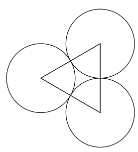
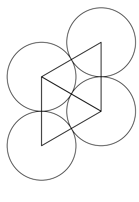
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2015/2016

Úloha č. 1: *Každý z 2015-tich šmolkov si chce postaviť okrúhly domček. Chcú si ich postaviť tak, aby sa niektoré dotýkali. Vieme v rovine uložiť 2015 kruhov s rovnakým polomerom tak, aby sa každý kruh dotýkal aspoň troch ďalších kruhov?*

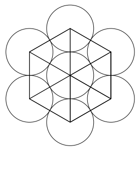
Riešenie: (opravovala Betka)
Chceme do roviny uložiť 2015 kruhov s rovnakým polomerom. Začneme intuitívne, pokúsime sa nejak poukladať zopár kruhov, aby sa každý z nich dotýkal aspoň troch. Vezmime si najprv tri kruhy a poukladajme ich tak, aby sa dotýkali. Už je to skoro to čo by sme chceli. Každý sa dotýka práve dvoch. Určite nám udrie do očí aj to, že stredy kruhov vytvárajú pravidelný trojuholník, skúste si premyslieť prečo a ako to môže byť výhodné.



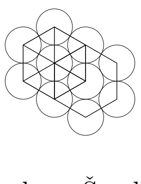
Postupne pridávame dalšie kruhy aby sme vytvárali čo najviac dotykov. Vždy vieme vyrobiť dotyk s aspoň dvomi kruhmi, a teda pridať ďalší „trojuholník“.



Na druhom obrázku už máme aj jeden kruh čo spĺňa našu podmienku. Takto skúšame pridávať ďalej až nám vznikne takáto „kvetinka“.



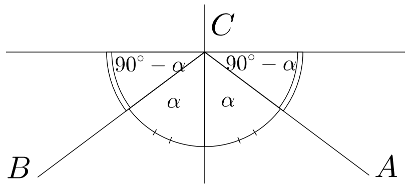
V nej sa už každý kruh dotýka aspoň troch iných. Samozrejme takto sme zatiaľ uložili len 7 kruhov. Ak by bolo 2015 deliteľné siedmimi, už to máme hotové. Avšak 2015 nám po delení siedmimi dáva zvyšok 6. Jeden spôsob ako poukladať kruhy môže teda byť že vyrobíme 287 kvetiniek. Zvyšných 6 kruhov uložíme tak, aby sme vyrobili dotyk s aspoň tromi kruhmi. Napríklad vyrobíme z dvoch kvetiniek „dvojkvetinky“.



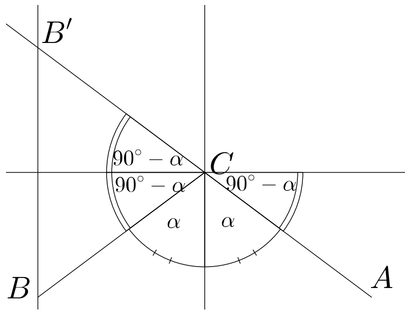
Určite však vieme vymyslieť aj viacero iných spôsobov. Šmolkom môžme s radosťou oznámiť, že naozaj vieme poukladať do roviny 2015 kruhov s rovnakým polomerom tak, aby sa každý dotýkal aspoň troch.

Úloha č. 2: *Kajo hráva futbal. Na tréningu si skúša prihrávku o stenu. Nachádza sa v bode A a chce si loptu prihrať o stenu tak, aby ju chytil v bode B. Nevie však, ako ju má kopnúť. V rovine sú dané body A, B a priamka p, ktorá nepretína úsečku AB. Zostrojte na priamke p bod C taký, že os uhla ACB bude kolmá na priamku p.*

Riešenie: (opravovali Ivka a Ľubo)
Keďže je našou úlohou niečo zostrojiť, určite nám pomôže začať tým, že si nakreslíme obrázok a spravíme rozbor úlohy.



Využijeme poznatok, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu a teda os uhla ACB rozdeľuje tento uhol na dva rovnaké uhly s polovičnými veľkosťami. Tieto uhly si označíme ako α. Ich doplnky k pravým ulom budú teda rovné $90° - \alpha$. Máme teda odkiaľ kam chce Kajo loptu kopnúť, stenu, od ktorej sa lopta odrazí. Taktiež vieme, čo musí platiť pre uhly pri bode C.
No ale čo s tým? Zostrojme si bod B', ktorý bude obrazom bodu B podľa priamky p. Je to vlastne bod, kam by lopta prišla, keby sa od steny neodrazí. Čo vieme o bode B'? Doteraz nás zaujímali hlavne veľkosti uhlov pri bode C, tak sa skúsme pozrieť, čo nám tento nový bod pridal. Keďže B' je obrazom bodu B, tak veľkosť uhla, ktorý tvorí úsečka CB' a priamka p bude tiež $90° - \alpha$ (skúste si premyslieť prečo). Náš obrázok dostáva nasledovnú podobu:



A čo vieme povedať o uhle ACB'? Pre jeho veľkosť platí:

$$90° - \alpha + 90° - \alpha + \alpha + \alpha = 180° + (2 \cdot \alpha - 2 \cdot \alpha) = 180°$$

Keďže nám tento uhol vyšiel priamy, tak vieme, že bod C leží na úsečke AB'.
A ako teda zostrojíme hľadaný bod C? Jednoducho. Stačí nám zostrojiť obraz bodu B a síce B'. B' spojíme s bodom A a na mieste, kde sa nám preťala priamka p s úsečkou AB' bude ležať náš vytúžený bod C.

Úloha č. 3: *Ketrin si na papier napísala výraz*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + 1,$$

ktorý sa skladal z 2015 jednotiek so striedajúcimi sa znamienkami. Potom skúšala doňho doplniť zátvorky tak, aby nikde nedostala zápis súčinu.[1] *Koľko rôznych súčtov mohla dostať?*

Riešenie: (opravovali Jožo a Adam)
Ako prvé sa môžeme zamyslieť nad tým, čo Ketrin vo výraze zmení, ak tam pridá zátvorku. Ak ju dá za znamienko $+$, nič sa nestane, a môže dať zátvorku zase preč. Čo sa však stane keď ju dá hneď za znamienko $-$? Vtedy sa hodnota súčtu zátvorky zmení na opačnú, čo je to isté ako keby sme dali tú zátvorku preč a všetkým jednotkám v nej zmenili znamienko na opačné. Pridávaním zátvoriek teda Ketrin mení znamienka jednotiek v našom výraze. Napríklad z $1 - 1 + 1 - 1$ vie pridaním zátvoriek spraviť $1 - (1 + 1) - 1 = 1 - 1 - 1 - 1$. Tým, že tretej jednotke zmenila znamienko, podarilo sa jej z $+1$ urobiť -1.
Ak dáme do zátvorky nepárny počet jednotiek, prvej sa znamienko nezmení a ostatné sa po dvojiciach „vynulujú“, takže si veľmi nepomôžeme. Ak dáme do zátvoriek párny počet jednotiek, zase sa prvá nezmení, ostatné sa po dvojiciach „vynulujú“ a posledná sa zmení na -1 čím súčet klesne o dva. Ešte nesmieme zabudnúť, že zátvorky

[1] Teda ľavé zátvorky umiestňovala napravo od znamienka.

