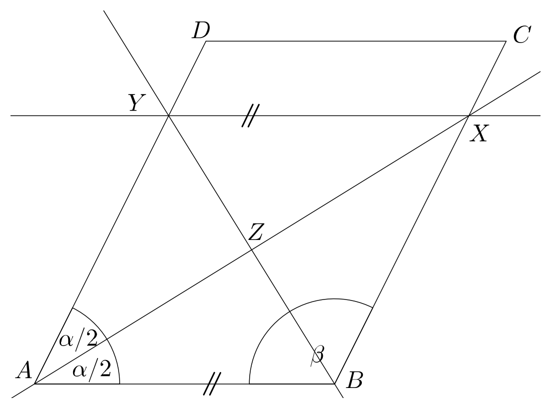
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2015/2016

Úloha č. 1: *Ajka sa cez prestávku nudila, tak si nakreslila rovnobežník $ABCD$. Spravila os uhla DAB a jej priesečník s priamkou BC označila X. Potom spravila rovnobežku so stranou AB prechádzajúcu bodom X a jej priesečník s priamkou AD označila Y. Dokážte, že os uhla ABC prechádza bodom Y.*

Riešenie: (opravoval Mojo)



Rovnobežník má dva protiľahlé uhly zhodné. Označme si ten pri vrchole A ako α a ten pri vrchole B ako β. Keďže súčet vnútorných uhlov štvoruholníka je $360°$, tak $2|\alpha| + 2|\beta| = 360°$. Potom však aj $\alpha + \beta = 180°$.

Pozrime sa teraz bližšie na trojuholník ABX. Keďže AX je os uhla α, tak $|\sphericalangle XAD| = \alpha/2$. A teda veľkosť uhla AXB spočítame ako $180° - |\alpha|/2 - |\beta| = |\alpha|/2$. Keďže uhly pri vrcholoch A a X sú zhodné, tak trojuholník ABX je rovnoramenný, a teda platí $|AB| = |BX|$.

Analogicky môžeme postupovať pri trojuholníku AXY. Stačí si uvedomiť, že kvôli rovnobežnosti AB a XY musí byť aj uhol pri vrchole Y rovný β (rozmyslite si prečo).

A teda platí, že štvoruholník $ABXY$ je rovnobežník (lebo AB je rovnobežné s XY a zároveň BX je rovnobežné s AY) a zároveň má všetky strany rovnaké. Tým pádom je kosoštvorec.

Priesečník jeho uhlopriečok si označme Z. O kosoštvorci vieme, že jeho uhlopriečky zvierajú pravý uhol. Keď si teraz porovnáme trojuholníky ABZ a BXZ, tak zistíme, že v každom je jeden uhol pravý a druhý rovný $|\alpha|/2$. To však znamená, že aj tretí uhol musia mať rovnaký, a teda $|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle ABZ| = |\sphericalangle XBZ| = |\sphericalangle XBY|$.

Tým sme ukázali, že uhlopriečka BY je osou uhla $\sphericalangle ABX$ a tým pádom aj uhla $\sphericalangle ABC$.

Úloha č. 2: *Miro našiel v pivnici 4 debničky, v ktorých bolo spolu 24 jabĺk. Tvrdí, že mu stačí zjesť najviac 12 jabĺk tak, aby aspoň v troch debničkách ostalo rovnako veľa jabĺk. Rozhodnite, či má Miro pravdu, ak*

a) niektoré debničky mohli byť na začiatku prázdne,

b) v každej debničke bolo na začiatku aspoň jedno jablko.

Riešenie: (opravovali Hanka a Palo)

Úloha sa dala riešiť rôznymi spôsobmi, jeden ponúkame tu, iný zase môžeš nájsť vo videovzoráku. Miro tvrdil, že nech sú jablká porozmiestňované v debničkách hocijako, vždy mu stáčí zjesť najviac 12 jabĺk tak, aby mal po jedení v 3 debničkách rovnako veľa. Poďme sa na to pozrieť. Na začiatok si spravíme poriadok. Zoradíme si počty jabĺk v debničkách od najmenšieho po najväčšie a označíme si ich a, b, c, d. Vieme, že $a \leq b \leq c \leq d$ a $a + b + c + d = 24$. Ak chceme dosiahnuť 3 debničky s rovnakým počtom jabĺk, rýchlo si uvedomíme, že:

- Neoplatí sa nám jesť zo vštkých štyroch debničiek. Totiž ak zjeme z každej debničky jedno jablko, je to to isté ako keby sme nezjedli nič.
- Ak si vyberieme tri „ujedacie“ debničky, tak sa na dosiahnutie rovnakých počtov neoplatí ujedať z tej s najmenším počtom jabĺk.
- Stačí sa sústrediť na trojice (a, b, c) a (b, c, d). Ak vieme zjesť z (a, c, d) najviac 12 jabĺk tak, aby v nich bolo rovnako veľa jabĺk, tak to vieme aj s trojicou (a, b, c).
- Aby sme v trojici (a, b, c) dosiahli v každej debničke rovnaký počet, musíme zjesť najmenej $(b - a) + (c - a)$ jabĺk.

- Aby sme to isté dosiahli v trojici (b, c, d), musíme zjesť $(c-b)+(d-b)$ jabĺk.

