Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2015/2016

Úloha č. 1: *Betka doniesla* 11*-tim vedúcim KMS veľa cukríkov. Chce ale zistiť, či každý vedúci dostane rovnako veľa. Zistite, či je číslo* $(9^9)^9 + 6$ *deliteľné* 11*-timi.*

Riešenie: (opravovali Dominik a Veronika)
Ako prvé si uvedomíme, že $(9^9)^9 = 9^{81}$. Číslo $9^{81} + 6$ bude deliteľné jedenástimi vtedy, keď 9^{81} bude mať zvyšok 5 po delení jedenástimi. Ak k číslu, ktoré dáva zvyšok 2 po delení 3, pripočítam 1, tak mi vznikne číslo deliteľné tromi.

Vypočítame si prvých niekoľko mocnín 9 a pozrieme sa aký dostaneme zvyšok po delení jedenástimi.

$$\begin{aligned}
9^1/11 &= 0, && \text{zv. } 9\\
9^2/11 &= 7, && \text{zv. } 4\\
9^3/11 &= 66, && \text{zv. } 3\\
9^4/11 &= 596, && \text{zv. } 5\\
9^5/11 &= 5368, && \text{zv. } 1\\
9^6/11 &= 48312, && \text{zv. } 9\\
9^7/11 &= 434815, && \text{zv. } 4
\end{aligned}$$

Všimneme si, že 9^6 dáva rovnaký zvyšok po delení 11 ako 9^1, čiže 9. Rovnako aj 9^7 dáva rovnaký zvyšok po delení 11 ako 9^2, čiže 4. Prečo to tak je? Vieme z toho niečo zistiť pre zvyšok čísla 9^{81}?

Po chvíľke nám napadne, že jednotlivé zvyšky $9, 4, 3, 5, 1$ sa budú opakovať s periódou dĺžky 5. Poďme ukázať, že to naozaj platí. Každé prirodzené číslo sa dá napísať ako násobok jedenástich plus zvyšok, čo je matematicky zapísané ako $x = 11k + z$. Potom $(9^5) \cdot (11k + z) = (9^5) \cdot 11k + (9^5) \cdot z = (9^5) \cdot 11k + 5368 \cdot 11z + z$ a teda každé prirodzené číslo x má rovnaký zvyšok po delení 11 ako $(9^5) \cdot x$.

Keď vieme, že zvyšky $9, 4, 3, 5, 1$ sa budú opakovať s periódou 5, tak vieme zistiť, aký zvyšok bude mať číslo 9^{81}.
Vidíme, že $81/5 = 16$ zv. 1, takže 9^{81} bude mať rovnaký zvyšok ako 9^1, čiže 9.
Z toho nám vyplýva, že číslo $(9^9)^9 + 6$ má po delení jedenástimi zvyšok štyri: $9 + 6 = 15$, a $15/11 = 1$, zvyšok 4.
Číslo $(9^9)^9 + 6$ nie je deliteľné jedenástimi. Betka nemôže rozdeliť svoje cukríky rovnakým dielom pre vedúcich.

Úloha č. 2: *Veronika sa rozhodla, že napíše do kruhu* $n \geq 3$ *rôznych reálnych čísel tak, že každé číslo bude súčinom svojich dvoch susedov. Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla* n *sa to Veronike môže podariť.*

Riešenie: (opravovali Miška a Mojo)
Na začiatok skúsme vytvoriť čo najväčší kruh. Zvoľme si dve rôzne čísla a, b rôzne od nuly (rozmyslite si, prečo sa v kruhu nemôže vyskytnúť 0). Tieto čísla budú v kruhu napísané vedľa seba. Ďalej dopíšme ďalšie čísla, tak aby každé číslo bolo súčinom svojich susedov.

$$a \longleftrightarrow b \longleftrightarrow \frac{b}{a} \longleftrightarrow \frac{1}{a} \longleftrightarrow \frac{1}{b} \longleftrightarrow \frac{a}{b} \longleftrightarrow a$$

Na domácu úlohu si skúste odvodiť že máme len jedinú možnosť, a to práve tú, ktorá je znázornená vyššie.
Ako vidíme, prvé a siedme číslo sú rovnaké, teda zjavne nemôžme dostať dlhší reťazec ako 6 bez toho, aby sa čísla opakovali. Na domácu úlohu č.2 si rozmyslite, prečo by nám nepomohlo ani keby sme vymenili a a b (teda akoby sme písali čísla do opačnej strany kruhu).
Teraz nám už stačí iba overiť prípady pre $n = 3$, 4, 5 a 6. Ešte predtým si však skúste zdôvodniť, prečo do kruhu nemôžeme vpísať čísla 1 alebo -1.

$n=3$ Ak by sme mali v kruhu 3 čísla, mali by sme a, b, a a/b. Teda by muselo platiť:

$$\frac{a}{b} = ab \Rightarrow 1 = b^2$$

Z toho dostaneme že b musí byť 1 alebo -1, čo však ako vieme nemôže nastať.

$n=4$ Ak by sme mali v kruhu 4 čísla, boli by to a, b, b/a, $1/a$. Teda musí platiť:

$$a = b\frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = b$$

Z tohto vyplýva, že $b/a = a^2/a = a$, avšak to nemôže byť, pretože potom sú dve čísla v kruhu rovnaké (nad týmto sa poriadne zamyslite).

$n=5$ Pre 5 čísel v kruhu máme čísla a, b, b/a, $1/a$, $1/b$. Teda by malo platiť:

$$a = \frac{1}{b}b = 1$$

My však vieme, že v kruhu sa 1 nemôže vyskytovať, preto v kruhu nemôže byť ani 5 čísel.

$n=6$ Pre 6 sa úloha vyriešiť dá. Existuje mnoho riešení a napríklad toto je jedno z nich:

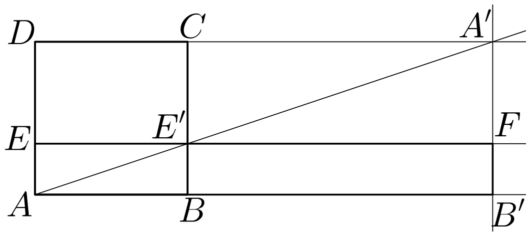
$$2,\ 6,\ 3,\ 1/2,\ 1/6,\ 1/3$$

Ukázali sme, že Veronike sa môže podariť napísať čísla do kruhu jedine pre $n=6$.