môžeme aj do seba vkladať. Tak môžeme napríklad zátvorke s párnym počtom jednotiek, ktorá nám znižovala súčet o dva, zmeniť znamienka. Potom nám súčet pre zmenu o dva zvýši.
Zamyslime sa nad tým, aké súčty vlastne vieme dostať. Tým, že meníme jednotkám znamienka, zmeníme výsledný súčet vždy o dva. Bez akýchkoľvek zátvoriek má náš výraz súčet 1, čo je nepárne číslo. Preto pridávaním alebo odoberaním dvojky vieme dostať iba nepárne čísla. Aké teda?
Okrem prvej jednotky, ktorá pred sebou už nemá žiadne mínus, dokážeme z každej $+1$ urobiť -1. Z výrazu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1$$

pridaním zátvoriek spravíme

$$1 - (1 + 1) - (1 + 1) - \cdots - (1 + 1) = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \cdots - 1 - 1$$

Vieme že na 2015. mieste bude $+1$, lebo v našom výraze sa nám pravidelne striedajú $+1$ a -1 tak, že na nepárnych pozíciách sú $+1$. Najmenší súčet dostaneme tak, že zmeníme na záporné všetky znamienka, ktoré môžeme. Okrem prvej jednotky, ktorá pred sebou už nemá žiadne mínus, môžeme zmeniť znamienko všetkým ostatným. Dostaneme tak jednu $+1$, a 2014-krát -1, čo keď spočítame, dostaneme -2013.
Keď budeme po jednej pridávať takéto zátvorky, budeme zaradom $+1$ meniť na -1. Takto po všetkých nepárnych číslach klesneme až ku -2013.
Vieme dostať aj súčty väčšie ako 1? Vieme, napríklad ak budeme tak ako predtým meniť všetky znamienka na mínus, a potom ich všetky zmeníme na plus. To spravíme jednoducho tak, že vložíme jednu zátvorku do druhej. Z výrazu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1$$

tak vieme dostať

$$1-(1+1-(1+1)-(1+1)-\cdots-(1+1)) = 1-(1+1-1-1-1-1-\cdots-1-1) = 1-1-1+1+1+1+1+\cdots+1+1$$

Pri takomto vkladaní jednej zátvorky do druhej, nám vždy zostanú aspoň dve -1. Prvej -1 vo výraze nemôžeme zmeniť znamienko, lebo skôr vo výraze žiadne mínus nie je. Druhej -1 znamienko môžeme zmeniť na $+$, ale potom dostaneme -1 z predchádzajúcej $+1$.
Takýmto spôsobom teda vieme meniť znamienka na plus. Okrem dvoch -1 a prvej jednotky, vieme všetky ostatné jednotky ktorých je 2012, zmeniť na $+1$. Budeme mať teda 2013-krát $+1$, a dvakrát -1, čo je dokopy 2011. Väčší súčet zase dostať nemôžeme, lebo všetky znamienka, ktoré sme mohli, sme zmenili na $+$.
Tým že budeme znova vždy jednu $+1$ meniť na -1, a potom ju aj s -1 ktorá bola pred ňou zmeníme na $+1$, vieme dostať akýkoľvek nepárny súčet medzi 1 a 2011. No a koľko je nepárnych súčtov medzi -2013 a 2011 už vieme vyrátať: $(2012/2) + 1 + (2010/2) + 1 = 1007 + 1006 = 2013$. Ketrin vie teda pridávaním zátvoriek do pôvodného výrazu dostať 2013 rôznych súčtov.

<u>Komentár:</u> Na začiatku sme nerozoberali podrobne všetky spôsoby, ako môže Ketrin do výrazu pridávať zátvorky. Môže ich totižto rôznymi spôsobmi do seba vkladať. Pri rozbore všetkých spôsobov zátvorkovania môžeme ľahko na nejaké prípady zabudnúť (samozrejme, dá sa to spraviť poriadne). Preto sme rozobrali len niektoré prípady, aby sme sa s príkladom lepšie zoznámili. To, že žiadne iné súčty Ketrin nemohla dostať sme vedeli ľahko zdôvodniť aj bez úplného rozboru zátvorkovania.

<u>Úloha č. 4:</u> *Ľudka si vyrába „koleso" šťastia v tvare pravidelného p-uholníka, kde p je prvočíslo väčšie ako 2. Má k dispozícií N rôznych farieb, ktorými chce ofarbiť p jeho vrcholov (farby sa môžu aj opakovať). Koľkými spôsobmi ich vie Ľudka ofarbiť, ak ofarbenia, ktoré sa dajú na seba otočiť považujeme za rovnaké.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Ľudka a Hago)
Ľudka s Hagom sa dohodli, že sa pri opravovaní tohto príkladu stretnú na intrákoch. Hago by bez kompasu na miesto netrafil a kým ho Ľudka čakala, žuvala žuvačku. Keď konečne dorazil, pochválil sa kolesom šťastia, ktoré si vyrobil. Ľudke od údivu nad tým, že jeho koleso vyzerá presne rovnako ako to jej, vypadla žuvačka a Hago jej (ako pravý gentleman) podal novú žuvačku takou rýchlosťou, že mu vypadlo koleso šťastia z ruky a prilepilo sa Ľudkinou žuvačkou naveky k zemi.
Ľudka vytiahla svoje koleso a položila ho na to Hagovo tak, aby boli rovnaké farby na sebe. Hago sa jej opýtal, koľko existuje rôznych otočení jej kolesa, ktoré farebne pasujú s tým jeho. Okamžite vyprskla ako odpoveď číslo k, pričom vypľula žuvačku na jeden z vrcholov svojho kolesa. Hago si všimol, že tento vrchol ukazuje na východ, a tak na jeho počesť nazvali túto pozíciu Ľudkinho kolesa východiskovou pozíciou.
Hagovi sa Ľudkina rýchla odpoveď nezdala, a preto sa ju pokúsil overiť. Po chvíli otáčania Ľudkiným kolesom si zaznačil na svojom kolese vrcholy, nad ktorými sa pri farebne konzistentých pozíciach nachádzal žuvačkový vrchol, a čuduj sa svete, bolo ich presne k.
Smutný, že Ľudka mala pravdu, vrátil koleso do východiskovej pozície a začal ním otáčať v smere hodinových ručičiek. Keď sa prvýkrát dostal žuvačkovým vrcholom nad vyznačený vrchol (čo je to isté ako, že sa prvýkrát

kolesá farebne zhodujú), zapísal si, že kolesom musel otočiť o l vrcholov. Už-už sa chystal otáčať kolesom ďalej, keď ho Ľudka zastavila a povedala mu, že nakoľko kolesá zasa farebne sedia, tak vrchol smerujúci teraz na východ je na tom úplne rovnako, ako na tom bol žuvačkový vrchol vo východiskovej pozícii pred otáčaním kolesa. Hago sa opýtal, či to znamená, že najbližšia pozícia, pri ktorej sa budú kolesá zhodovať (resp. bude žuvačkový vrchol nad vyznačeným vrcholom), nastane presne po otočení o ďalších l vrcholov. Ľudka prikývla.
Hago teda smelo potočil kolesom zasa o l vrcholov v smere hodinových ručičiek. Vrchol smerujúci na východ bol na tom zasa rovnako, a tak Hago posmelený minulými úvahami zopakoval točenie o l vrcholov. Takto ho opakoval, až kým… až kým sa žuvačkový vrchol neobjavil nad vyznačeným vrcholom, nad ktorým sa už niekedy objavil. To sa určite niekedy stane, lebo vrcholov je obmedzene veľa.
Hagovi s Ľudkou sa vpodstate podarilo zistiť, že Hagovo koleso má k vyznačených vrcholov a dva susedné sú vzdialené vždy o l vrcholov. Dokopy máme p vrcholov, takže musí platiť, že $k \cdot l = p$. Keďže p je prvočíslo, tak sa bude k rovnať buď 1 alebo p.
Vyskúšajme si teraz zvoliť postupne všetky vrcholy Ľudkinho kolesa za žuvačkové a sledujme, aké dostaneme k. Môžu sa stať vpodstate dve veci.