Máme už dosť dobrú intuíciu o príklade, pusťme sa do samotného riešenia.

a) Ak sme mali povolené aj prázdne debničky, nebolo ťažké prekuknúť Mirovu lož a nájsť také rozmiestnenie, kde nám zjedenie 12 jabĺk nestačilo. Stačilo si uvedomiť, že viac ako 1 prázdna debnička nám v hľadaní kontrapríkladu nepomôže (4 prázdne byť nemohli, pri 3 prázdnych sme nemuseli zjesť nič, pri 2 prázdnych muselo byť v jednej z debničiek najviac 12 jabĺk, ktoré potom stačilo zjesť). Ak sme mali jednu prázdnu, bolo jasné, že druhá najmenšia nemôže mať veľmi veľa jabĺk, lebo potom by boli medzi b, c, d malé rozdiely. Pre $b=2$ už vieme nájsť protipríklad, počty jabĺk v debničiek budú napríklad 0, 2, 11, 11. Iný protipríklad funguje pre $b=3$: 0, 3, 10, 11. Vidíme, že Miro pravdu v tomto prípade nemal.

b) Ak má Miro pravdu, tak pre ľubovoľné rozmiestnenie jabĺk musí určite platiť, že buď $(b-a)+(c-a) \leq 12$ alebo $(c-b)+(d-b) \leq 12$. Po pár pokusoch sa zdá, že to pôjde vždy. Treba to však poriadne dokázať. Poďme na to sporom. Skúsme nájsť rozmiestnenie, kde by sme museli ujesť aspoň 13 jabĺk z trojice $\{a,\ b,\ d\}$ a aj z trojice $(b,\ c,\ d)$. To znamená, že $b+c-2a \geq 13$ a $c+d-2b \geq 13$. Vďaka tomu, že žiadna nádoba nie je prázdna, platí $1 \leq a$ a teda $b+c \geq 15$, z čoho vyplýva, že $a+b+c \geq 16$. Z toho sa dá vidieť, že v najpočetnejšej debničke d môže byť najviac 8 jabĺk, lebo všetkých je 24. Vďaka tomu, že $b+c \geq 15$ vieme, že určite musí byť $c \geq 7$ (nie je ťažké rozmyslieť si prečo). Takže $7 \leq c \leq d \leq 8$. Z toho je jasné, že v krabiciach a, b musí byť dokopy aspoň 8 jabĺk a teda väčšie b, je aspoň 4. Preto $(c-b)+(d-b) = c+d-2b \leq 8+8-2\cdot 4 = 8$. To je však v spore s naším predpokladom, že $c+d-2b \geq 13$. S poľutovaním musíme konštatovať, že Miro má v tomto prípade pravdu.

<u>**Úloha č. 3:**</u> *Hago sa hrá nasledujúcu hru. Na začiatku si vyberie dve rôzne kladné celé čísla. Zistí najväčší spoločný deliteľ týchto čísel*[1] *a priráta ho k menšiemu. Dostane tak novú dvojicu čísel a pre ňu tento krok opäť zopakuje. Takto pokračuje, až kým nedostane dve rovnaké čísla. Existuje dvojica čísel, pre ktorú by sa Hago mohol hrať stále, t.j. dvojica, pre ktorú sa nikdy nedostane k dvojici rovnakých čísel?*

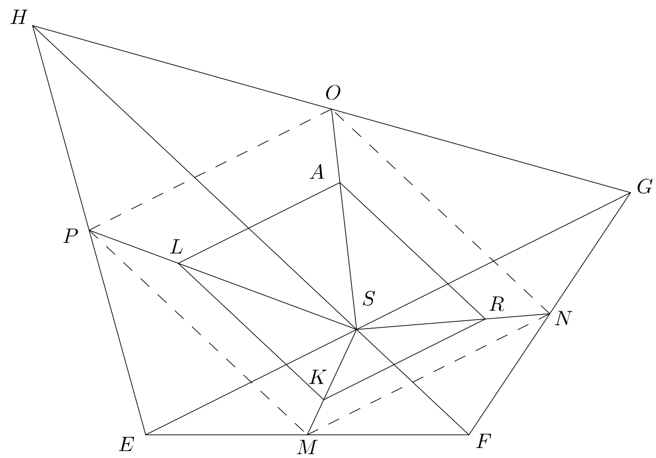
<u>Riešenie:</u> (opravoval Ľubo)
Máme dve rôzne čísla, pričom väčšie z nich si označíme a a menšie b. Najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel si označíme ako D, teda $NSD(a,b) = D$.
Vieme, že D dvoch ľubovoľných čísel je vždy aspoň 1. Ak by sme k menšiemu b vždy pripočítavali jednotku, tak by sme sa k číslu a určite dostali. Ak by sme pripočítavali k b aj väčšie čísla ako jednotku, určite by sme sa k a dostali za menej krokov. Problém by však mohol nastať, ak by sme pripočítali také číslo, že novovzniknuté číslo $b+D$ by bolo väčšie ako a. Ďalej by sme museli pripočítavať k a a takto by sme si mohli väčšie a menšie čísla vymieňať možno aj donekonečna. Skúsme si teda ukázať, že takáto dvojica neexistuje.
Číslo a si môžeme napísať ako $k \cdot D$, rovnako číslo b vieme napísať ako $l \cdot D$. Na začiatku sme si povedali, že $a > b$. Z toho vyplýva, že $k > l$. Snažíme sa ukázať, že $a \geq b + D$. Vieme to prepísať ako $k \cdot D \geq l \cdot D + D$. Ponúka sa to vydeliť D. Po vydelení dostávame $k \geq l+1$, čo platí, lebo $k > l$.
Ukázali sme, že naozaj neexistuje taká dvojica čísel, kde novovzniknuté číslo $b+D$ je väčšie ako a. Tým pádom vieme zároveň povedať, že neexistuje ani dvojica, s ktorou sa Hago bude vedieť hrať donekonečna. Menšie číslo sa k väčšiemu bude po každom pripočítaní ich najväčšieho spoločného deliteľa približovať aspoň o jeden a pritom nikdy neprevýši väčšie. Za najviac $a-b$ krokov sa teda určite dostane do stavu, že obidve čísla budú rovnako veľké.

