | 19 | 64 |
| 17. | Studeničová Katarína | 2. | GPOH DK | 3 | 1 | 0 | 5 | 5 | | | 3 | | 14 | 64 |
| 20. | Šuchová Martina | 2. | GPár NR | 4 | | | 5 | 9 | | | | | 14 | 63 |
| 21. | Kopf Daniel | 4. | G Slez ČR | 10 | | | 6 | 9 | | 2 | | | 17 | 58 |
| 22. | Hanzely Slavomír | 4. | GJAR PO | 9 | | | 6 | 9 | | | | | 15 | 56 |
| 23. | Onduš Daniel | 4. | GAlej KE | 8 | | | 1 | 9 | | | | | 10 | 52 |
| 24. | Szöllősová Timea | 0. | Gamča BA | 0 | 7 | 4 | 2 | 9 | | | | | 22 | 50 |
| 25. | Sládeček Michal | 3. | GVar ZA | 5 | | | | | | | | | 0 | 45 |
| 26. | Konečný Tomáš | 3. | GJir ČB | 4 | | 9 | 8 | | | | | | 17 | 44 |
| 26. | Koževnikov Danil | 2. | GJK Praha | 2 | | | | | | | | | 0 | 44 |
| 26. | Súkeník Peter | 4. | GVO ZA | 9 | | | | | | | | | 0 | 44 |
| 29. | Rosinsky Juraj | 1. | I de Lancy | 2 | | | | | | | | | 0 | 42 |
| 30. | Marčeková Michaela | 1. | GPár NR | 2 | | | | | | | | | 0 | 37 |
| 31. | Kopfová Lenka | 1. | G Mendel ČR | 3 | | | | | | | | | 0 | 34 |
| 32. | Mičko Juraj | 3. | GPoš KE | 7 | | | | | | | | | 0 | 21 |
| 33. | Frankovská Zuzana | 4. | GJH BA | 8 | | | | | | | | | 0 | 18 |
| 34. | Mach Jakub | 3. | GPoš KE | 4 | | | | | | | | | 0 | 16 |
| 35. | Škrlec Adam | 4. | GJH BA | 6 | | | | | | | | | 0 | 15 |
| 36. | Krajmerová Barbora | 4. | G Šurany | 6 | | | | | | | | | 0 | 11 |
| 37. | Genči Jakub | 3. | GPoš KE | 5 | | 1 | | | | | | | 1 | 10 |
| 37. | Vančo Šimon | 4. | CGsvM SL | 5 | | | | | | | | | 0 | 10 |
| 39. | Porubsky Michal | 4. | GsvCM NR | 6 | | | | | | | | | 0 | 9 |
| 40. | Svobodová Zuzana | 4. | Frýdlant ČR | 5 | | | | | | | | | 0 | 6 |
| 41. | Krutek Robert | 3. | GJGT BB | 4 | | 5 | | | | | | | 5 | 5 |
| 41. | Marčeková Katarína | 4. | GJH BA | 8 | | | | | | | | | 0 | 5 |
| 43. | Kudelčíková Martina | 4. | GVO ZA | 7 | | | | | | | | | 0 | 1 |

**kategória ALFA**

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Krajčoviechová Lucia | 0. | GJH BA | 0 | 9 | 9 | 9 | | 9 | 9 | 9 | | 45 | 135 |
| 1. | Mišiak Dávid | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | 9 | 9 | 8 | 9 | | 45 | 135 |
| 3. | Poturnay Marián | 1. | GPdC PN | 2 | | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 | 9 | | 45 | 134 |
| 4. | Brezinová Viktória | 1. | GAlej KE | 2 | | 9 | 9 | 7 | 9 | 8 | 9 | | 44 | 133 |
| 5. | Fülöp Jozef | 0. | Gamča BA | 0 | 9 | 9 | 7 | 8 | 5 | | 9 | | 42 | 132 |
| 6. | Klein Pavol | 1. | GPdC PN | 2 | | 9 | 7 | 9 | | 8 | 9 | | 42 | 129 |
| 7. | Parada Jakub | 0. | Gamča BA | 0 | 9 | 9 | 8 | 8 | 9 | | 6 | | 43 | 128 |