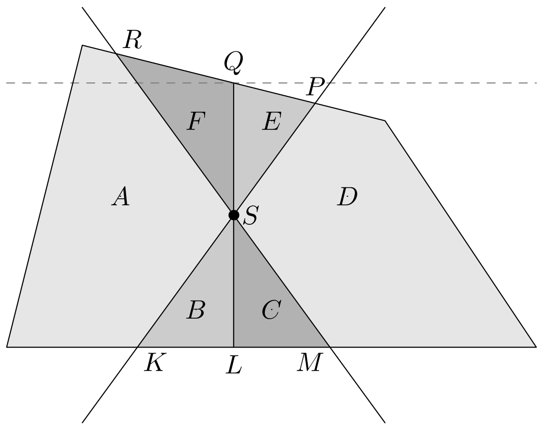
1. Aspoň raz dostaneme $k = p$. Vtedy sú všetky vrcholy Hagovho kolesa vyznačené a všetky vyznačené vrcholy musia mať rovnakú farbu ako žuvačkový vrchol. Koleso bude teda pozostávať z vrcholov rovnakej farby.
2. Vždy dostaneme $k = 1$. To znamená, že žiadne dve otočenia kolesa nevyzerajú farebne rovnako.

Máme teda iba dva druhy kolies — jednofarebné a také, pre ktoré všetkých ich p otočení vyzerá rôzne. Jednofarebných je presne N, to je jasné ako facka. Ako ale spočítať tie zvyšné? Začnime s nenafarbeným kolesom, ktorému na jeden vrchol prilepíme žuvačku. Tento vrchol ofarbime ako prvý a potom postupne ofarbujme ďalšie vrcholy v smere hodinových ručičiek. Takto sme ofarbili p vrcholov a pri každom sme sa rozhodovali medzi N farbami, máme teda N^p možností. Zarátali sme tam ale aj tie jednofarebné, tak ich musíme odrátať. Okrem toho sme každé započítali p-krát — raz pre každé z jeho rôznych otočení. Je ich teda $(N^p - N)/p$. Rôznych ofarbení kolies exituje dohromady

$$N + \frac{N^p - N}{p}.$$

Úloha č. 5: *Vodka našiel štvoruholník, v ktorom existuje taký bod, že ľubovoľná priamka prechádzajúca týmto bodom rozdelí tento štvoruholník na dve časti s rovnakým obsahom. Podľa Hopka to nemôže byť len taký hocijaký štvoruholník. Dokážte, že takýto štvoruholník musí byť rovnobežník.*

Riešenie: (opravovali Kika a JeFo)
Máme štvoruholník a v ňom bod, pre ktorý platia podmienky zo zadania. Najskôr ukážeme, že takýto bod je najviac jeden. Čo ak by boli dva? Cez každý z nich viem viesť ľubovoľnú priamku takú, že štvoruholník rozdelia na dve časti s rovnakým obsahom. Ak by sme týmito bodmi viedli rovnobežné priamky (dve priamky, nie jednu prechádzajúcu oboma bodmi), tak by mi medzi nimi vznikla oblasť, ktorej obsah je nenulový, čo je spor (rozmyslite si).
Veďme naším bodom S tri rôzne priamky a to také priamky, že ich prieniky so stranami ležia práve na dvoch stranách štvoruholníka (rozdeľujú štvoruholník na 2 päťuholníky a 4 trojuholníky, viď obrázok).



Označme prieniky priamok a strán K, L, M a P, Q, R a oblasti si označme A, B, C, D, E a F (rovnako aj ich obsahy). Potom $A+B+C = D+E+F$, taktiež $A+B+F = C+D+E$ a aj $A+F+E = B+C+D$. Aby tieto tri rovnosti boli splnené súčasne, tak musí platiť $A = D$, $B = E$ a $C = F$. Zvoľme tri priamky tak aby $B = C$ (t.j. $|KL| = |LM|$). Keďže $B = E$, $C = F$ a aj $B = C$, tak musí platiť, že $F = E$.

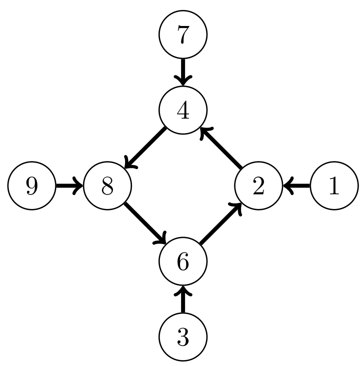
Ak sú strany štvoruholníka (tie s ktorými majú naše priamky prieniky) rôznobežné, tak $|PQ| \neq |QR|$ (aby to bolo pekne vidieť, tak skúste dokresliť rovnobežku s $\overleftrightarrow{KL}$). Avšak výšky oboch trojuholníkov sú rovnaké (vzdialenosť strany od S), teda $E \neq F$. Čo je spor. Teda musia byť rovnobežné.
V rovnobežníku uvažujme ako bod S priesečník uhlopriečok. Je zrejmé, že S je stred súmernosti, takže ľubovoľná priamka prechádzajúca týmto bodom rozdelí rovnobežník na dve zhodné časti s rovnakým obsahom.
Iné riešenie:
Vychádzajme z rovnakého delenia ako v predchádzajúcom prípade (štvoruholník rozdelený na 2 päťuholníky a 4 trojuholníky). Obsah trojuholníka viem vypočítať ako

$$S_{\triangle} = 1/2ab\sin\gamma,$$

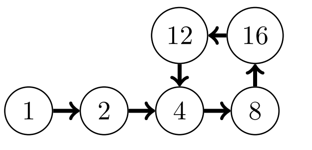
kde $\sphericalangle\gamma$ je uhol ktorý zvierajú strany a a b. Obsah $\triangle KMS$ viem vypočítať ako $|KS|\cdot|SM|\cdot\sin\sphericalangle KSM$. Podobne obsah $\triangle PRS$ viem vypočítať ako $|PS|\cdot|SR|\cdot\sin\sphericalangle PSR$. Aby obsah $\triangle KMS$ bol rovnaký ako obsah $\triangle PRS$. Uhol KSM a uhol PSR sú vrcholové, teda majú rovnakú veľkosť. Musí teda platiť $|KS|\cdot|MS| = |PS|\cdot|RS|$. Podobne vieme pre $\triangle KLS$ a $\triangle PQS$ rovnosť $|KS|\cdot|LS| = |PS|\cdot|QS|$ a pre trojuholníky $\triangle MLS$ a $\triangle RQS$ rovnosť $|LS|\cdot|MS| = |QS|\cdot|RS|$. Ľahko vieme dopočítať, že tieto tri rovnice sú splnené len vtedy keď $|KS| = |PS|$, $|LS| = |QS|$ a $|MS| = |RS|$. Podobne viem dokázať pre ľubovoľnú úsečku deliacu štvoruholníka na dve časti s rovnakým obsahom, že bod S ju rozpoľuje. Toto je splnené len ak je štvoruholník rovnobežníkom (ak mám danú stranu a bod S, tak stredovou súmernosťou podľa bodu S, dostanem rovnobežnú druhú stranu, rovnako aj pre zvyšné dve strany).