<u>**Úloha č. 4:**</u> *Ríša geometrie má krutého kráľa, ktorý nechce Joža pustiť preč. Jožovi neostáva nič iné, ako sa kráľovi postaviť. Dopočul sa, že kráľom je štvoruholník $KRAL$, ale zišlo by sa mu vedieť o kráľovi viac. Našťastie našiel nasledovnú hádanku, z ktorej vytušil, že kráľ bude asi rovnobežník. V hádanke je daný štvoruholník $EFGH$ s priesečníkom uhlopriečok S. Body K, R, A, L sú postupne ťažiskami trojuholníkov EFS, FGS, GHS, HES. Dokážte, že $KRAL$ je rovnobežník.*

<u>Riešenie:</u> (opravovali Hopko a Dominik)
Ako to už s geometriami býva, v prvom kroku je vhodné si nakresliť obrázok. Body K, R, A, L sú ťažiská trojuholníkov EFS, FGS, GHS, HES. Ak by sme mali v obrázku všetky ťažnice týchto trojuholníkov, bolo by to dosť neprehľadné. Otázkou je, ako tieto ťažiská „uchopiť“, aby sme mali obrázok stále prehľadný. Ďalej by sme si tiež mohli „uchopiť“ ťažisko v každom trojuholníku rovnakým spôsobom, aby nám tam ostala nejaká symetria. Okrem toho by bolo dobré, ak by sme rovnakým spôsobom využili všetky body E, F, G, H (napríklad ak v trojuholníku EFS použijeme ťažnicu z vrcholu E, tak by sme chceli rovnakým spôsobom využiť aj ťažnicu z bodu F). Tu sa nám núkajú dve možnosti (ukážeme si ich na $\triangle EFS$):

- Na ťažisko sa budeme pozerať ako na priesečník ťažníc z E a z F.
- Na ťažisko sa budeme pozerať ako na bod v dvoch tretinách ťažnice z bodu S.

[1] Najväčší spoločný deliteľ dvoch čísel je najväčšie celé číslo, ktoré obe čísla delí bezozvyšku.



Vyberme si druhú možnosť. Označme si stredy strán štvoruholníka $EFGH$ postupne M, N, O a P.
Teraz si uvedomíme, že úsečka MN je strednou priečkou trojuholníka EFG, pretože spája stredy jeho dvoch strán. Pre stredné priečky platí, že sú rovnobežné s protiľahlou stranou, v našom prípade so stranou EG. Z podobného dôvodu je aj úsečka OP strednou priečkou v trojuholníku EGH a je teda rovnobežná so stranou EG. Preto sú strany MN a OP štvoruholníka $MNOP$ rovnobežné.
Rovnako vieme ukázať, že sú rovnobežné aj strany PM a NO. Keďže sú v štvoruholníku $MNOP$ obe protiľahlé dvojice strán navzájom rovnobežné, tak je $MNOP$ rovnobežník.
Pozrime sa na trojuholníky MNS a KRS. Na obrázku vyzerá, že sú podobné, skúsme si to dokázať (premyslite si, kam nás to posunie v úlohe). Prvá vec, čo sa dá všimnúť je, že oba trojuholníky zdieľajú uhol pri vrchole S. Teraz si spomenieme na doposiaľ nevyužitú informáciu o polohe ťažiska na ťažnici. Vieme, že ťažisko leží v dvoch tretinách ťažnice (alebo v tretine, závisí to od uhla pohľadu). Preto je pomer dĺžok úsečiek KS a MS rovný pomeru dĺžok úsečiek RS a NS (v tomto prípade je pomer rovný $2 : 3$).
Rovnakým spôsobom vieme ukázať aj podobnosť trojuholníkov MPS a KLS, POS a LAS, NOS a RAS (tu využívame, že sme si ťažisko uchopili v každom trojuholníku rovnako). Preto z toho, že štvoruholník $MNOP$ je rovnobežník vyplýva, že aj štvoruholník $KRAL$ musí byť rovnobežník.

Úloha č. 5: *Dominikovi sa zdali byť šachové veže príliš slabé, tak si kúpil superveže. Jedna superveža ohrozuje celý riadok aj celý stĺpec, v ktorom sa nachádza (aj keď jej v ceste stoja iné figúrky). Následne Dominik zobral 25 superveží a rozmiestnil ich na šachovnicu rozmerov 8×8 políčok. Ukážte, že v ľubovoľnom rozmiestnení 25 superveží sa vždy nájdu štyri superveže, z ktorých sa žiadne dve navzájom neohrozujú.*

Riešenie: (opravovali Kika a JeFo)
V tomto príklade je fajn sa najskôr pohrať so supervežami na šachovnici, skúsiť zopár konkrétnych rozostavení, aby sme získali predstavu o tom, ako sa správajú superveže a ako to celé funguje. Uvedomíme si, že dve superveže sa neohrozujú práve vtedy, keď sú v rôznych riadkoch a stĺpcoch.
Skúsme si celú šachovnicu, všetky políčka, rozdeliť na niekoľko oblastí tak, že superveže sa v rovnakej oblasti navzájom neohrozujú. V takejto oblasti môže byť najviac 8 políčok, lebo máme práve 8 riadkov a stĺpcov. Ak by v každej oblasti bolo 8 políčok, tak spolu by sme mali 8 rôznych oblastí ($64 : 8 = 8$).
Rozdelenie šachovnice do takýchto oblastí sa dá nájsť pomerne jednoducho. Možným príkladom rozmiestnenia šachovnice do oblastí je šachovnica na obrázku nižšie. Prvou oblasťou je diagonála, tú sme si na šachovnici označili číslom 1. Ďalšou oblasťou sú políčka o jeden riadok vyššie, tých existuje 7, tak k nim ešte doplníme políčko v poslednom riadku a stĺpci. Vieme nájsť ďalších takých 6 oblastí, že každé políčko je v inom stĺpci a riadku. Každá oblasť je označená svojím číslom, teda políčka v rovnakej oblasti sú označené rovnakým číslom.

8	7	6	5	4	3	2	1
7	6	5	4	3	2	1	8
6	5	4	3	2	1	8	7
5	4	3	2	1	8	7	6
4	3	2	1	8	7	6	5
3	2	1	8	7	6	5	4
2	1	8	7	6	5	4	3
1	8	7	6	5	4	3	2

Ak dokážeme, že aspoň v jednej oblasti musia byť vždy aspoň 4 superveže, tak je jasné, že sa neohrozujú, a teda sme dokázali, čo sme chceli. To ale vyplýva z Dirichletovho princípu, ktorý v našom prípade hovorí, že ak rozdelíme 25 superveží do ôsmich oblastí, tak aspoň v jednej oblasti musia byť aspoň štyri superveže[2].