<u>Úloha č. 3:</u> *Linda dostala od Kiky na narodeniny štvorec. Je však smutná, lebo chcela svoj obľúbený obdĺžnik. Kika chce svoj omyl napraviť, ale má pri sebe len pravítko s ryskou. Našťastie jej Linda do štvorca vyznačila dĺžku strany svojho obdĺžnika. Máte na papieri štvorec $ABCD$ a na strane AD bod E. Narysujte obdĺžnik s rovnakým obsahom ako štvorec $ABCD$ a stranou dĺžky $|AE|$. K dispozícii máte len pravítko s ryskou (bez stupnice) a ceruzku.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Anina a Aňa)

Štvorec $ABCD$ leží pred nami a niekde (nevieme presne kde) na strane AD máme bod E. Vieme, že obdĺžnik, ktorý hľadáme, má mať stranu dĺžky $|AE|$. Zostrojíme teda kolmice na stranu AD v bodoch A, E, D. Bod, kde kolmica z bodu E pretína stranu BC označíme E'. Bodom A' označíme priesečník polpriamok AE' a DC. Narysujeme kolmicu na DA' v bode A' a ako pretína naše polpriamky EE' a AB získavame postupne body F, B'.



Čo sme týmto všetkým dosiahli?

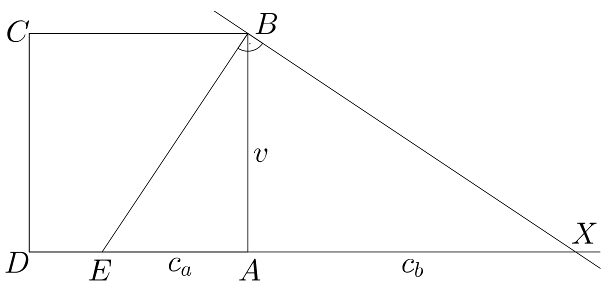
Predovšetkým nám vzniklo niekoľko párov zhodných trojuholníkov.

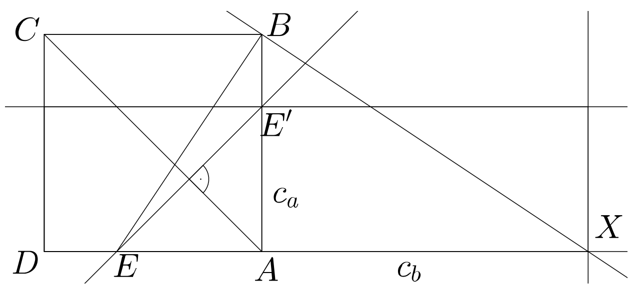
- $\triangle AB'A' \cong \triangle ADA'$ (sus)
- $\triangle ABE' \cong \triangle E'EA$ (sus)
- $\triangle E'FA' \cong \triangle A'CE'$ (sus)

Uvedené trojuholníky majú po pároch rovnaký obsah. Z toho nám vyplýva, že aj obsahy štvoruholníka $BB'FE'$ a $EE'CD$ sú rovnaké. Presne to sme chceli (porozmýšľajte prečo). Hľadaný obdĺžnik je teda $AB'FE$.

<u>Iné riešenie:</u>

Ďalšia možnosť riešenia je s využitím Euklidovej vety o výške pravouhlého trojuholníka $c_ac_b = v^2$. Z tejto vety vidíme, že ak sa nám podarí nájsť obdĺžnik so stranami c_a a c_b, jeho obsah sa bude rovnať obsahu štvorca so stranou dĺžky v.



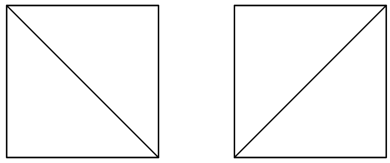


Chceme, aby to sedelo na štvorec $ABCD$. Narysujeme teda pravouhlý trojuholník, ktorého výška bude strana AB. To urobíme ľahko (viď obrázok vľavo). Teraz už len nájsť obdĺžnik. Narysujeme kolmicu z bodu E na uhlopriečku AC štvorca $ABCD$ a predĺžime ju až po stranu AB. Bod, v ktorom kolmica pretne stranu AB, označíme E'. Tým nám vznikli 2 trojuholníky zhodné podľa vety usu. Potom $|EA| = |AE'|$ a my máme c_a a c_b v polohe, v akej ich potrebujeme. Môžeme doplniť body A', X, E' na rovnobežník a náš hľadaný obdĺžnik je na svete.

Úloha č. 4: *Územie Kocúrkova má tvar pravidelného n-uholníka. Starosta Kocúrkova chce rozdeliť jeho územie na trojuholníky, ktoré majú vrcholy vo vrcholoch n-uholníka a aspoň jednu spoločnú stranu s n-uholníkom. Koľkými spôsobmi to vie urobiť?*

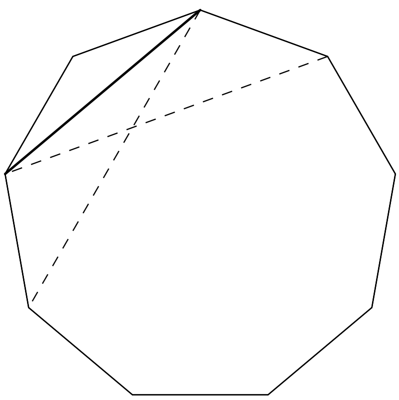
Riešenie: (opravovali Janko a Jožo)

Najprv si ujasníme, že rozdelenia, ktoré sa dajú na seba otočiť, považujeme za rôzne (napr. tie na obrázku napravo). Na začiatok je dobré si niekoľko rozdelení nakresliť, aby sme si všimli, ako vyzerajú a ako by sa dali spočítať. Takisto je dobré skúsiť si nakresliť všetky možnosti pre malé hodnoty n. Pritom by sme nemali zabudnúť na najmenší prípad – pravidelný (teda rovnostranný) trojuholník. Ten sa dá rozdeliť len jedným spôsobom. Ide o rozdelenie, v ktorom nespravíme nič, lebo trojuholník je už rozdelený na jeden trojuholník s požadovanými vlastnosťami.



Po nakreslení dostatočného množstva rozdelení si ľahko všimneme, že každý n-uholník ($n \geq 4$) je rozdelený na $n-2$ trojuholníkov, z ktorých sa dva trojuholníky dotýkajú n-uholníka dvoma stranami. Takéto trojuholníky budeme volať *krajné*.

Naše pozorovanie však potrebujeme aj dokázať. Môžeme pritom využiť napríklad uhly. Keďže trojuholníky majú vrcholy vo vrcholoch n-uholníka, ak sčítame vnútorné uhly všetkých trojuholníkov, dostaneme súčet vnútorných uhlov v n-uholníku. O ňom vieme, že je $(n-2) \cdot 180°$. Keďže súčet vnútorných uhlov v jednom trojuholníku je $180°$, musí byť v n-uholníku práve $n-2$ trojuholníkov. Ak využijeme, že každý trojuholník má aspoň jednu stranu spoločnú s n-uholníkom, tak dostaneme, že buď jeden trojuholník má s n-uholníkom spoločné všetky tri strany – to však môže nastať iba pri $n = 3$, alebo dva trojuholníky majú s n-uholníkom spoločné dve strany – teda sú krajné.



Tu si môžeme všimnúť, že trojuholník sa správa inak ako ostatné n-uholníky, preto v nasledujúcich úvahách budeme pracovať len s $n \geq 4$.