Úloha č. 6: *Maťo si vytvoril postupnosť prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nasledovným spôsobom: zvolil si najprv prirodzené číslo a_1 a ďalšie členy postupnosti určil podľa vzťahu $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je posledná cifra čísla a_n, pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že Maťova postupnosť obsahuje nekonečne veľa celočíselných mocnín dvojky práve vtedy, keď a_1 nie je deliteľné piatimi.*

Riešenie: (opravoval Luxusko, Zajo)
Začnime tou jednoduchšou časťou, na ktorú väčšina z vás prišla. Ak je číslo deliteľné piatimi, končí na 0, alebo na 5. V prvom prípade bude každý ďalší člen postupnosti rovnaký (lebo b_n bude 0). V druhom, bude zase hneď ďalší člen postupnosti končiť na 0 a teda zvyšné členy budú rovnaké. Takéto postupnosti teda neobsahujú nekonečne veľa mocnín dvojky, dokonca ani nekonečne veľa rôznych čísel.
Zaoberajme sa už len prípadom, že a_1 nekončí na $0,\ 5$. Po chvíli hrania sa dá všimnúť, že posledná cifra sa v postupnosti a_n „zacyklí“:



Z ľubovoľnej poslednej cifry sa preto dostaneme do stavu, kedy sa bude posledná cifra čísel v postupnosti opakovať $(2 \to 4 \to 8 \to 6 \to ..)$. Súčet čísel v cykle je 20. Keďže čísla v cykle sú práve tie čísla, ktoré pripočítavame, tak ak postupnosť a_n (pre $n \geq 2$) tak obsahuje číslo x, tak obsahuje aj číslo $x + 20$. Nech x má zvyšok k po delení 20. Postupnosť a_n bude zrejeme obsahovať všetky čísla väčšie ako x, ktoré dávaju zvyšok k po delení 20.
Ak bude zároveň nekonečne veľa mocnín dvojky, čo dávajú zvyšok k po delení 20, tak ich bude aj postupnosť a_n obsahovať nekonečne veľa (ale nie všetky, napríklad menšie ako a_1 tam nebudú).
Pozrime sa preto na zvyšky mocnín dvojky po delení 20. Dostávame podobný cyklus a to:



Tým pádom existuje nekonečne veľa mocnín dvojky zo zvyškami $4,\ 8,\ 16,\ 12$ po delení 20.
Ostáva nám iba ukázať, že a_n vždy obsahuje aspoň jeden zo zvyškov $\{4, 8, 16, 12\}$ po delení 20. Vyššie sme už ukázali, že a_n vždy obsahuje postupnosť zvyškov $2,\ 4,\ 8,\ 6$ po delení 10. Ak nás zaujímajú zvyšky po delení 20, máme dve možnosti (premyslite si):

- Zvyšok 2 po delení 10 bude zvyškom 2 po delení 20. V a_n sa teda budú opakovať tieto zvyšky po delení 20: $\{2, 4, 8, 16\}$. Teda v a_n sa nachádza číslo so zvyškom 4 po delení 20.
- Zvyšok 2 po delení 10 bude zvyškom 12 po delení 20. V a_n sa teda budú opakovať tieto zvyšky po delení 20: $\{12, 14, 18, 6\}$. Teda v a_n sa nachádza číslo so zvyškom 12 po delení 20.

V oboch prípadoch sme v a_n našli nejaký zvyšok mocnín dvojky po delení 20, preto sa v postupnosti a_n nachádza nekonečne veľa mocnín dvojky.

<u>Úloha č. 7:</u> *Mojo našiel v školskom sklade tabuľku $n \times n$. Na každom políčku tabuľky bola lampa. Na začiatku boli všetky lampy vypnuté. Potom sa s ňou Mojo začal hrať. V každom ťahu si vybral v riadku alebo stĺpci m po sebe idúcich lámp a zmenil stav týchto lámp (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Dokážte, že stav, v ktorom sú všetky lampy zapnuté, vie Mojo dosiahnuť práve vtedy, keď číslo m je deliteľom čísla n.*

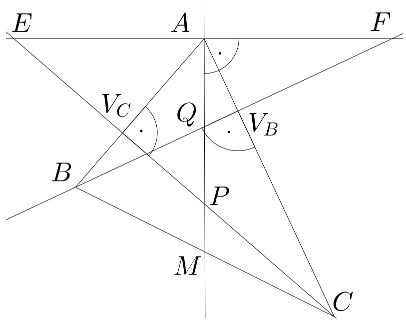
<u>Riešenie:</u> (opravovala Vodka)
Začneme tým, že v prípade, že m delí n, sa všetky lampy dajú prepnúť. Stačí tabuľku rozdeliť po riadkoch (alebo po stĺpoch) na obdĺžničky $m \times 1$ a postupne v každom z nich prepnúť lampy.
Dokázať, že inak sa to nedá je troška zložitejšie. Pri takýchto úlohách, je často dobré zobrať na pomoc farbičky a tabuľku si ofarbiť. Tým z vás, ktorí farbičky (tak ako my) nemajú nezostáva nič iné, len si označiť farby číslami. Kľúčová otázka je, ako to ofarbiť. Náhodné ofarbenie by totiž veľmi nepomohlo. Ideálne by to bolo tak, aby sa pri každom prepnutí lámp, zmenilo z každej farby stále rovnako veľa lámp. Jeden (a asi najjednoduchší) spôsob ako to dosiahnuť je, že to ofarbíme m farbami tak, aby v každom obdĺžniku $m \times 1$ bola každá farba práve raz. To ľahko dosiahneme tak, že to zafarbíme po uhlopriečkach. Teda ľavé horné políčko zafarbíme farbou 1, políčka na susednej 2-políčkovej uhlopriečke farbou 2 na ďalšej farbou 3 atď.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Keď to náhodou chcete rozumne zapísať, tak políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci zafarbíte takou farbou, ktorá dáva rovnaký zvyšok po delení m ako $i + j - 1$.
Teraz si všimneme, že na začiatku je na políčkach každej farby 0 zapnutých lámp. V každom ťahu sa prepne práve jedno políčok z každej farby, čo znamená, že sa zmení parita počtu zapnutých lámp každej farby. Na konci majú byť zapnuté všetky lampy. To znamená, že ak v celom štvorci $n \times n$ je z nejakej farby párne veľa políčok a z inej nepárne, tak sa to zrejme nebude dať, keďže počas celého nášho prepínania, budú mať počty zapnutých lámp na políčkach každej farby rovnakú paritu. Ostáva ná už len nájsť tie 2 farby.
Nech $n = km + r$, kde k je celé nezáporné a $0 < r < m$ je celé. Potom zrejme v dolnom obdĺžniku $km \times n$ a v pravom hornom $r \times km$ sú všetky rovnako veľakrát (presnejšie $k(n + r)$-krát), keďže sa dajú rozdeliť na obdĺžniky $m \times 1$. Ostal len horný štvorec $r \times r$. V ňom sa farba r nachádza len na hlavnej uhlopriečke (keďže $2r - 1 < r + m$) a teda je tam r-krát. Farba $(r + 1)$ sa nachádza len uhlopriečke pod hlavnou (lebo $2r - 1 < r + m - 1$) a teda je tam $(r - 1)$-krát. Tí pozorní z vás si všimli, že pri tom ako som hovoril o uhlopriečke pod hlavnou som akosi predpokladal $r > 1$, no záver platí aj pre $r = 1$.
No, ale to znamená, že farby r je tam o 1 viac ako farby $r + 1$, a preto majú počty políčok týchto farieb rôznu paritu. A my už vieme, že to znamená to, že sa všetky lampy nedajú zapnúť.

<u>Úloha č. 8:</u> *Po namáhavom tréningu u mudrca čaká Joža posledná skúška. V ostrouhlom trojuholníku ABC je M stred strany BC. Kolmica na úsečku AM prechádzajúca bodom A pretína priamky, na ktorých ležia výšky na strany AB, AC v bodoch E, F. Dokážte, že trojuholník EFM je rovnoramenný.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Hopík)
Na začiatok si označme body nespomenuté v zadaní ako na obrázku (na ďalšej strane). Po chvíľke hrania sa s úlohou zistíme, že nevieme ako uchopiť bod M. Totiž so stredom strany sa nepracuje úplne dobre, lebo nevieme jednoducho vyjadriť uhly okolo neho len pomocou vnútorných uhlov v trojuholníku ABC (skúste si to ak ste to neskúšali). V takýchto prípadoch je zväčša vhodné úlohu si čo najviac zjednodušiť, a až následne využiť vedomosť o tom, že M je stred BC.
Úlohou je dokázať, že trojuholník EFM je rovnoramenný. Ktoré dve strany môžu byť jeho ramená? Nakoľko je obrázok v istom zmysle symetrický vzhľadom na B, C, tak najviac dáva zmysel dokazovať, že $|EM| = |FM|$. To je ale ekvivalentné s dokazovaním, že $|EA| = |FA|$ (a druhá rovnosť vyzerá priateľnejšie).