Úloha č. 6: *Ivka a Baša objavili 95 kladných čísel. Ivka hneď všetkých 95 čísel sčítala a zapísala si výsledok. Baša je o niečo prefíkanejšia, preto najprv všetky čísla menšie ako 1 nahradila jednotkou, potom všetkých 95 (už nových) čísel vynásobila a k výsledku pripočítala 94. Dokážte, že Ivka nedostala väčší výsledok ako Baša.*

Riešenie: (opravoval Jožo)
Najskôr sa pozrime na čísla menšie ako 1. Tie Baša nahrádza jednotkou. Ak ich nahradí aj Ivka, jej súčet sa zväčší, ale Bašin výsledok sa nezmení. Preto môže aj Ivka nahradiť všetky čísla menšie ako 1 jednotkou. Ak dokážeme, že vtedy nebude Ivkin výsledok väčší ako Bašin, tak určite nebude ani v prípade, keď nejaké čísla budú menšie ako 1. Stačí nám teda uvažovať len čísla väčšie alebo rovné 1. Ak by boli všetky čísla jednotky, tak by obe dievčatá dostali rovnaký výsledok (dostali by 95). Rovnako by na tom boli, aj keby jedno z nájdených čísel bolo väčšie ako jedna. Ak ale skúsime viac čísel zväčšiť, už Baša začne dostávať väčšie výsledky ako Ivka. Potrebujeme sa však o našom pozorovaní presvedčiť a riadne ho dokázať.
Uvažujme teda, že sme už nejaké jednotky nahradili. Označme si Ivkin výsledok ako I a Bašin výsledok ako $B+94$. Pozrime sa, čo sa stane, ak jednu jednotku zväčšíme na číslo x. Ivkin výsledok zväčší o $x-1$. Bašin bol pôvodne $B+94$ a po zmene bude $B\cdot x+94$, teda sa zväčší o $B\cdot x-B=B\cdot(x-1)$. Kedže Baša násobí len čísla väčšie alebo rovné 1, tak aj jej súčin B bude aspoň 1. Preto $x-1\leq B\cdot(x-1)$ (lebo $x>1$). Z toho vidíme, že pri zväčšení jednotky na x sa Ivkin výsledok zväčší najviac o toľko čo Bašin.
Ľubovoľných 95 čísel väčších ako 1 vieme dostať tak, že si najprv zoberieme jednotky (pri ktorých majú dievčatá rovnaké výsledky) a potom ich jednu po druhej zmeníme na potrebné čísla. Preto po nahradení jednotiek bude Ivkin výsledok väčší alebo rovný Bašinmu. Ako sme už vyššie uviedli, ak by nejaké čísla boli menšie ako 1, tak by to nerovnosť zachovalo. Ukázali sme tak, že pre ľubovoľných 95 kladných čísel Ivka nedostala väčší výsledok ako Baša.

Iné riešenie:
Z rovnakého dôvodu ako v prvom riešení nebudeme uvažovať čísla menšie ako 1. Ak sa zamyslíme, prečo je čísel akurát 95, asi na nič rozumné neprídeme. Zdá sa nám, že by tvrdenie úlohy platilo aj pre iné počty nájdených čísel. Úlohu si teda zovšeobecníme. Dievčatá našli n čísel väčších alebo rovných 1, ktoré si označíme $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Máme ukázať, že pre ne platí nerovnosť

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n+n-1. \tag{1}$$

Túto nerovnosť dokážeme matematickou indukciou[3]. Je to dobrý spôsob, ako dokazovať tvrdenia, ktoré závisia od nejakého prirodzeného čísla n.
Pre $n=1$ v nerovnosti (1) dostaneme $a_1\leq a_1$, čo platí pre ľubovoľné a_1. Predpokladajme teraz, že nerovnosť (1) platí pre $n=k$:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k\leq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k+k-1. \tag{2}$$

Ukážeme, že potom nerovnosť (1) platí pre $n=k+1$, teda, že platí

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}\leq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\cdot a_{k+1}+k. \tag{3}$$

Ak k nerovnosti (2) pripočítame na obe strany a_{k+1}, dostaneme

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}\leq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k+a_{k+1}+k-1. \tag{4}$$

Dostali sme tak na ľavej strane to, čo potrebujeme. Už nám stačí len ukázať nerovnosť

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k+a_{k+1}+k-1\leq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\cdot a_{k+1}+k. \tag{5}$$

Ak si označíme súčin $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k$ ako s a odčítame k, tak uvedenú nerovnosť vieme upraviť do prehľadnejšieho tvaru

$$s+a_{k+1}\leq s\cdot a_{k+1}+1.$$

Teraz stačí dať všetky premenné na pravú stranu, ktorú ľahko upravíme na súčin $0\leq(s-1)\cdot(a_{k+1}-1)$. Keďže $s\geq1$ aj $a_{k+1}\geq1$, tak súčin na pravej strane je isto nezáporný. Tým sme dokázali nerovnosť (5). Nerovnosť (3) teraz už vyplýva z nerovností (4) a (5) (rozmyslite si to).
Matematickou indukciou sme dokázali, že nerovnosť (1) platí pre ľubovoľné prirodzené číslo n, teda platí aj pre $n=95$, čo sme mali dokázať.

[2] Viac o Dirichletovom princípe sa môžeš dočítať v zbierke úloh KMS (`http://www.kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf`).
[3] Ak nepoznáš matematickú indukciu, môžeš si o nej prečítať v zbierke úloh KMS (`http://www.kms.sk/docs/zbierkaKMS_klikacia.pdf`).