| 7. | Winczer Tobiáš | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 9 | 9 | 7 | 5 | | 9 | | 39 | 128 |
| 9. | Glevitzká Štefánia | 1. | GVBN PD | 2 | | 9 | 9 | 6 | | 9 | 9 | | 42 | 126 |
| 10. | Pisoňová Karolína | 1. | G Bánovce | 1 | 9 | 9 | 9 | 8 | | | | | 35 | 123 |
| 11. | Oravkin Richard | 1. | 1SG BA | 2 | | 9 | 7 | 7 | 9 | 5 | | | 37 | 122 |

| Por. | Meno | Roč. | Škola | $\kappa$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | p | s | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12. | Ďuračková Mária | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | 8 | 8 | | 3 | | 37 | 119 |
| 12. | Zubčák Matúš | 1. | GPár NR | 2 | | 9 | 7 | 6 | | 4 | 9 | | 35 | 119 |
| 14. | Mráz Michal | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 9 | 9 | 7 | 9 | | 9 | | 43 | 118 |
| 15. | Molnár Michal | 1. | Gamča BA | 2 | | 9 | 7 | | 9 | 5 | 4 | | 34 | 116 |
| 15. | Moško Matej | 1. | Gamča BA | 2 | | 9 | 7 | 3 | 9 | 5 | 9 | | 39 | 116 |
| 17. | Číž Jozef | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 9 | 7 | 6 | 8 | | 5 | | 39 | 115 |
| 17. | Jóža Bohdan | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 7 | 5 | 8 | | 9 | | 38 | 115 |
| 19. | Staník Michal | 1. | GĽŠ TN | 1 | 9 | 9 | 7 | 7 | | | | | 32 | 113 |
| 20. | Adam Dominik | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 9 | 7 | 1 | 7 | | | | 33 | 112 |
| 20. | Machalová Monika | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | 7 | 2 | 1 | 6 | | 33 | 112 |
| 20. | Prokopová Tereza | 1. | GJH BA | 1 | 9 | 7 | 7 | 6 | | 1 | | | 30 | 112 |
| 23. | Kebis Pavol | 1. | GJH BA | 2 | | 9 | 9 | 6 | 9 | 1 | 9 | | 42 | 111 |
| 23. | Krajči Samuel | 1. | GAlej KE | 2 | | 9 | 3 | | 5 | 9 | | | 26 | 111 |
| 23. | Števko Martin | 1. | GAlej KE | 2 | | 9 | 9 | | 9 | 6 | 9 | | 42 | 111 |
| 26. | Juríková Róberta | 1. | GVBN PD | 1 | 9 | 9 | 7 | 5 | | 5 | | | 35 | 109 |
| 27. | Kollár Pavol | 1. | Gamča BA | 2 | | 9 | 6 | | | 6 | | | 21 | 108 |
| 28. | Dujava Jonáš | 1. | SPŠE Prešov | 2 | | 9 | 8 | | 7 | | 9 | | 33 | 106 |
| 29. | Portašiková Jasmína | 1. | GVar ZA | 1 | 9 | 9 | | 1 | 1 | 7 | | | 27 | 103 |
| 30. | Královič Tomáš | 1. | GPár NR | 2 | | 9 | 9 | 5 | | 6 | 9 | | 38 | 98 |
| 31. | Tódová Tereza | 1. | GPár NR | 2 | | 9 | 9 | 6 | | | 9 | | 33 | 93 |
| 32. | Ždímalová Michaela | 1. | GIH BA | 1 | 9 | 6 | 3 | | | 2 | 3 | | 23 | 92 |
| 33. | Hečko Michal | 1. | GPOH DK | 2 | | 7 | 7 | 0 | 0 | | 2 | | 16 | 91 |
| 34. | Baláž Lukáš | 1. | G Bánovce | 1 | 9 | 9 | | | | | 9 | | 27 | 89 |
| 35. | Studeničová Katarína | 2. | GPOH DK | 3 | | | 7 | 1 | 0 | 5 | 5 | | 18 | 81 |