Všeobecne v geometrických úlohách sa často oplatí hľadať podobnosti trojuholníkov. V našom prípade máme na obrázku 3 pravé uhly, čo napovedá, že by sa tam nejaké podobnosti mohli nájsť. A naozaj – trojuholníky FAQ a AV_BQ sú podobné (rozmyslite si). Analogicky aj trojuholníky EAP a AV_CP sú podobné. Všimnime si, že vďaka tejto podobnosti si vieme „presunúť" dĺžky $|AF|$ a $|AE|$ dovnútra trojuholníka ABC a zjednodušiť si tak náš obrázok (kolmicu na AM už vôbec nebudeme potrebovať). Vyjadrime si teda $|AF|$ a $|AE|$ pomocou dĺžok z trojuholníka:

$$|AF| = |AV_B| \cdot \frac{|AQ|}{|QV_B|},$$

$$|EF| = |AV_C| \cdot \frac{|AP|}{|PV_C|}.$$

Takže by sme teda chceli dokázať nasledovnú rovnosť:

$$|AV_B| \cdot |AQ| \cdot |PV_C| = |AV_C| \cdot |AP| \cdot |QV_B|.$$

Obrázok sme si zjednodušili, no to, čo máme dokázať je teraz komplikovanejšie ako na začiatku. Preto by sme si to chceli nejak zjednodušiť. Kde sú pomery (alebo kde sa pracuje s dĺžkami), tam sa často oplatí hľadať podobné trojuholníky. Po označení zopár uhlov nám vyjde, že trojuholníky ABC a AV_BV_C sú navzájom podobné (premyslite si). Preto

$$\frac{|AV_B|}{|AV_C|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

teda nám stačí dokázať, že

$$|AB| \cdot |AQ| \cdot |PV_C| = |AC| \cdot |AP| \cdot |QV_B|.$$

Pozrime sa na to, čo sme dostali. Na ľavej strane je výraz $|AB| \cdot |PV_C|$. Keď sa pozrieme na obrázok, vidíme, že je to dvojnásobok obsahu trojuholníka ABQ. Podobnú úvahu vieme spraviť aj s pravou stranou. Teda nám staží dokázať, že

$$S_{ABP} \cdot |AQ| = S_{ACQ} \cdot |AP|.$$

V tejto rovnici sa násobí obsah jedného trojuholníka s dĺžkou strany druhého a naopak. Preto dáva zmysel predeliť rovnicu týmito dĺžkami:

$$\frac{S_{ABP}}{|AP|} = \frac{S_{ABQ}}{|AQ|},$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{B}, \overleftrightarrow{AM}) = \mathrm{d}(\mathrm{C}, \overleftrightarrow{AM}).^2$$

Dokázať poslednú rovnosť už nie je žiaden problém, stačí len využiť, že M je stred BC. Dokázali sme teda, že trojuholník EFM je rovnoramenný.

Iné riešenie:

Najprv by som vás chcel upozorniť, že sa v tomto riešení viac vysvetľuje všeobecný postup riešenia, ktorý bol použitý na našu úlohe. Preto sa nenechajte odradiť dĺžkou textu a určite si ho prečítajte, garantujem vám, že vás to obohatí.

V tejto úlohe sa vyskytuje veľa pravých uhlov a stred strany. To naznačuje, že by úlohu šlo vyriešiť analyticky. Skúsme si to.

Najdôležitejší krok analytického riešenia je vhodne si zvoliť stred súradnicovej sústavy a súradnicové osi. Týmto krokom vieme často namiesto „upočítania sa k smrti" dospieť k výsledku za krátku chvíľu. Vo všeobecnosti neexistuje univerzálny postup, akým to spraviť. Je však pár vlastností, ktoré by naša súradnicová sústava mohla spĺňať:

[2] $\mathrm{d}(\mathrm{B}, \overleftrightarrow{AM})$ označuje vzdialenosť bodu B od priamky AM

- Stred súradnicovej sústavy je „preťažený bod“ – bod, z ktorého ide veľa čiar. Týmpádom sa nám bude ľahšie pracovať s dôležitým bodom.
- Zo stredu idú dve navzájom kolmé priamky, z ktorých si spravíme súradnicové osi. Teda máme veľmi jednoducho vyjadrené dve priamky.
- Súradnicová sústava zachová čo najviac symetrií z obrázku. Vždy sa lepšie ráta, ak nám stačí spraviť len polovicu práce a druhú dostať priamo zo symetrie.
- To, čo máme dokázať sa dá vyjadriť relatívne jednoduchou podmienkou (analytickou).

Keď chceme splniť čo najviac podmienok vyššie, núka sa nám zvoliť si za stred bod A, a za súradnicové osi priamky AM, EF. Takáto sústava spĺňa všetky vymenované vlastnosti. Môžme si všimnúť, že namiesto dokazovania $|EM|=|FM|$ stačí dokázať, že body E a F majú až na znamienko rovnakú nenulovú súradnicu.
Pred samotným počítaním je fajn prejsť si krok za krokom ako budeme vyjadrovať body, a zistiť, či je náš postup „upočítateľný“. V prvom kroku si zvolíme všeobecne súradnice bodov B, C. Chceli by sme vyjadriť bod F. Vieme, že F leží na kolmici na AC cez B a že jeho jedna súradnica je 0. Kolmý vektor na AC nieje problém vyjadriť, preto je vyrátanie súradníc bodu F „bezbolestné“. Analogicky zrátame súradnice E. Využijúc podmienku, že stred BC leží na súradnicovej osi by sme mali dostať výsledok – body E a F majú až na znamienko rovnakú nenulovú súradnicu. Úloha by sa analyticky dať jednoducho vyriešiť, pusťme sa teda do toho.

Súradnice bodu A sú $[0,0]$, ako vodorovnú os vezmime EF. Označme si súradnice B ako $[b_1,b_2]$, súradnice C ako $[c_1,c_2]$. Vektor kolmý na AC je vektor kolmý na $C-A=[c_1,c_2]$, čo je $c^\perp=[c_2,-c_1]$. Bod F vieme vyjadriť nasledovne: $F=B+k\cdot c^\perp$ pre nejaké k. Keďže má byť druhá súradnica bodu F rovná nule, ľahko nahliadneme, že $k=\frac{b_2}{c_1}$. Z toho vieme dorátať súradnice bodu F:$[b_1+\frac{1}{c_1}c_2b_2,0]$. Teraz využijeme symetriu: súradnice budu E budú analogicky $[c_1+\frac{1}{b_1}b_2c_2,0]$. Chceli by sme dokázať, že

$$b_1+\frac{c_2b_2}{c_1}=-c_1-\frac{b_2c_2}{b_1},$$

čo využití podmienky $b_1=-c_1$ (stred BC leží na zvislej súradnicovej osi) hneď vyjde.
Môžte si skúsiť úlohu zrátať, ak by sme stred sústavy dali napríklad do bodu B. Je možné, že vám to vyjde tiež, no určite vám to bude trvať oveľa dlhšie ako vo vyššie spomenutom postupe.