__Úloha č. 7:__ *Ľubo si narysoval trojuholník ABC a vpísal mu kružnicu. Cez noc mu však trojuholník niekto vygumoval. Teraz by chcel trojuholník znovu narysovať, ale nevie ako. Na papieri mu ostala kružnica k a tri priamky a, b, c prechádzajúce jej stredom. Zostrojte pomocou pravítka a kružidla[4] trojuholník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B, C ležali postupne na priamkach a, b, c a kružnica k bola vpísaná do tohto trojuholníka.*

Riešenie: (opravovala Vodka)
V konštrukčných úlohách je často (= skoro vždy) dobré predstaviť si, že už sme úlohu vyriešili, t.j. už máme skonštruovaný trojuholník ABC a pozrieť sa, čo platí. Označme si I stred tej vpísanej kružnice a D, E, F body dotyku. Vieme, že stred vpísanej kružnice leží na priesečníku osí uhlov. To naznačuje, že by sa nám mohli dobre počítať uhly. Označme si teda štandardne uhly v trojuholníku α, β, γ. Potom zrejme platí:

$$|\sphericalangle BIC| = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

No, lenže uhol BIC poznáme, lebo ho máme nakreslený na obrázku (je to tupý uhol, ktorý zvierajú priamky b, c.) Preto poznáme a vieme skonštruovať uhol α a zrejme analogicky aj β, γ.
V tomto momente sme si vlastne uvedomili, že uhly $\sphericalangle BIC$, $\sphericalangle CIA$, $\sphericalangle AIB$ sú tupé, to znamená, že keď si zafixujeme na ktorej strane polpriamky a leží bod A, tak vieme aj na ktorých stranách polpriamok b, c ležia body B, C. Samozrejme aj tieto polpriamky (časti b, c) by mali zvierať tupý uhol, no oni ho zvierajú - inak by úloha nemala riešenie. Dostávame, tým dve možnosti, no obe sú stredovo súmerné podľa I, takže stačí riešiť jednu z nich.
Teraz by už nemal byť veľký problém zkonštruovať náš trojuholník. Ciest je veľa a niektoré sú náročnejšie ako iné. Najjednoduchšie ale asi je uvedomiť si, že $|\sphericalangle AEI| = 90^\circ$, keďže E je bod dotyku. Následne si vieme z trojuholníka AEI dopočítať, že

$$|\sphericalangle AIE| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Bod E si skonštruujeme ako priesečník kružnice k a priamky, ktorá zviera s priamkou a (v našom prípade s polpriamkou na ktorej leží A) uhol dopočítaný vyššie.
Analogicky vieme zostrojiť aj zvyšné body dotyku, po čom nie je problém zostrojiť celý trojuholník, lebo vieme narysovať dotyčnicu ku kružnici v danom bode. Cez body D, E, F vedieme kolmice na priamky DI, EI, FI a tie nám vytvoria trojuholník ABC.
Nakoniec prichádza ešte jedna veľmi dôležitá časť kontštrukčnej úlohy. A síce overiť, či naša konštrukcia je dobrá. Ak sa zamyslíme, celý čas sme ukazovali, že ak konštrukcia existuje, tak musí vyjsť rovnako ako nám. Nikde sme nedokázali, že naša konštrukcia naozaj vyhovuje. V tomto prípade máme situáciu uľahčenú tým, že vieme (zo zadania), že naša úloha má aspoň jedno riešenie, t.j. aspoň jeden trojuholník existuje. A keďže naša konštrukcia bola jednoznačná (až na symetrickú podľa I), tak musí byť naša konštrukcia správna. To treba spomenúť aj vo všeobecnosti, a ak to nebudeme mať takto uľahčené tak to treba aj poriadne dokázať.
V našom prípade (ako aj vo väčšine prípadov) to vôbec nie je ťažké, lebo body F, E sme zvolili tak, aby boli osovo súmerné podľa priamky a (také uhly sme naniesli), a preto sa aj dotyčnice ku kružnici v bodoch E, F pretnú na priamke a. Analogicky sa ostatné dvojice pretnú na priamkach b, c. Takže to čo sme dostali je naozaj trojuholník opísaný našej kružnici s vrcholmi na priamkach a, b, c.
Ako presne to pomocou pravítka a kružidla skonštruovať nebudeme ukazovať (veď by sme sa upísali k smrti), čo je podstatné je to, že sme využili len základné operácie, ktoré vieme (zo základnej školy :P), že sa dajú urobiť pravítkom a kružidlom. A síce rysovanie kolmice a prenášanie uhlov. To znamená, že všetky kroky, ako boli logicky popísané, sa dajú previesť aj pomocou pravítka a kružidla, len to trochu trvá.
No a na záver sa v konštrukčnej úlohe hodí povedať, či a koľko riešení úloha mala, no tu je naša situácia opäť uľahčená tým, že vieme, že úloha má aspoň jedno riešenie (pôvodný Ľubov trojuholník), a teda nemusíme riešiť aké polohy tých 3 priamok vyhovujú. Inak vieme, že to vždy bude mať 2 (symetrické riešenia).

Komentár: Aby som to zhrnul, tak pri konštrukčných úlohách nezabúdajte na dôkaz správnosti konštrukcie, lebo musím povedať že riešiteľov, ktorí ho mali viem spočítať na prstoch jednej ruky (a nie, nepotrebujem na to binárnu sústavu). Áno bolo to teraz tak nejako nepriamo implikované zadaním, a preto som za to body nestrhával no nespoliehajte sa na to nabudúce.

[4] O tom, čo presne môžete robiť s kružidlom a pravítkom, si môžete prečítať na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovsk%C3%A1_konstrukce`

__Úloha č. 8:__ *Jefo už našiel svoje stratené okuliare. Teraz však stratil prirodzené čísla a, b, c. Pamätá si, že každé bolo väčšie ako 1 a že pre ne platilo:*

$$a \mid bc+1\ ,\ b \mid ac+1\ ,\ c \mid ab+1.$$

Pomôžte mu a nájdite všetky trojice prirodzených čísel $(a,\ b,\ c)$ väčších ako 1, ktoré spĺňajú uvedené podmienky.