| 36. | Cinová Tatiana | 1. | GPár NR | 2 | 9 | 9 | 7 | | | 1 | 8 | | 25 | 78 |
| 36. | Galíková Kristína | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 9 | 4 | 5 | 8 | | 7 | | 33 | 78 |
| 38. | Benková Nina | 1. | GPdC PN | 2 | | 9 | 7 | 2 | 1 | 1 | | | 20 | 76 |
| 39. | Hrmo Matej | 1. | GPár NR | 2 | | | | | | | | | 0 | 68 |
| 40. | Pifková Andrea | 2. | Gamča BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 67 |
| 41. | Lacko Dávid | 1. | GPOH DK | 1 | | 4 | 7 | | | | | | 11 | 66 |
| 42. | Belák Tomáš | 1. | GAV LV | 2 | | 9 | 7 | | | | 1 | | 17 | 63 |
| 43. | Kalašová Martina | 1. | GJH BA | 2 | 9 | 9 | 7 | | | 2 | | | 18 | 59 |
| 43. | Pieš Dávid | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | 9 | 7 | | | | | | 16 | 59 |
| 45. | Ondovčíková Lucia | 1. | G Modra | 2 | | 2 | | 0 | 2 | 1 | 1 | | 6 | 55 |
| 45. | Szöllősová Timea | 0. | Gamča BA | 0 | | | | 7 | 4 | 2 | 9 | | 22 | 55 |
| 47. | Marčeková Michaela | 1. | GPár NR | 2 | | | | | | | | | 0 | 51 |
| 48. | Kňaze Gabriel | 1. | GJCh BR | 1 | | 5 | | | 1 | 1 | | | 7 | 49 |
| 49. | Rosinsky Juraj | 1. | I de Lancy | 2 | | | | | | | | | 0 | 47 |
| 50. | Hluško Jakub | 1. | ŠPMNDG BA | 1 | 9 | | | | | | | | 9 | 44 |
| 50. | Šánta Adam | 1. | GJH BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 44 |
| 52. | Koževnikov Danil | 2. | GJK Praha | 2 | | | | | | | | | 0 | 35 |
| 53. | Findra Michal | 1. | GDT PP | 2 | | | | | | | | | 0 | 31 |
| 54. | Rečková Veronika | 1. | GJH BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 29 |
| 55. | Častulíková Katarína | 2. | 1SG BA | 3 | | | | | | | | | 0 | 28 |
| 56. | Turčanová Veronika | 2. | GJav | 2 | | | | | | | | | 0 | 26 |
| 57. | Kopfová Lenka | 1. | G Mendel ČR | 3 | | | | | | | | | 0 | 25 |
| 58. | Feketeová Viola | 1. | GBST LC | 1 | | 3 | | | 0 | | | | 3 | 24 |
| 59. | Novota Matej | 1. | SŠsvFA | 1 | | | | | | | | | 0 | 23 |
| 60. | Ghirbaková Karin | 1. | Gamča BA | 1 | | | | | | | | | 0 | 18 |
| 61. | Pozsonyi Karol | 1. | GBil BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 12 |
| 62. | Sarvaš Marek | 2. | GBST LC | 2 | | | | | | | | | 0 | 9 |
| 63. | Majer Matúš | 1. | ŠPMNDG BA | 2 | | | | | | | | | 0 | 6 |
| 63. | Sadovská Jana | 2. | ŠPMNDG BA | 3 | | | | | | | | | 0 | 6 |
| 65. | Kofira Eduard | 3. | BiG Sučany | 3 | | | | | | | | | 0 | 5 |

| **Por.** | **Meno** | **Roč.** | **Škola** | $\kappa$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **p** | **s** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66. | Minár Lukáš | 2. | GVrable | 1 | | | | | | | | | 0 | 0 |