Úloha č. 9: *Hago má doma červený koberec v tvare rovnostranného trojuholníka s obsahom* 1. *Keďže červená farba už vyšla z módy, rozhodol sa, že ho zakryje zelenými kobercami (môžu sa aj prekrývať). Dodávateľ mu však vie poskytnúť len* 5 *menších zelených kobercov tvaru rovnostranného trojuholníka so súčtom obsahov S (ich obsahy však môžu byť rôzne). Určte najmenšie reálne číslo S, pre ktoré dokáže Hago s istotou zakryť svoj starý koberec bez ohľadu na jednotlivé rozmery dodaných kobercov.*

Riešenie: (opravoval Mišo)
Táto úloha je jedna z tých, ktoré sa veľmi ťažko spisujú. To je hlavným dôvodom, prečo nikto neposlal bezchybné riešenie.
Po chvíli hrania sa s trojuholníkmi zistíme, že červený koberec vieme zakryť ak súčet obsahov zelených je aspoň 2. Najprv si ukážeme, prečo menej nestačí. Väčšina aj prišla na to, že to nejde ak máme 2 trojuholníky, ktorých obsah je skoro 1 a zvyšné tri maličké, ale nikto to nezvládol dokázať. Najčastejšou chybou bol predpoklad, že najväčšie zelené trojuholníky budú v rohoch. Ak však chceme ukázať, že sa to nedá, musíme to ukázať pre všetky možné rozostavenia trojuholníkov, nie len pre tie kde sú najväčšie v rohoch.
Chceme teda ukázať, že ak máme súčet obsahov S, pričom $S<2$, tak vieme nájsť päticu trojuholníkov, ktorých súčet obsahov je S a nevieme s nimi pokryť celý červený koberec.
Zoberme si teda dva trojuholníky s obsahmi $1-\epsilon$ a tri menšie s rovnakými obsahmi. V závislosti od S neskôr ϵ upresníme. Zameriame sa na rohy červeného koberca. Vidíme, že žiaden trojuholník nedočiahne na dva rohy naraz. No nedočiahne ani na dva trojuholníky s obsahom

$$S_1=\frac{1-\sqrt{1-\epsilon}}{2}$$

umiestnené v rohoch. Sú od seba totiž vzdialené presne toľko, aká je dlhá strana väčších trojuholníkov. Ani jeden väčší nevie (ani zčasti) prekryť dva trojuholníky v rohoch, po uložení najväčších trojuholníkov teda ostane aspoň jeden nepokrytý. Teraz už stačí, aby mal väčší obsah ako zvyšné tri zelené trojuholníky a nebude sa dať nimi pokryť. Podľa tohto zvolíme ϵ.
Trojuholník v rohu má obsah S_1 a chceli by sme, aby bol väčší ako súčet obsahov menších trojuholníkov, z ktorých každý má obsah $\frac{1}{3}(S-2(1-\epsilon))$. Keď si to sčítame a porovnáme, zistíme, že stačí aby bolo ϵ menšie ako $1-\frac{1}{2}S$ (čo je kladné číslo, lebo $S<2$).

Tým sme dokázali prvú časť, teda ak je súčet obsahov menší ako 2, tak nie vždy sa dá pokryť celý červený koberec. Pozrime sa teraz, či ho vieme pokryť ak $S = 2$. Týmto to vyriešime aj pre väčší súčet obsahov. Vždy si vieme totiž trojuholníky zmenšiť aby súčet obsahov bol 2, zakryť celý koberec a zväčšiť ich naspäť.
Najprv si všimnime, že ak umiestnime dva najväčšie trojuholníky do rôznych rohov červeného koberca tak, aby s ním mali rovnobežné strany, tak sa budú prekrývať. Ak má najväčší obsah aspoň 1, tak je to zrejmé a ak má menší ako 1, tak zvyšné 4 majú dohromady obsah viac ako 1. Najväčší z nich má preto obsah väčší než $\frac{1}{4}$ a má stranu dlhšiu ako polovica strany červeného trojuholníka. Keďže najväčší trojuholník má stranu aspoň takú dlhú, tak sa musia prekrývať.
Chceme ukázať, že ak do každého rohu postupne umiestnime najväčšie zelené trojuholníky, tak nepokrytá časť červeného (ak teda taká je) sa dá zakryť štvrtým trojuholníkom.
Rozdeľme si to na dva prípady. V prvej sa tretí najväčší pretína aj s druhým najväčším trojuholníkom. Pokiaľ už nie je pokrytý celý červený koberec, tak v strede ostala nepokrytá časť v tvare (rovnostranného) trojuholníka. Navyše sa tri najväčšie trojuholníky neprekrývajú na jednom mieste, sú najviac v dvoch vrstvách. Ak štvrtý najväčší trojuholník vie prekryť zostávajúcu časť, tak sme skončili. Potrebujeme ešte ukázať, že sa nemôže stať, že by ju neprekryl.
Ak by ju neprekryl, tak to znamená, že je menším trojuholníkom ako je nepokrytá časť v strede. Položme dva najmenšie trojuholníky na seba (najmenší je celý prekrytý) a oba položme do stredu tak, aby sa neprekrýval s ani jedným z najväčších trojuholníkov. Teraz spočítame ich obsahy. Vieme, že žiadne tri sa neprekrývajú v jednom mieste, všade sú najviac dve vrstvy. Navyše časť červeného koberca ostala nepokrytá. Preto súčet ich obsahov musí byť menej ako 2. Z toho vyplýva, že sa nemôže stať aby štvrtý najväčší trojuholník neprekryl zostávajúcu časť.
V druhom prípade sa tretí najväčší trojuholník a druhý najväčší trojuholník nepretnú. Ukážeme, že potom má najväčší trojuholník obsah 1 a sám všetko zakryje.
Kvôli tomu teraz spravíme malú odbočku. Ak má rovnostranný trojuholník stranu a, tak jeho obsah je:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin(60°) \implies \mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{S}}\frac{2}{\sqrt[4]{3}}.$$

Aby sme si to zjednodušili, zaveďme si nasledovnú konštantu:

$$c = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}.$$

Vidíme, že strana červeného koberca má dĺžku c. Označme si dĺžku strany druhého najväčšieho trojuholníka ako $b \cdot c$, pričom $b < 1$ a jeho obsah bude b^2. Tretí najväčší trojuholník nech má stranu $d \cdot c$, pričom $d < b$ a $b + d < 1$. Všimnite si, že $d < \frac{1}{2}$.
Najmenšie dva trojuholníky majú stranu najviac $d \cdot c$. Spočitajme teraz obsahy najmenších štyroch trojuholníkov:

$$b^2 + 3d^2 < (1 - d)^2 + 3d^2 = 1 - 2d + 4d^2 = 1 - 2d(1 - 2d) < 1$$

Súčet štyroch najmenších trojuholníkov je menej ako 1. Preto najväčší zelený koberec vie sám prekryť červený.
Týmto sme vyriešili aj posledný prípad a dokázali sme, že ak je súčet obsahov zelených kobercov aspoň 2, tak nimi vieme zakryť celý červený koverec.

<u>Úloha č. 10:</u> *Prirodzené číslo n sa nazýva šialené, ak existujú prirodzené čísla $a, b > 1$ také, že $a^b + b = n$. Zistite, či existuje* 2015 *po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých je práve* 2012 *šialených.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Cvrki)
Asi najťažšia časť tejto úlohy je začať. Ideme ukázať, že takých 2015 čísel existuje alebo neexistuje? Na prvý pohľad vidíme, že čísla tvaru $a^b + b$ sa môžu správať dosť divoko. Premenná b sa vyskytuje aj ako exponent a aj ako lineárny člen, navyše umocňujeme inú premennú a nezávisiacu od b. Celkovo to vyzerá tak, že je veľmi náročné o čísle dokázať, že nie je *šialené.* Pre malé prípady by to ešte ako tak šlo, no pre veľké čísla sme úplne bezradní. Zato konštruovať čísla, ktoré sú *šialené*, nie je náročné — stačí si zvoliť a a b. Skúsme teda ukázať, že takých 2015 čísel naozaj existuje.