Riešenie: (opravovali Miki a Zajo)
Začať môžeme napríklad tým, že skúsime nejakú trojicu uhádnuť. Keď na žiadnu len tak neprídeme, možno by sa nám lepšie hľadalo, ak by sa nejaké dve čísla rovnali.
Bez ujmy na všeobecnosti, nech $a = b$. Potom zo zadania vyplýva:

$$b|ac+1 \Rightarrow a|ac+1 \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = 1 \wedge a > 1.$$

To ale nemôže nastať zároveň, preto sa žiadne dve z čísel a, b, c nerovnajú.
Vidíme tiež, že zadanie je symetrické[5] tak si vieme povedať, že $a \geq b \geq c$ (ak by to neplatilo, tak si ich im zmeníme označenia tak, aby to platilo). A kedže žiadne dve z čísel a, b, c sa nerovnajú, tak platia dokonca ostré nerovnosti. Hodí sa nám to, lebo o tých číslach vieme teraz povedať viac a nejako ich porovnávať.
Dané máme len deliteľnosti, žiadne rovnosti, čo môže byť o čosi ťažšie. V takýchto prípadoch sú väčšinou dve veci, na ktoré sa oplatí dívať a sú dôsledkami deliteľnosti. Prvá je, že musí existovať prirodzené k, také že $ak = bc + 1$ a druhá, že $a \leq bc + 1$.
Toho sa hneď chytíme a $ak = bc + 1$ upravíme na

$$a = \frac{bc+1}{k},$$

čo musí byť celé číslo. Dostali sme vyjadrenie pre a pomocou b, c, skúsme si to dosadiť do ostatných deliteľností a eliminovať tak premennú a:

$$b|\frac{bc+1}{k}c+1 \qquad\qquad c|\frac{bc+1}{k}b+1.$$

Prvú deliteľnosť si vieme upraviť nasledovne:

$$b|\frac{bc^2+c}{k}+1.$$

Stále v nej ale máme zlomok, čo pri deliteľnostiach nezvykne byť nápomocné. Hlavne preto, lebo od pravej strany môžeme odpočítavať/pripočítavať iba celočíselné násobky b (nemôžeme napríklad odpočítať bc^2/k, lebo nevieme či je to celočíselný násobok čísla b).
Zlomku sa ale môžeme zbaviť prenásobením k, lebo ak b delí nejaké číslo, tak určite delí aj jeho k-násobok. Hneď na to, vieme nasadiť vyššie spomínanú úpravu, odpočítame c^2 násobok b.

$$b|\frac{bc^2+c}{k}+1 \quad \Rightarrow \quad b|bc^2+c+k \quad \Rightarrow \quad b|c+k$$

Z toho vieme, že $b \leq c + k$. Teraz by sa nám hodilo nejakým spôsobom odhadnúť to, čo hovorí táto podmienka. Vieme totiž, že $b > c$, takže tie dve nerovnosti sa nám môžu zdať podozrivo podobné, teda že jedna nebude oveľa väčšia ako druhá.
Pozrime sa, aké najväčšie môže byť k: Z predošlého vyjadrenia $ak = bc + 1$, si stačí všímnúť, že k, bude menšie ako a, b, c.
Ak by bolo $k \geq c$, tak na pravej strane násobíme najväčšie z čísel(a) niečím väčším ako c, zatiaľ čo na pravej strane máme výraz určite menší. $(b < a, c \leq k)$
Teraz už vieme určiť horný odhad: $b \leq c + k < 2c < 2b \Rightarrow by = c + k < 2b \Rightarrow y = 1, b = c + k$.
Už máme aj informáciu o b, dosaďme ju preto do tretej deliteľnosti zo zadania:

$$c|ab+1 \Rightarrow c|\frac{bc+1}{k}(c+k)+1 \Rightarrow c|\left(\frac{bc+1}{k}\right)c+(bc+1)+1 \Rightarrow c|bc+2 \Rightarrow c|2 \Rightarrow c=2$$

Už nám stačí len dobojovať, $a|2b + 1 < 2a$ (z usporiadania $a \geq b + 1$), preto musí platiť $a = 2b + 1$. Z druhej deliteľnosti: $b|2a + 1 \Rightarrow b|2(2b + 1) + 1 \Rightarrow b|4b + 3 \Rightarrow b|3 \Rightarrow b = 3$. $a = 2b + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Keď do zadania dosadíme trojicu $(7, 3, 2)$ zisťujeme, že naozaj vyhovuje.
Dostávame jedinú sadu riešení:

$$(a,b,c) \in \{(7,3,2),(7,2,3),(3,7,2),(3,2,7),(2,7,3),(2,3,7)\}$$

[5] symetrické znamená, že ak navzájom vymeníme napr. a s b, tak sa nič nezmení

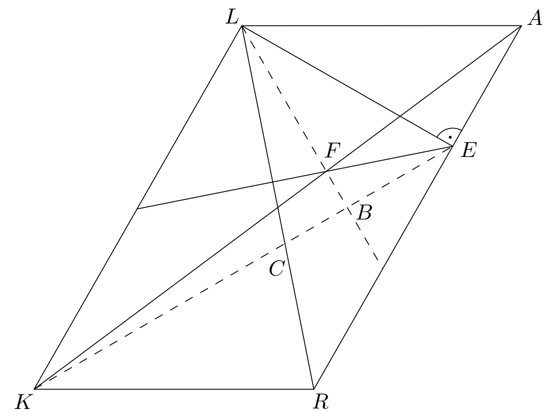
Najprv sme vylúčili rovnosť a použili fintu s usporiadaním. Nakoniec je fajn si všimnúť, že v riešení sme správne naskladali niekoľko jednoduchých úprav. Využívali sme dve informácie, ktoré nám dáva deliteľnosť, násobili sme ju celým číslom a odpočítavali násobky čísla, ktoré má deliť iné.