Teraz poďme určiť, koľkými spôsobmi môžeme taký n-uholník rozdeliť. Zoberme si jeden jeho krajný trojuholník – ten môžeme vybrať n spôsobmi. Ostane nám $(n-1)$-uholník, ktorý pôjdeme rozdeľovať ďalej (pokiaľ sme už nedostali trojuholník). Nemôžeme ho však rozdeliť hocijako. Jedna jeho strana totiž nie je stranou pôvodného n-uholníka. Preto trojuholník, ktorý v $(n-1)$-uholníku bude mať spoločnú stranu so stranou krajného trojuholníka (ktorá je na druhom obrázku vyznačená hrubo), musí mať ešte ďalšiu spoločnú stranu s n-uholníkom. To vieme dosiahnuť iba dvomi spôsobmi. Jeden z týchto dvoch trojuholníkov určite bude vo výslednom rozdelení územia, preto ho môžeme dokresliť a riešiť podobnú úlohu znova pre menší mnohouholník. Zakaždým tak dostaneme nejaký k-uholník, ktorý má všetky strany spoločné s pôvodným n-uholníkom okrem jednej strany. K tejto strane dokreslíme trojuholník tak, aby mal jednu spoločnú stranu aj s n-uholníkom, čo vieme vždy urobiť dvoma spôsobmi. Postup opakujeme, kým celé územie nebude rozdelené na trojuholníky, presne vyjadrené to je $(n-4)$-krát. Dostaneme tak 2^{n-4} spôsobov rozdelenia (každú práve raz) pre zvolenú polohu jedného krajného trojuholníka. Pre všetky polohy jedného krajného trojuholníka, ktorých je n, to bude $n \cdot 2^{n-4}$ spôsobov.

Ešte musíme overiť, či sme nejaké rozdelenia nezarátali viackrát. Zistíme, že každé sme zarátali práve dvakrát. Každé rozdelenie je charakteristické umiestnením dvoch krajných trojuholníkov. Zoberme si nejaké rozdelenie a pozrime sa, koľkými spôsobmi ho vieme dostať. Najprv si musíme zvoliť jeden jeho krajný trojuholník, to môžeme dvomi spôsobmi. Potom už existuje len jeden spôsob, ako pridávať trojuholníky, aby sme dostali zvolené rozdelenie. Teda každé rozdelenie n-uholníka sme zarátali dvakrát, preto počet spôsobov, ako starosta môže rozdeliť územie Kocúrkova, bude $\frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^{n-4} = n \cdot 2^{n-5}$ pre $n \geq 4$. Netreba však zabudnúť na trojuholník, pre ktorý tento vzorec neplatí. Ten môžeme rozdeliť len jedným spôsobom.

<u>**Úloha č. 5:**</u> *V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované -1, -2, -3, $\dots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Adam a Hopko)
Toto bol jeden z príkladov, pri ktorých sa nám zdá hneď na prvý pohľad[1], že dokazované tvrdenie musí platiť. Problém je, že naša intuícia nemusí byť vždy správna, a preto si to treba poriadne zdôvodniť. V takýchto prípadoch je dôležité nájsť si niečo, čoho sa chytíme, nejakú „veličinu“ alebo premennú, ktorú budeme sledovať. Trik je ale nájsť tú správnu veličinu. Väčšinou sa oplatí zvoliť si takú veličinu, ktorá má jedine v koncovom stave (keď je na každom poschodí maximálne jeden trpaslík) maximálnu/minimálnu hodnotu. Otázka je, ako ju zvoliť pre tento príklad. Po chvíľke rozmýšľania nám napadne, že naša veličina môže byť počet trpaslíkov, o ktorých vieme s určitosťou povedať, že budú do konca sveta sami na poschodí. Je ľahké rozmyslieť si, že svoje maximum (počet trpaslíkov) nadobúda len ak bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.
Zadefinujme si najprv pojem *osamotený* trpaslík – trpaslík, ktorý je na poschodí sám. Teraz by sme chceli popísať trpaslíkov, ktorí budú do konca sveta sami na poschodí. Inými slovami takých, ku ktorým už nikdy nikto nepríde z vrchu. Tu nám hneď napadne jednoduché postačujúce kritérium: ak budú všetci trpaslíci nad nejakým $k-$tym poschodím osamotení, tak na $k-$te poschodie už nikdy nikto nepríde. Našim cieľom je teda ukázať, že počet osamotených trpaslíkov, nad ktorými sú len osamotení trpaslíci sa bude časom zväčšovať, až kým nebude každý trpaslík osamotený.
Pozrime sa na poschodia, na ktorých sú aspoň dvaja trpaslíci (ak také nieje, vyhrali sme). Vezmime si najvyššie z nich. Po niekoľkých dňoch na tomto poschodí ostane len jeden trpaslík (premyslite si). A teda počet trpaslíkov, nad ktorými sú len osamotení trpaslíci, sa zväčšil. Tento krok budeme robiť dovtedy, kým nebude počet osamotených trpaslíkov, nad ktorými sú len osamotení trpaslíci, maximálny. A to nastane v prípade, keď bude každý trpaslík osamotený. Teda, po konečnom počte dní sa s určitosťou stane, že bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

<u>Iné riešenie:</u>
Podobné riešenie ako vyššie sa dá jednoducho sformulovať pomocou matematickej indukcie[2]. Majme n trpaslíkov, a chceme dokázať, že po konečnom počte dní bude na každom poschodí najviac jeden.

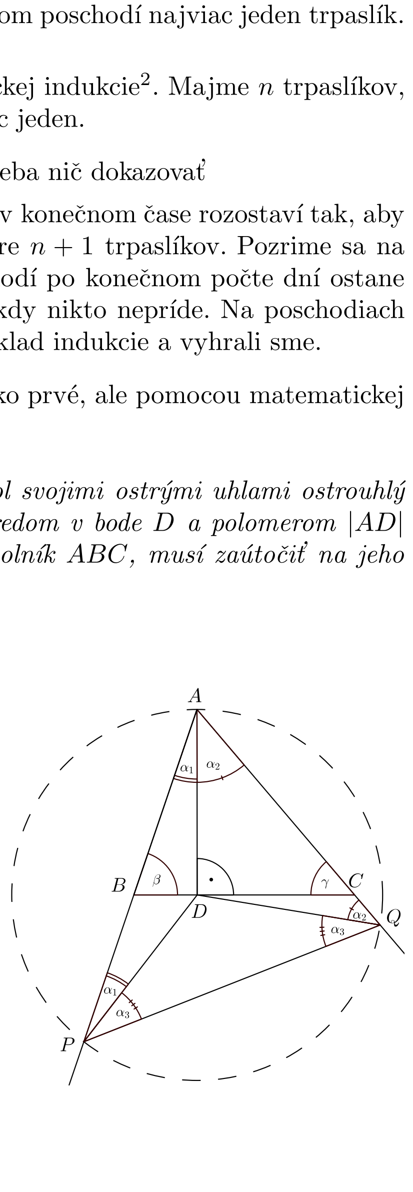
1° Pre $n = 1$ (máme jedného trpaslíka v bani) naše tvrdenie platí vždy, netreba nič dokazovať