Na začiatku sa vysporiadame s nasledujúcim problémom. Máme ukázať, že medzi 2015 číslami je *presne* 2012 *šialených* čísel. Nuž mohli by sme zvládnuť nájsť 2012 po sebe idúcich *šialených* čísel, ale ako sakra dokážeme, že naokolo sú tri čísla, ktoré nie sú *šialené.* Keď vezmeme do úvahy, že sa bude jednať o fakt obrovské čísla, tak to znie ako nemožná úloha. Skúsme sa preto s problémom popasovať ináč.
Použijeme veľmi jednoduchú, no o to netriviálnejšiu myšlienku. Položme si na začiatok nasledujúcu otázku: Ako sa nám môže zmeniť počet *šialených* čísel medzi 2015 po sebe idúcimi číslami, ak každé z týchto čísel zväčšíme o jedna (napr. medzi číslami $1, \ldots, 2015$ a $2, \ldots, 2016$)? Odpoveď je veľmi jednoduchá — o jedna alebo vôbec (premyslite si prečo). Medzi číslami $1, \ldots, 2015$ je najviac 2010 *šialených* čísel (najmenšie *šialené* číslo je $2^2 + 2 = 6$). Ak teraz nájdeme nejakú 2015-ticu za sebou idúcich čísel, ktorá obsahuje povedzme 2015 *šialených* čísel, tak medzi

prvou 2015-ticou (od 1 do 2015) a touto 2015-ticou určite bude 2015-tica s práve 2012 *šialenými* číslami, keďže $2010 < 2012 < 2015$ a počty *šialených* čísel medzi susednými 2015-ticami sa môžu meniť najviac o jedna (opäť si to premyslite).

Stačí nám teda nájsť 2015 po sebe idúcich šialených čísel $s_1, s_2, \dots, s_{2015}$, kde $s_i = a_i^{b_i} + b_i$. Ako sme už spomenuli, b vystupuje vrámci šialeného čísla aj ako lineárny člen, preto skúsme dosiahnuť zvyšovanie s_i o jedna tým, že budeme o 1 zvyšovať b_i. Pre jednoduchosť si ich zvoľme najmenšie ako vieme, teda $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, $\dots$, $b_{2015} = 2016$. Z toho dostávame $s_1 = a_1^2 + 2$, $s_2 = a_2^3 + 3$, $s_3 = a_3^4 + 4$, $s_4 = a_4^5 + 5$, $\dots$, $s_{2015} = a_{2015}^{2016} + 2016$. My chceme, aby s_i rástli o jedna, čo dosiahneme tým, že sa všetky nelineárne členy s a-čkom budú pre každé s_i rovnať, t.j.,

$$a_1^2 = a_2^3 = a_3^4 = \dots = a_{2015}^{2016} = A.$$

Hľadáme teda a_i tak, aby platila vrchná rovnosť. No môžeme sa na to pozrieť aj tak, že hľadáme A, ktoré je druhou, treťou, $\dots$, až 2015-tou mocninou prirodzeného čísla väčšieho než jedna. Takých čísel je neúrekom, napr. $2^{2015!}$, $1000^{2015!}$, $3^{\mathrm{nsn}(1,2,\dots,2015)}$, $\dots$. Zvoľme povedzme $A = 2^{2015!}$. Potom máme

$$s_i = a_i^{b_i} + b_i \text{ pre } \mathrm{i} = 1, \dots, 2015, \text{ kde } \mathrm{a_i} = 2^{\frac{2015!}{\mathrm{i}+1}} \text{ a } \mathrm{b_i} = \mathrm{i} + 1.$$

Teda sme dostali postupnosť 2015 za sebou idúcich *šialených* čísel. Z tohto a predchádzajúcich úvah už vyplýva platnosť tvrdenia zo zadania.

Komentár: Našou úlohou bolo dokázať (alebo vyvrátiť) existenciu vhodnej 2015-tice. Naše riešenie naozaj dokázalo iba existenciu, samotná konštrukcia by bola oveľa náročnejšia a bez silnej výpočtovej techniky priam nereálna.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Sásik Tomáš	2.	Gamča BA	4	9	9	9	9		7	9		45	90
2.	Csenger Géza	3.	GHS	3	9	7	9	7			9		41	71
3.	Sládek Samuel	4.	GAB NO	6			9	9	9	7			34	70
4.	Marko Alan	2.	GMRŠ NZ	4	9	7	6	9					31	67
5.	Hanzely Slavomír	4.	GJAR PO	8			9	8	6	6			29	65
6.	Hrmo Šimon	4.	GPár NR	4	5	2	6		9	7			29	62
7.	Mičko Juraj	3.	GPoš KE	6		9	9	2	2				22	57
7.	Murin Marek	4.	GJH BA	8			8	3	9		9		29	57
9.	Janeta Tomáš	2.	GAB NO	2		9	3		9				21	56
9.	Pajger Šimon	2.	GVO ZA	4		9	9	1	2	2			23	56
11.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1		3	9		6		9		27	54
11.	Sládeček Michal	3.	GVar ZA	5			9	9					18	54
13.	Dlugošová Michaela	2.	GKuk PP	4		2	9				9		20	50
14.	Pivoda Tomáš	3.	SJG KN	3	7	9	8						24	49
15.	Súkeník Peter	4.	GVO ZA	9			9		9		9		27	48
15.	Tóthová Andrea	4.	GJH BA	6		1	9	2		2			14	48
17.	Marčeková Katarína	4.	GJH BA	8			8	2	6		9		25	46
18.	Bodík Juro	4.	Gamča BA	9			6				9		15	44
18.	Molčan Samuel	4.	GJAR PO	8			9	3	6				18	44
20.	Vištanová Laura	3.	Gmaď KE	3		9	9	7	9		9		43	43
21.	Poljovka Jakub	2.	GPár NR	4		6	8						14	41
22.	Pišťák Daniel	4.	GChD Praha	7			8	8					16	40
23.	Drotár Pavol	3.	GPoš KE	5		4	9						13	39
24.	Mach Jakub	3.	GPoš KE	3			9						9	36
24.	Smolárová Paulína	2.	ŠPMNDG BA	4	0	3	9		1	2			15	36
24.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	3				9					9	36
27.	Kulla Filip	4.	BiG Sučany	8			8		9	3			20	35
28.	Ivan Peter	2.	GJH BA	4		3	4	2	0	0			9	34

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
28.	Kuťková Sára	2.	Gamča BA	4		9	9						18	34
28.	Žídek Matěj	4.	Frýdlant ČR	7			9						9	34
31.	Ralbovský Peter	4.	ŠPMNDG BA	8			6	6		2			14	33
32.	Švihorík Tomáš	2.	GPár NR	4	2	3	8	1					14	32
33.	Porubsky Michal	4.	GsvCM NR	6									0	29
34.	Bajnoková Natália	2.	GCSL BA	4			8				7		15	27
34.	Kopfová Lenka	1.	G Slez ČR	2									0	27
34.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	3	2	6			2				10	27
37.	Genči Jakub	3.	GPoš KE	5			9						9	26
38.	Kopf Daniel	4.	G Slez ČR	9									0	23
39.	Homola Marek	2.	GJH BA	4		2	4	2	0	0			8	21
39.	Choma Matej	4.	Gamča BA	7			9						9	21
41.	Onduš Peter	2.	GAlej KE	4									0	20
42.	Král Adam	4.	GVar ZA	6									0	18
43.	Parada Matej	2.	Gamča BA	4									0	16
43.	Vančo Šimon	4.	CGsvM SL	5									0	16
45.	Holčíková Sandra	1.	GCSL BA	1		9		1			5		15	15
45.	Kurimský Ján	4.	GsvMo	6									0	15
47.	Belan Pavol	2.	GVar ZA	4									0	14
48.	Pozsonyi Karol	1.	GBil BA	2	1	1		1	0				3	13
49.	Hanesz Zoltán	3.	GPoš KE	5			9						9	9
49.	Krajmerová Barbora	4.	G Šurany	6		3	3						6	9
49.	Molnár Maximilián	2.	EvSŠ LM	2				2	2				4	9
52.	Dendis Tomáš	5.	BiG Sučany	5									0	7
53.	Jarunek Maximilián	1.	GLN BA	1		1		0			0		1	1
54.	Dobrík Dušan	1.	GCSL BA	1						0			0	0
54.	Eller Peter	3.	GJH BA	4									0	0