<u>**Úloha č. 9:**</u> *Mišo si ide v kuchyni vydláždiť stenu rozmerov $2n \times 2n$ dlaždicami $1 \times n$. Dlaždice na ňu ukladá v oboch kolmých smeroch tak, aby sa žiadne dve neprekrývali. Keďže je šetrný, chce použiť čo najmenej dlaždíc. Nechce však, aby mu sused vyčítal, že jeho stena vyzerá nedokončene. Preto musí na ňu uložiť dlaždice tak, aby sa žiadna iná dlaždica $1 \times n$ na ňu nedala uložiť bez prekrytia inej, už uloženej dlaždice. Pre dané prirodzené číslo n určte, koľko najmenej dlaždíc na to Mišo potrebuje.*

<u>Riešenie:</u> (opravoval Mišo)
Našou úlohou je naukladať čo najmenej dlaždíc tak, aby sa neprekrývali a aby sme nevedeli priložiť ďalšiu. Ak $n = 1$, tak zrejme potrebujeme použiť všetky 4 dlaždice. Ak $n = 2$, tak ich potrebujeme použiť 6 (túto časť nebudeme rozoberať, lebo pozostáva z vyskúšania možností a nepotrebuje žiaden nápad). Po chvíli hrania sa s väčšími n zistíme, že nám okrem týchto malých prípadov stačí len $2n + 1$ dlaždíc. Poďme si to poriadne dokázať.
Najprv si ukážeme konštrukciu s $2n + 1$ dlaždícami. Potrebujeme do mriežky veľkosti $2n \times 2n$ poukladať $2n + 1$ dlaždíc tak, aby sa ďalšia už nezmestila. Urobíme to tak, že najprv položíme jednu dlaždicu do n-tého riadku a druhú do $n + 1$-vého riadku tak, aby mali obe políčko v prvom stĺpci. Zaručili sme tým, aby sa nedali do prvých n stĺpcov položiť dlaždice vertikálne.
Následne položíme jednu dlaždicu do posledného stĺpca tak, aby prekryla riadky n a $n + 1$. Tým sme zaručili, že v týchto riadkoch už nemôžu byť horizontálne uložené žiadne ďalšie dlaždice a tiež, že v poslednom stĺci nemôže byť druhá vertikálne uložená.
V treťom kroku uložíme do všetkých riadkov okrem $n + 1$ a n-tého dlaždice tak, aby prekrývali stĺpce od n-tého po $2n - 1$. Tým zaručíme, že sa do žiadneho riadku ani stĺpca nezmestí ďalšia dlaždica.
Použili sme presne $2n + 1$ dlaždíc – položili sme do každého riadku jednu a ešte jednu máme v poslednom stĺpci. Žiadna ďalšia dlaždica sa už na stenu nezmestí. Ukázali sme teda, že na vydláždenie nám stačí najviac $2n + 1$ dlaždíc.
V druhej časti musíme ukážať, prečo $2n$ dlaždíc nestačí. Pozrime sa najprv na prípad, keď sú všetky dlaždice horizontálne. Ak nie je v každom riadku dlaždica, tak je niektorý riadok celý voľný a doňho sa $(2n+1)$-vá dlaždica zmestí. Ak je v každom riadku presne jedna dlaždica, tak je buď nejaká dlaždica na kraji a do jej riadku sa zmestí ďalšia, alebo žiadna nie je na kraji a teda vieme na kraj položiť dlaždicu vertikálne. Z toho vyplýva, že nech hocijako položíme $2n$ dlaždíc orientovaných jedným smerom, tak na stene je miesto aspoň na jednu ďalšiu dlaždicu.
Predpokladajme teraz, že nie všetky dlaždice sú rovnako orientované.
Zamerajme sa najprv na dlaždice v riadkoch. Všimnime si, že ak nie je dlaždica položená v krajnom riadku, tak na jednej strane (stĺpcovo) je medzi ňou a okrajom menej ako n voľných miest. Medzi ňou a týmto okrajom teda nie je žiadna stĺpcovo orientovaná dlaždica. Avšak obdĺžnik medzi ňou a krajom má dlhšiu stranu dĺžky n (pozdĺž dlaždice). Do každého jeho riadku sa zmestí aspoň jedna dlaždica a teda medzi našou prvou dlaždicou a krajom musí byť v každom riadku nejaká dlaždica.
Keďže každá dlaždica má medzi sebou a nejakým krajom v každom riadku inú dlaždicu, tak riadky, ktoré neobsahujú tieto dlaždice musia byť všetky vedľa seba. Ak máme menej ako $n + 1$ dlaždíc uložených horizontálne, tak ostáva neprekrytý obdĺžnik výšky aspoň n. Keďže už sme uložili všetky riadkové dlaždice, musíme ho vyplniť stĺpcovými. Do každého jeho stĺpca sa zmestí dlaždica, takže dokopy využijeme viac ako $2n$.
Ak máme horizontálnych viac ako n, tak použijeme predošlú úvahu na dalždice uložené vertikálne. Ak je ich menej ako $n + 1$, tak dlaždíc je celkovo viac ako $2n$. Ak je ich viac ako n, tak spolu s horizontálnymi máme viac ako $2n$ dlaždíc.
Dokázali sme, že nevieme pokryť stenu $2n$ dlaždicami tak, aby sa na ňu ďalšia nezmestila a že ak $n \geq 3$, tak $2n+1$ dlaždíc stačí. Ak n je menšie, potrebujeme $2n + 2$ dlaždíc.