2° Predpokladajme, že sa ľubovoľne usporiadaných n trpaslíkov v bani vždy v konečnom čase rozostaví tak, aby bol na každom poschodí najviac jeden. Chceli by sme dokázať to isté pre $n + 1$ trpaslíkov. Pozrime sa na najvyššie poschodie v bani, kde je aspoň jeden trpaslík. Na tomto poschodí po konečnom počte dní ostane len jeden trpaslík. Tento trpaslík sa už nikdy nepohne, a ani k nemu nikdy nikto nepríde. Na poschodiach nižšie je nejak rozmiestnených n trpaslíkov na ktorých použijeme predpoklad indukcie a vyhrali sme.

Môžme si všimnúť, že v toto riešenie je postavené na rovnakých myšlienkach ako prvé, ale pomocou matematickej indukcie sme spravili dôkaz trošku elegantnejšie.

<u>**Úloha č. 6:**</u> *Jožo sa ocitol v ríši geometrie. Sotva sa poobzeral a už ho napadol svojimi ostrými uhlami ostrouhlý trojuholník ABC. Bod D je v ňom päta výšky na stranu BC. Kružnica so stredom v bode D a polomerom $|AD|$ pretína priamky AB, AC postupne v bodoch P, Q. Aby Jožo premohol trojuholník ABC, musí zaútočiť na jeho podobné trojuholníky. Dokážte, že trojuholníky AQP a ABC sú podobné.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kika a Ľubo)
Ideme dokazovať podobnosť $\triangle ABC$ a $\triangle APQ$. Na dokázanie podobnosti týchto trojuholníkov by bolo vhodné, keby sme si vyznačili nejaké uhly. Zvolíme si ich tak, ako vidíte na obrázku:
Keďže AD, PD a QD sú polomery kružnice so stredom v bode D, tak si vieme $\triangle APQ$ rozdeliť na tri rovnoramenné trojuholníky. Súčet uhlov v $\triangle APQ$ je:



$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 180^\circ \implies (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 90^\circ$$

Pozrime sa na $\triangle ABD$. Keďže vieme, že pri vrchole D je pravý uhol a poznáme uhol pri vrchole A (α_1), vieme povedať, že platí:

$$|\sphericalangle ABD| = \beta = 90^\circ - \alpha_1$$

Ak si rozpíšeme 90° ako $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ a dosadíme do našej druhej rovnice pre $|\sphericalangle ABD| = \beta$ dostávame, že:

[1] alebo na druhý pohľad
[2] Ak nepoznáš matematickú indukciu, vieš sa o nej dočítať v zbierke úloh KMS

$$\beta = 90^\circ - \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$$

Z obrázka vidíme, že $|\sphericalangle AQP| = \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$. Rovnakým spôsobom by sme vedeli ukázať, že $|\sphericalangle APQ| = \gamma$. Toto však robiť nemusíme, pretože je jasné, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle QAP|$. Z toho nám vyplýva, že $\triangle ABC$ je podobný s $\triangle AQP$ podľa vety *uu*.
Mohol by náš obrázok vyzerať aj inak? Keď sa nachvíľu zamyslíme, zistíme, že by inak veru vyzerať mohol, a síce, ak by v ňom platilo, že buď $|AB| > |AP|$ alebo $|AC| > |AQ|$. Môžete si vyskúšať, že ak použijeme podobný postup, zistíme, že aj v takomto prípade sú $\triangle ABC$ a $\triangle AQP$ podobné. Problémom však je, že úplne rovnaký postup nebude fungovať, a namiesto nejakých uhlov budeme musieť použiť ich doplnky do 180°. Taktiež si môžete vyskúšať, že nemôže nastať prípad, kedy by platilo, že: $|AB| > |AP|$ a súčasne $|AC| > |AQ|$. Do budúcna vám odporúčame, aby ste si našli pár minút navyše po (kľudne aj po vyriešení príkladu) a zamysleli sa nad tým, či ste našli všetky možnosti, ako môže obrázok vyzerať.

Úloha č. 7: *Zajo si na záhrade natiera plot. Dodržiava pri tom nasledujúce pravidlá:*

- *žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,*
- *nevieme z plota vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí X, Y, X, Y, pre žiadne dve rôzne farby X, Y.*

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako n rôznych farieb?

Riešenie: (opravovali JeFo a Mary)
Netradične začnem vzorák „filozofickým“ komentárom o tom čo napísať do riešenia v takýchto príkladoch. Nájsť riešenie, $2n-1$ latiek, v tomto príklade nebolo vôbec ťažké. Oveľa komplikovanejšie bolo správne dokázať, že viac latiek už n farbami za daných podmienok Zajo natrieť nemôže. Dôkazy pomocou príkladov ktoré sa zvrtnú na úporné (nepodložené) presviedčanie opravovateľa, že všetko bude fungovať tak, ako v príklade pre ľubovoľné n, že vy ste si všetko vyskúšali na piatich farbách a inak to už byť nemôže, pred opravovateľom veľmi neobstoja. Tvrdenia typu: „Bude to fungovať ..., lebo to nemôže fungovať inak.“ treba poriadne zdôvodniť aj keď sú to pravdivé a pre malé n relatívne očividné.

Najskôr sa dohodneme, že farby budeme označovať číslami od 1 po n a vyskúšajme nájsť riešenie pre malé hodnoty n. Po pár pokusoch nadobudneme tušenie, že n farbami to môže Zajo natrieť $2n-1$ latkám. Dokonca sa nám podarí odvodiť aj postup ako natrieť plot s $2n-1$ latkami pomocou n farieb. Napríklad:

$$1,\ 2, \ldots,\ (n-1),\ n,\ (n-1),\ (n-2), \ldots,\ 2,\ 1$$

alebo

$$1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4, \ldots, 1,\ (n-1),\ 1,\ n,\ 1.$$