kategória ALFA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	1	2	3	4	5	6	7	p	s	$\sum$
1.	Mišiak Dávid	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9	9	9		45	90
2.	Krajči Samuel	1.	GAlej KE	1	9	8	8		9	9			43	87
3.	Kollár Pavol	1.	Gamča BA	1	9	9	4	9		9			40	85
3.	Tódová Tereza	1.	GPár NR	1	9	9	8	5	4	9			40	85
5.	Poturnay Marián	1.	GPdC PN	1	9	9	9	9	3	4	5		41	83
6.	Klein Pavol	1.	GPdC PN	1	9	9	9	4		9			40	81
7.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1	9	9	4		3	9			34	76
8.	Brezinová Viktória	1.	GAlej KE	1	7	9	9		3	2			30	73
9.	Zubčák Matúš	1.	GPár NR	1	9	5	3		3	8			28	72
10.	Glevitzká Štefánia	1.	GVBN PD	1	9	9	8		3	2			31	70
10.	Hrmo Matej	1.	GPár NR	1	9	9		5	2	6			31	70
12.	Moško Matej	1.	Gamča BA	1	9	9	4		4	7			33	69
13.	Kopunec Matúš	2.	GĽŠ TN	2		9	9	4	3	9			34	68
13.	Winczer Tobiáš	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9			9			36	68
15.	Kalašová Martina	1.	GJH BA	1	9	9	9		5				32	67
16.	Cinová Tatiana	1.	GPár NR	1	9	9	4		1	1	2		25	66
16.	Královič Tomáš	1.	GPár NR	1	9	8	8			3	1		29	66
16.	Rosinsky Juraj	1.	I de Lancy	1	9	6	4			9			28	66
19.	Ďuračková Mária	1.	GJH BA	1	9	9	5	4			2		29	65
19.	Machalová Monika	1.	GJH BA	1	9	9	9			8			35	65
21.	Janeta Tomáš	2.	GAB NO	2		9	8		9	3			29	64
22.	Belák Tomáš	1.	GAV LV	1	7	8	5		2	3			25	63
22.	Molnár Michal	1.	Gamča BA	1	9	4	8			2	1		24	63

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
22.	Ondovčíková Lucia	1.	G Modra	1	9	9	6	0	3	6	1		33	63
25.	Benková Nina	1.	GPdC PN	1	9	8	3			7			27	61
25.	Findra Michal	1.	GDT PP	1	9	6	8		2	2			27	61
27.	Baláž Lukáš	1.	G Bánovce	1	9			9					18	60
27.	Csenger Géza	3.	GHS	3				9	7	9	7		32	60
29.	Kebis Pavol	1.	G PK	1	9	8	2	5	3	8	1		33	59
30.	Jóža Bohdan	1.	GJH BA	1	9	4	1			3	1		18	57
31.	Dujava Jonáš	1.	SPŠE Prešov	1	9			4	3	8			24	55
32.	Hečko Michal	1.	GPOH DK	1	9	4	3		3	3			22	53
33.	Pieš Dávid	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	8			3			29	51
34.	Studeničová Katarína	2.	GPOH DK	2		9	4	0	3	6	1		23	46
35.	Oravkin Richard	1.	1SG BA	1	9	6	3						18	45
35.	Števko Martin	1.	GAlej KE	1									0	45
37.	Galikova Kristina	1.	SúkG Česká	1	6	5	5				1		17	44
38.	Pivoda Tomáš	3.	SJG KN	3				7	9	8			24	42
39.	Pisoňová Karolína	1.	G Bánovce	1	9		4						13	40
40.	Číž Jozef	1.	GJH BA	1									0	38
41.	Portašiková Jasmína	1.	GVar ZA	1	9	1	1	0	2	3	2		17	37
42.	Lacko Dávid	1.	GPOH DK	1	8	5	2			1			16	36
42.	Rajníková Mária	3.	GĽŠ TN	3			8			4			12	36
44.	Kňaze Gabriel	1.	GJCh BR	1	9	7			3		2		21	31
44.	Molnár Maximilián	2.	EvSŠ LM	2		5	3				2		10	31
46.	Feketeová Viola	1.	GBST LC	1	7	1	1	0	2	0	1		12	30
46.	Izsóf Ottó	3.	SJG KN	3					9				9	30
48.	Barusová Ema	1.	GPár NR	1									0	28
48.	Miháľ Filip	1.	Gym RS	1									0	28
48.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	3			3	2	6				11	28
51.	Holčíková Sandra	1.	GCSL BA	1	9	4	4		9		1		27	27
51.	Mach Jakub	3.	GPoš KE	3						9			9	27
51.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	3							9		9	27
54.	Mráz Michal	1.	ŠPMNDG BA	1	9	3	6	4			4		26	26
55.	Majer Matúš	1.	ŠPMNDG BA	1	9	1	1	1					12	25
55.	Vištanová Laura	3.	Gmaď KE	3					9	9	7		25	25
57.	Častulíková Katarína	2.	1SG BA	3			2	0	2				4	21
57.	Pozsonyi Karol	1.	GBil BA	2			1	1	1		1		4	21
59.	Letovanec Ján	1.	Gamča BA	1									0	19
60.	Budaj Ľubor	2.	BiG Sučany	2									0	18
60.	Kopfová Lenka	1.	G Slez ČR	2									0	18
62.	Belejová Sára	2.	GPH MI	2					2		*		2	16
62.	Calvo Natália	1.	GPár NR	1	1	1			1		1		4	16
64.	Prokopová Tereza	1.	GJH BA	1	4	9	2						15	15
65.	Šánta Adam	1.	GJH BA	1	9		2			2			13	13
66.	Kubinec Ondrej	1.	G PK	1									0	11
67.	Dobrík Dušan	1.	GCSL BA	1	9		0						9	9
67.	Ghirbaková Karin	1.	Gamča BA	1	9								9	9
67.	Skala Daniel	1.	GCSL BA	1									0	9
67.	Skopalová Katarína	2.	GPH MI	2									0	9
71.	Jakubíková Hana	1.	GCSL BA	1									0	7
71.	Novota Matej	1.	SŠsvFA	1									0	7
71.	Sadovská Jana	2.	ŠPMNDG BA	3					3	2	2		7	7
74.	Jarunek Maximilián	1.	GLN BA	1	1	0	0		1		0		2	5
74.	Kurimský František	2.	GsvM PO	2									0	5
76.	Beňo Roman	3.	GJH BA	3									0	0
76.	Čičová Katarína	3.	GMRŠ NM	3									0	0

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
76.	Ďurina Marián	2.	G Šurany	2									0	0
76.	Kissová Dominika	1.	G Šurany	1									0	0
76.	Novosedliaková Lea	3.	GJL MT	3									0	0
76.	Porges Eduard	2.	GJH BA	2									0	0
76.	Sadovská Jana	2.	ŠPMNDG BA	2									0	0
76.	Stroka Martin	2.	GŠkol PB	2									0	0
76.	Tóthová Natália	2.	GAlej KE	3									0	0
76.	Valová Alena	3.	GJL MT	3									0	0