V oboch prípadoch sa môžeme ľahko presvedčiť, že sme to natreli $2n-1$ latkám.
Dôkaz toho, že $2n-1$ je aj naviac latiek, ktoré vieme ofarbiť začnime tým, že si uvedomíme, že medzi každými dvoma latkami (X a Y) rovnakej farby musia byť všetky latky zafarbené farbami, ktoré už nie sú použité nikde mimo úseku $X \ldots Y$. To je jasné, keby sme použili niektorú z farieb vo vnútri úseku $X \ldots Y$ mimo tohoto úseku, porušili by sme druhú podmienku. Ďalej si uvedomme, že plot maximálnej dĺžky musí začínať a končiť rovnakou farbou, ak tomu tak nie je, môžeme za poslednú natretú latku pridať latku s prvou farbou a nič tým nepokazíme a plot predĺžime, teda pôvodný by nemal maximálnu dĺžku.
Je zrejmé, že s jednou farbou nezafarbíme viac ako jednu latku. Predpokladajme, že pre všetky $p < n$ platí, že za daných podmienok vieme natrieť p farbami najviac $2p-1$ latiek. Rozdelme teraz náš plot na úseky medzi latkami, ktoré majú rovnakú farbu ako prvá latka. Nech je takýchto úsekov L a teda latiek s farbou prvej latky je $L+1$. Podľa predchádzajúceho odseku sú v každom takomto úseku rôzne farby. Nech p_i pre i od 1 po L je počet farieb, ktoré sú v i-tom úseku. Potom má plot dĺžku najviac:

$$L + 1 + \sum_{i=1}^{L}(2p_i - 1) = 2\sum_{i=1}^{L} p_i - L + L + 1 = 2\sum_{i=1}^{L} p_i + 1.$$

A keďže počet farieb ktoré sme použili na L úsekoch je najviac $n-1$ tak platí:

$$2\sum_{i=1}^{L} p_i + 1 \leq 2(n-1) + 1 = 2n - 1,$$

čo je presne to čo sme chceli dokázať.

<u>**Úloha č. 8:**</u> *Jefo stratil okuliare. Keď ich hľadal, namiesto nich našiel prirodzené čísla $a,\ b,\ c$ také, že:*

- a^2+1 *a* b^2+1 *sú prvočísla,*
- $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1.$

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel $a,\ b,\ c$ spĺňajúce uvedené vlastnosti.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Zajo a Vodka)
Na začiatok si môžeme bez ujmy na všeobecnosti povedať, že $a \le b$ (ak by $b > a$, tak ich vymeníme). Tiež sa zjavne b nemôže rovnať c ani byť väčšie. Preto môžme rátať s tým, že $a \le b < c$
Ak by $a = b$, tak dostávame $(a^2+1)^2 = c^2+1$, dva štvorce s rozdielom 1 sú však iba 0 a 1, a také neexistujú $(a,\ b,\ c \in \mathbb{N})$.
Rovnicu upravíme na tvar:

$$a^2(b^2+1) = c^2+1-(b^2+1)$$

$$a^2(b^2+1) = (c+b)(c-b)$$

Z parity tiež môžeme povedať, že buď sú $a,\ b = 1$ alebo sú párne, aby boli $a^2+1,\ b^2+1$ prvočísla (ak by boli nepárne, $a^2+1,\ b^2+1$ by boli párne prvočísla a to môže byť len 2).
Vyriešme najprv prvý prípad kedy je jedno z prvočísel párne. Nech $a = 1$.

$$b^2+1 = (c+b)(c-b)$$

Pretože na ľavej strane máme prvočíslo, jedna zo zátvoriek na pravej strane je rovná 1. Musí to byť tá menšia, preto $c-b=1$, $b^2+1=c+b$. Po úprave $c=b+1$ a dosadení dostaneme $b^2+1=2b+1$, $b^2=2b$ (rovnicu môžeme vydeliť b pretože je prirodzené), z čoho vyjde prvé riešenie: $a=1,\ b=2,\ c=3$, ktoré zrejme vyhovuje. Nezabudnime aj na jeho dvojičku, ak by sme vymenili a s b dostávame aj $a=2,\ b=1,\ c=3$.
Teraz nám ostáva situácia, kedy sú $a,\ b,\ c$ párne. (c bude tiež párne, lebo na ľavej strane budeme mať dve nepárne prvočísla a aj pravá strana bude musieť byť nepárna) Opäť predpokladáme teraz už vylepšené usporiadanie, že $a < b < c$.

$$a^2(b^2+1) = (c+b)(c-b)$$

b^2+1 je prvočíslo, preto delí práve jednu zo zátvoriek.
Rozoberme tieto dva prípady:

1) $b^2+1 \mid c+b$
Keď sa na rovnicu pozrieme z opačnej strany, musí platiť že $(c-b) \mid a^2$. Preto

$$c+b \ge b^2+1 > a^2 \ge c-b$$

Potom ale platí

$$b^2-a^2 \le (c+b)-(c-b)$$

$$(b+a)(b-a) \le 2b$$

$b+a$ je väčšie ako b, preto aby platila nerovnosť musí byť $b-a=1$ (ak by to bolo viac, ľavá strana by bola zjavne väčšia), lenže a aj b musia byť v tomto prípade nepárne, čím dostávame spor (rozdiel dvoch nepárnych čísel nemôže byť 1).

2) $b^2+1 \mid c-b$
Tu môžeme povedať že $c+b \mid a^2$, preto

$$a^2 \ge c+b > c-b > b^2+1$$

(posledná nerovnosť vyplýva z podmienky tohoto prípadu), to je ale spor s usporiadaním $a < b < c$.

Tým sme sa naozaj presvedčiili že sme dostali jediné dve riešenia a to

$$a=1,\ b=2,\ c=3$$

$$a=2,\ b=1,\ c=3.$$

<u>Úloha č. 9:</u> *Po ukrutnom boji s ostrouhlým trojuholníkom sa Jožo rozhodol, že navštívi starého mudrca, ktorý ho naučí finty proti geometrickým útvarom.*
Na zemi našiel nakreslený ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Body B', C' sú obrazy bodov B, C v osových súmernostiach podľa priamok AC, AB. Podľa obrázku za mudrcom vedie každá z priamok BC', CB', AO. Jožo si ale nie je istý, či ho každá dovedie na to isté miesto. Dokážte, že sa tieto tri priamky pretínajú v jednom bode.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Kajo a Mišo)
Všimnime si, že podľa priamok preklápame nielen body, ale celé trojuholníky. Uhly prevrátených trojuholníkov sú rovnaké a rovno si ich aj označíme:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'AC| = |\sphericalangle BAC'| = \alpha$$

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AB'C| = |\sphericalangle ABC'| = \beta$$

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACB'| = |\sphericalangle AC'B| = \gamma$$

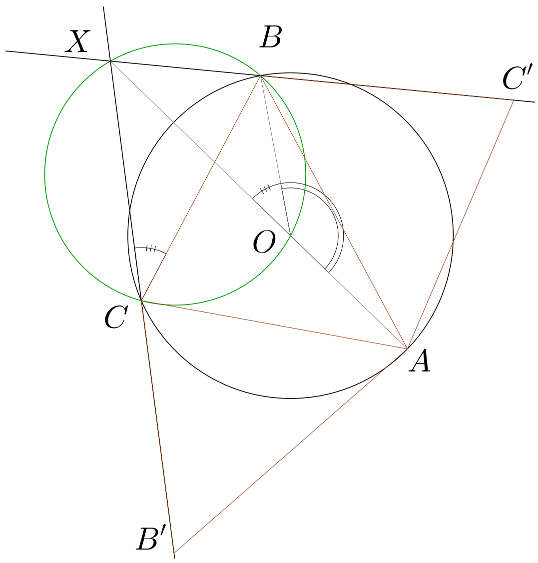
Chceme ukázať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode. Priesečník priamok BC' a $B'C$ si označíme X a budeme sa snažiť dokázať, že uhol XOA je $180°$.
Vieme, že priamky $B'C$ a BC' sa pretínajú, lebo s priamkou BC zvierajú na jednej polrovine postupne uhly 2β a 2γ, čo je dokopy viac ako $180°$ (presne je to $360° - 2\alpha$ a keďže trojuholník je ostrouhlý, tak $\alpha < 90°$).
V trojuholníku BCX si vieme zo susedných uhlov vypočítať $|\sphericalangle BCX| = 180° - 2\gamma$ a $|\sphericalangle XBC| = 180° - 2\beta$. Následne dopočítame uhol CXB:

$$|\sphericalangle CXB| = 180° - (180° - 2\beta) - (180° - 2\gamma) = 2\beta + 2\gamma - 180° = 180° - 2\alpha.$$

Využili sme, že α, β, γ sú uhly trojuholníka a ich súčet je $180°$.
Teraz si vypočítame veľkosť uhla COB. Bod O je stred kružnice opísanej ABC, teda $|\sphericalangle COB| = 2|\sphericalangle CAB| = 2\alpha$. Analogicky je $|\sphericalangle BOA| = 2\gamma$.
Teraz by sme si mali všimnúť, že súčet veľkostí uhlov COB a CXB je $180°$. Taktiež sú na rôznych polrovinách úsečky BC, takže $XCOB$ je tetivový štvoruholník.
Obvodový uhol nad BX na kružnici opísanej $XCOB$ je všade rovnaký. Preto $|\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle XOB| = 180° - 2\gamma$
Z toho nám vyplýva, že body X, O, A ležia na priamke, lebo

$$|\sphericalangle XOA| = |\sphericalangle XOB| + |\sphericalangle BOA| = (180° - 2\gamma) + 2\gamma = 180°$$

Úloha je tým dokázaná.



<u>**Úloha č. 10:**</u> *Vodka sa rozhodol odvážiť anglickú abecedu. Uvažoval všetkých* 26^{26} *slov dĺžky* 26 *v anglickej abecede (ktorá má 26 písmen). Definoval váhu slova ako* $1/(k+1)$ *kde* k *je počet písmen, ktoré sa v slove nevyskytujú. Dokážte, že súčet váh všetkých slov je* 3^{75}.

<u>Riešenie:</u> (opravoval Cvrki)
Táto úloha mohla pre viacerých z vás vyzerať odstrašujúco, keďže sa v nej vyskytujú veľké čísla a málo premenných. Iných primäla k snahe (niekedy aj úspešnej) vyriešiť úlohu pomocou silnej výpočtovej sily — buď priamym vyjadrením sumy rôznych násobkov kombinačných čísiel, alebo postupným vypočítaním váh slov od dĺžky 1 až po 26. My si ukážeme, ako sa dá úloha vyriešiť bez zložitejších výpočtov použitím nie moc komplikovanej indukcie.

V situácii, keď riešime úlohu s veľkými konkrétnymi číslami sa niekedy oplatí úlohu „zozložitiť" a riešiť všeobecnejšiu úlohu. V našom prípade sa môžeme napríklad spýtať otázku, aká je váha všetkých slov dĺžky n v abecede s m písmenami. No nemusíme „zozložiťovať" až toľko a môžeme skúsiť jednu z našich 26-tiek zachovať. Máme na výber z dvoch úloh:

- Aká je váha všetkých slov dĺžky n v anglickej (26-písmenovej) abecede?
- Aká je váha všetkých slov dĺžky 26 v n-písmenovej abecede?

Skúsené oko matematika vám možno napovedá, že prvá úloha vyzerá prijateľnejšie. Ak nie, tak dobrá hmatateľná motivácia vybrať si prvú úlohu je tá, že sa dá jednoduchšie vyriešiť pre malé prípady (skúste si vyriešiť obe úlohy pre $n=3$). Týmto končí naše úvodné soirée a môžeme sa pustiť do riešenia nasledujúcej pozmenenej úlohy:

Aká je váha všetkých slov dĺžky n v anglickej (26-písmenovej) abecede?

Keď už sme výber tejto možnosti odargumentovali možnosťou otestovať úlohu na malých prípadoch, tak to aj naozaj spravme:

$n=0$ Tento prípad by sa dal nazvať patologickým, no možno nám pomôže pri určení vzorca na váhu slov pre všeobecné n. Navyše je výpočet veľmi jednoduchý, tak prečo sa mu vyhýbať. Existuje jedno 0-písmenové slovo a nevyskytuje sa v ňom 26 písmen abecedy. Váha všetkých slov dĺžky nula je:

$$\mathcal{V}(0) = \frac{1}{27}.$$

$n=1$ V tomto prípade máme 26 rôznych 1-písmenových slov, v každom z nich sa nevyskytuje presne 25 písmen abecedy a teda každé má váhu $\frac{1}{26}$. Váha všetkých slov dĺžky jedna je:

$$\mathcal{V}(1) = 26 \cdot \frac{1}{26} = 1.$$

$n=2$ V tomto prípade máme 26 rôznych 2-písmenových slov tvaru aa, v každom z nich sa nevyskytuje presne 25 písmen abecedy a teda každé má váhu $\frac{1}{26}$. Ďalej máme ešte $26 \cdot 25$ rôznych 2-písmenových slov tvaru ab, v každom z nich sa nevyskytuje presne 24 písmen abecedy a teda každé má váhu $\frac{1}{25}$. Váha všetkých slov dĺžky dva je:

$$\mathcal{V}(2) = 26 \cdot \frac{1}{26} + 26 \cdot 25 \cdot \frac{1}{25} = 27.$$

$n=3$ Trojpísmenové slová môžu mať jeden z nasledujúcich tvarov: aaa, abb, bab, bba, abc. Ak pre každý tvar vypočítame váhu a vynásobime ju počtom slov daného tvaru, tak zistíme, že váha všetkých slov dĺžky tri je:

$$\mathcal{V}(3) = 27 \cdot 27 = 729.$$

Teraz nastal správny moment na uhádnutie všeobecného vzorca pre $\mathcal{V}(n)$. Stačí si len napísať malé hodnoty v správnom tvare:

$$\begin{aligned} V(0) &= 3^{-3} \\ V(1) &= 3^{0} \\ V(2) &= 3^{3} \\ V(3) &= 3^{6} \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie by teda mohlo mať tvar $\mathcal{V}(n) = 3^{3(n-1)}$. Ak sa nám to podarí ukázať, tak $\mathcal{V}(26) = 3^{3(26-1)} = 3^{75}$ a sme hotoví.

Správnosť vzorca skúsime ukázať indukciou. Už vieme, že pre malé prípady platí. Stačí nám teda ukázať, že ak platí pre prirodzené číslo N, tak platí aj pre $N+1$. Nech teda platí, že váha všetkých slov dĺžky N sa rovná $3^{3(N-1)}$. Zo slov dĺžky N vyrobíme slova dĺžky $N+1$ nasledujúcim spôsobom: za každé jedno slovo dĺžky N postupne doplníme každé z 26 písmen anglickej abecedy (t.j., z každého slova dĺžky N vytvoríme 26 rôznych slov dĺžky $N+1$). Skúste si overiť, že takýmto spôsobom dostaneme všetky $(N+1)$-písmenové slová a každé práve raz (na tomto pozorovaní je založená celá indukcia).

Teraz ukážeme, že pre každé slovo dĺžky N platí, že súčet váh 26 slov dĺžky $N+1$, ktoré z neho vznikli, je 27-krát väčší než váha daného slova. Majme teda slovo dĺžky N, v ktorom sa nevyskytuje k písmen, a teda má váhu $\frac{1}{k+1}$. V slovách dĺžky $N+1$, ktoré dostaneme pripojením niektorého z týchto k písmen na koniec nášho slova, sa nevyskytuje už len $k-1$ písmen a majú váhu $\frac{1}{k}$. Naopak v slovách dĺžky $N+1$, ktoré dostaneme pripojením niektorého zo zvyšných $26-k$ písmen na koniec nášho slova, sa nevyskytuje opäť k písmen a majú váhu $\frac{1}{k+1}$ (ak si z posledných dvoch viet zmätený, tak si to skús premyslieť alebo si pozri poznámku na konci riešenia).

Týchto 26 slov má teda dokopy váhu

$$k \cdot \frac{1}{k} + (26-k) \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k+1+26-k}{k+1} = 27 \cdot \frac{1}{k+1}.$$

Z každého slova dĺžky N teda vytvoríme 26 slov dĺžky $N+1$, ktoré sú dokopy 27-krát ťažšie než pôvodné slovo. Keďže týmto spôsobom vytvoríme všetky slová dĺžky $N+1$ a každé práve raz, tak váha slov dĺžky $N+1$ je 27-krát väčšia než váha slov dĺžky N. Inými slovami

$$\mathcal{V}(N+1) = 27 \cdot \mathcal{V}(N) = 3^3 \cdot 3^{3(N-1)} = 3^{3N},$$

čo sme chceli dokázať.

Úloha zo zadania je už priamym dôsledkom všeobecného vzorca, ktorého správnosť sme práve dokázali.

Komentár: V tomto vzorovom riešení bolo preskočených viacero drobných kombinatorických výpočtov (z dôvodu lepšej kontinuálnej čitateľnosti), ktorých správnosť si môžete skúsiť overiť sami.

Poznámka: Napríklad pre slovo *ahoj* dĺžky 4 máme $k = 22$ a jeho váha je $\frac{1}{23}$. Potom $(26 - k =)$ 4 slová *ahoja*, *ahojh*, *ahojj* a *ahojo* majú váhu $\frac{1}{23}$ a k slov *ahojb*, *ahojc*, …, *ahojz* má váhu $\frac{1}{22}$.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Sásik Tomáš	2.	Gamča BA	4	9	9	9	9	9	9			45	45
2.	Hanzely Slavomír	4.	GJAR PO	8			9	9	9	9			36	36
2.	Marko Alan	2.	GMRŠ NZ	4		9	9	9		9			36	36
2.	Sládeček Michal	3.	GVar ZA	5		9	9	9	9				36	36
2.	Sládek Samuel	4.	GAB NO	6			9	9	9	9			36	36
6.	Mičko Juraj	3.	GPoš KE	6		7	9	6		9	4		35	35
7.	Tóthová Andrea	4.	GJH BA	6		9	9	3		9	4		34	34
8.	Hrmo Šimon	4.	GPár NR	4	5	8	9	3		8			33	33
8.	Pajger Šimon	2.	GVO ZA	4	4	9	9	6		5			33	33
10.	Csenger Géza	3.	GHS	3		9	9	3		9			30	30
10.	Dlugošová Michaela	2.	GKuk PP	4	6	9	9	5		1			30	30
12.	Porubsky Michal	4.	GsvCM NR	6		9	9	6	5				29	29
13.	Murin Marek	4.	GJH BA	8			9	3	3	9	4		28	28
14.	Kopfová Lenka	1.	G Slez ČR	2		9	9			9			27	27
14.	Mach Jakub	3.	GPoš KE	3		9	9			9			27	27
14.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1	7	5	9	3	3				27	27
14.	Poljovka Jakub	2.	GPár NR	4	0	9	5	3		9	1		27	27
14.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	3		9	9			9			27	27
19.	Drotár Pavol	3.	GPoš KE	5		9	9			8			26	26
19.	Molčan Samuel	4.	GJAR PO	8			9	3	9	5			26	26
21.	Ivan Peter	2.	GJH BA	4	5	9	8	3	0				25	25

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
21.	Pivoda Tomáš	3.	SJG KN	3		9	9			7			25	25
21.	Žídek Matěj	4.	Frýdlant ČR	7			9	7		9			25	25
24.	Bodík Juro	4.	Gamča BA	9			9	7	8	*			24	24
24.	Pišťák Daniel	4.	GChD Praha	7			9	6	9				24	24
26.	Kopf Daniel	4.	G Slez ČR	9			8	6		9			23	23
27.	Marčeková Katarína	4.	GJH BA	8			8	3	1	9			21	21
27.	Smolárová Paulína	2.	ŠPMNDG BA	4	2	9	7	3	0				21	21
27.	Súkeník Peter	4.	GVO ZA	9			9	3		9			21	21
30.	Onduš Peter	2.	GAlej KE	4	7	1	9	3					20	20
31.	Ralbovský Peter	4.	ŠPMNDG BA	8			2	3	0	9	5		19	19
32.	Král Adam	4.	GVar ZA	6		9	9						18	18
32.	Švihorík Tomáš	2.	GPár NR	4	0	9	5	3	1				18	18
34.	Genči Jakub	3.	GPoš KE	5		8	9						17	17
34.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	3	1	2	9	3	1	2			17	17
36.	Kuťková Sára	2.	Gamča BA	4	3	1	9	3					16	16
36.	Parada Matej	2.	Gamča BA	4	4	9		3					16	16
36.	Vančo Šimon	4.	CGsvM SL	5	3	9	4	3	0				16	16
39.	Kulla Filip	4.	BiG Sučany	8			8	3		3	1		15	15
39.	Kurimský Ján	4.	GsvMo	6			9		1	5			15	15
41.	Belan Pavol	2.	GVar ZA	4	2	3	2	3		4			14	14
42.	Homola Marek	2.	GJH BA	4	1	9		3					13	13
43.	Bajnoková Natália	2.	GCSL BA	4			9	3					12	12
43.	Choma Matej	4.	Gamča BA	7			9	3					12	12
45.	Dendis Tomáš	5.	BiG Sučany	5		2	1	3		1			7	7
46.	Molnár Maximilián	2.	EvSŠ LM	2				3	1		1		5	5
47.	Krajmerová Barbora	4.	G Šurany	6				3					3	3
48.	Eller Peter	3.	GJH BA	4									0	0
48.	Jarunek Maximilián	1.	GLN BA	1		0	0			0			0	0

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Kollár Pavol	1.	Gamča BA	1	9	9	9		9	9			45	45
1.	Mišiak Dávid	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9	9	6		45	45
1.	Števko Martin	1.	GAlej KE	1	9	9	9	8	9	9			45	45
1.	Tódová Tereza	1.	GPár NR	1	9	9	9	6	9	9			45	45
5.	Krajči Samuel	1.	GAlej KE	1	8	9	9	9	9				44	44
5.	Zubčák Matúš	1.	GPár NR	1	8	9	9		9	9	3		44	44
7.	Brezinová Viktória	1.	GAlej KE	1	8	9	9	8		9			43	43
8.	Baláž Lukáš	1.	G Bánovce	1	9	9	9		9		6		42	42
8.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1	8	9	9	7	5	9	3		42	42
8.	Poturnay Marián	1.	GPdC PN	1	8	4	9		9	9	7		42	42
11.	Cinová Tatiana	1.	GPár NR	1	8	6	9		9	9	3		41	41
12.	Glevitzká Štefánia	1.	GVBN PD	1	9	9	2	9		9	3		39	39
12.	Hrmo Matej	1.	GPár NR	1	9		9		9	9	3		39	39
12.	Jóža Bohdan	1.	GJH BA	1	9	9	9		9	1	3		39	39
12.	Molnár Michal	1.	Gamča BA	1	9		9		9	9	3		39	39
16.	Belák Tomáš	1.	GAV LV	1	8	9	9		9		3		38	38
16.	Číž Jozef	1.	GJH BA	1	8	9	9		9		3		38	38
16.	Klein Pavol	1.	GPdC PN	1	9	9	9		3	8	3		38	38
16.	Rosinsky Juraj	1.	I de Lancy	1	8	1	9		9	9	3		38	38
20.	Královič Tomáš	1.	GPár NR	1	8	9	9		2	9			37	37
21.	Ďuračková Mária	1.	GJH BA	1		9	9		9	9			36	36
21.	Moško Matej	1.	Gamča BA	1	9		9		9	9			36	36

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
23.	Kalašová Martina	1.	GJH BA	1		9	9		5	9	3		35	35
24.	Benková Nina	1.	GPdC PN	1	9	7	9			9			34	34
24.	Findra Michal	1.	GDT PP	1	8		9	5	9		3		34	34
24.	Kopunec Matúš	2.	GĽŠ TN	2		9	9		4	9	3		34	34
27.	Winczer Tobiáš	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	2		9		3		32	32
28.	Dujava Jonáš	1.	SPŠE Prešov	1	8	9	9		5				31	31
28.	Hečko Michal	1.	GPOH DK	1	8	3	8			9	3		31	31
30.	Machalová Monika	1.	GJH BA	1		9	9		9		3		30	30
30.	Ondovčíková Lucia	1.	G Modra	1	8	9	2	2	1	9			30	30
32.	Kebis Pavol	1.	G PK	1		9		5	9		6		29	29
33.	Barusová Ema	1.	GPár NR	1	8		9		2	9			28	28
33.	Csenger Géza	3.	GHS	3			7		9	9	3		28	28
33.	Miháľ Filip	1.	Gym RS	1	8	4	8			8			28	28
36.	Galikova Kristina	1.	SúkG Česká	1	4	7	9	4		2	3		27	27
36.	Oravkin Richard	1.	1SG BA	1		9	9		9				27	27
36.	Pisoňová Karolína	1.	G Bánovce	1	9	9			9				27	27
39.	Rajníková Mária	3.	GĽŠ TN	3			9		3	9	3		24	24
40.	Studeničová Katarína	2.	GPOH DK	2		6	9	4	1		3		23	23
41.	Pieš Dávid	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9		1	1		3		22	22
42.	Izsóf Ottó	3.	SJG KN	3					9	9	3		21	21
42.	Molnár Maximilián	2.	EvSŠ LM	2		9	9				3		21	21
44.	Lacko Dávid	1.	GPOH DK	1	8	3	9						20	20
44.	Portašiková Jasmína	1.	GVar ZA	1	3	3	7	4	3		3		20	20
46.	Letovanec Ján	1.	Gamča BA	1		8	2		9				19	19
47.	Budaj Ľubor	2.	BiG Sučany	2		4	9	1	1		3		18	18
47.	Feketeová Viola	1.	GBST LC	1	8	3	2	1	1	2	3		18	18
47.	Kopfová Lenka	1.	G Slez ČR	2					9	9			18	18
47.	Mach Jakub	3.	GPoš KE	3					9	9			18	18
47.	Pivoda Tomáš	3.	SJG KN	3					9	9			18	18
47.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	3					9	9			18	18
53.	Častulíková Katarína	2.	1SG BA	3			9	4	1		3		17	17
53.	Pozsonyi Karol	1.	GBil BA	2			7		6	1	3		17	17
53.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	3			2	1	2	9	3		17	17
56.	Belejová Sára	2.	GPH MI	2			9	1	1		3		14	14
57.	Majer Matúš	1.	ŠPMNDG BA	1	6	2	1	1	3				13	13
58.	Calvo Natália	1.	GPár NR	1	8	3	0		1				12	12
59.	Kubinec Ondrej	1.	G PK	1	8	3							11	11
60.	Kňaze Gabriel	1.	GJCh BR	1	3			1	3		3		10	10
61.	Skala Daniel	1.	GCSL BA	1	9								9	9
61.	Skopalová Katarína	2.	GPH MI	2			9						9	9
63.	Jakubíková Hana	1.	GCSL BA	1			2	1	1	1	2		7	7
63.	Novota Matej	1.	SŠsvFA	1		1			3		3		7	7
65.	Kurimský František	2.	GsvM PO	2			5						5	5
66.	Jarunek Maximilián	1.	GLN BA	1	1		2		0	0			3	3
67.	Beňo Roman	3.	GJH BA	3									0	0
67.	Čičová Katarína	3.	GMRŠ NM	3									0	0
67.	Ďurina Marián	2.	G Šurany	2									0	0
67.	Novosedliaková Lea	3.	GJL MT	3									0	0
67.	Porges Eduard	2.	GJH BA	2									0	0
67.	Stroka Martin	2.	GŠkol PB	2									0	0
67.	Valová Alena	3.	GJL MT	3	1	1							0	0