Úloha č. 10: *Jožo sa konečne postavil kráľovi ríše geometrie – hrôzostrašnému rovnobežníku $KRAL$ ($|KR| < |RA|$), v ktorom os uhla RKL pretína stranu RA v bode E. Kráľ sa vyznačuje tým, že jeho úsečky LE a RA zvierajú pravý uhol. Obzvlášť nebezpečný je jeho bod F, v ktorom sa pretínajú os uhla ALK a uhlopriečka KA. Ostáva už len jedno – dokážte, že priamky EF a LR sú na seba kolmé.*

Riešenie: (opravoval Hago)



Prvá vec, ktorú treba pri riešení geometrie spraviť, je nakresliť (alebo narysovať) si dobrý obrázok. Napríklad taký, ako na obrázku.[6]
Šikovný riešiteľ si určite všimne, že okrem vecí zo zadania som si v ňom vyznačil ešte priesečník osí uhlov a nazval som ho B, a ďalej priesečník priamok KE a RL som označil C. Asi sa na tieto body budem chcieť odvolávať.
Keď vidíme osi uhlov, mohlo by to napovedať, že sa tam objaví veľa rovnakých uhlov. Po chvíľke hrania sa s týmito uhlami si môžeme všimnúť, že osi uhlov rovnobežníka sú na seba kolmé. Je tomu tak preto, lebo uhly BKL a BLK sú polovicami dvoch rôznych uhlov rovnobežníka, čiže spolu majú polovicu zo 180°, a nakoľko trojuholník KBL musí mať súčet vnútorných uhlov rovný 180°, tak uhol KBL bude mať veľkosť 90°.
Potrebujeme ukázať, že EF je kolmé na RL. Keby ste si teraz do obrázku zaznačili ten pravý uhol medzi osami a aj ten dokazovaný pravý uhol... Máte? Teraz dlho kukajte. Nič? Tak ja vám teda prezradím, čo ste si mali všimnúť. Sú tam nejaké podozrivé kolmice na dve strany trojuholníka CEL. To by asi mali byť výšky a F by malo byť ortocentrum tohto trojuholníka.
Niekto by mohol namietať, že o jednom z tých pravých uhlov ešte nevieme, že je pravý. Ak však ukážeme, že F je ortocentrom, tak potom už priamka idúca z vrchola E cez ortocentrum musí byť predsa výška, a tým dokážeme, čo bolo treba dokázať. Ako však ukázať, že je niečo ortocentrum?
Ukážeme, že sa v ňom pretínajú dve výšky. Stačí nám teda dokázať, že priamka CF je kolmá na priamku EL. Ešte sme nevyužili fakt, že priamka EL je kolmá na priamku RA, tak to využime a úlohu preveďme na dokazovanie, že priamky CF a RA sú rovnobežné. Je to rovnobežník, takže rovnako dobre môžeme dokazovať, že priamka CF je rovnobežná s priamkou KL. To sa dá napríklad tak, že ukážeme, že body C a F sú rovnako vzdialené od priamky KL.
Os uhla je množina bodov rovnako vzialených od ramien uhla. To znamená, že bod C je rovnako vzdialený od úsečiek KR a LK. Podobne bod F je rovnako vzdialený od úsečiek AL a LK. Teraz dvoma rôznymi spôsobmi spočítame obsah rozvnobežníka, pričom budeme zamieňať vzdialenosť bodu od úsečky s výškou v trojuholníku.
Obsah rovnobežníka je rovný dvojnásobku obsahu trojuholníka KRL (resp. ALK), ktorý sa dá rozdeliť na trojuholníky KRC a LKC (resp. ALF a LKF), ktorých výšky z bodu C (resp. F) sú rovnaké a súčet im prislúchajúcich strán tvorí polovicu obvodu rovnobežníka. Obsah rovnobežníka je teda rovný polovici obvodu rovnobežníka vynásobenej vzdialenosťou bodu C (resp. F) od úsečky LK.
Obsah rovnobežníka je zjavne rovnaký, a tým pádom musia byť aj tie vzdialenosti, o ktorých sme sa snažili dokázať, že sú rovnaké.

[6] Vysvetlí mi niekto, prečo sa osi zvyknú značiť čiarkovane?

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Sásik Tomáš	2.	Gamča BA	4	9	9	9	9	9	9			45	135
2.	Csenger Géza	3.	GHS	3	9	9	9	9	9				45	116
3.	Hanzely Slavomír	4.	GJAR PO	8			9	9	9	7	4		38	103
4.	Janeta Tomáš	2.	GAB NO	2	9	6	9	9					33	89
5.	Pajger Šimon	2.	GVO ZA	4	9	6	8	9	0				32	88
6.	Hrmo Šimon	4.	GPár NR	4	9	3	3	8		2			25	87
6.	Vištanová Laura	3.	Gmaď KE	3	9	9	9	9	8	3			44	87
8.	Marko Alan	2.	GMRŠ NZ	4	9			1	9				19	86
9.	Murin Marek	4.	GJH BA	8			9	9	0	3			21	78
10.	Súkeník Peter	4.	GVO ZA	9			8	9	9				26	74
11.	Kopfová Lenka	1.	G Mendel ČR	2	9	9	9	9	9				45	72
12.	Mičko Juraj	3.	GPoš KE	6			5	9					14	71
13.	Sládek Samuel	4.	GAB NO	6									0	70
14.	Tóthová Andrea	4.	GJH BA	6		3	7	9	0	2			21	69
15.	Dlugošová Michaela	2.	GKuk PP	4	9	3	3						15	65
16.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1	9								9	63
17.	Poljovka Jakub	2.	GPár NR	4	9	3	8						20	61
18.	Bodík Juro	4.	Gamča BA	9			7		4	5			16	60
19.	Pivoda Tomáš	3.	SJG KN	3		9	0						9	58
20.	Drotár Pavol	3.	GPoš KE	5		4	4	9					17	56
20.	Molčan Samuel	4.	GJAR PO	8			7		2	3			12	56
20.	Pišťák Daniel	4.	GChD Praha	7			7	9					16	56
23.	Marčeková Katarína	4.	GJH BA	8				9					9	55
24.	Sládeček Michal	3.	GVar ZA	5									0	54
25.	Švihorík Tomáš	2.	GPár NR	4	9	3	3		1	4			20	52
26.	Kopf Daniel	4.	G Slez ČR	9			9	9		3	7		28	51
27.	Kulla Filip	4.	BiG Sučany	8			9		4	2			15	50
28.	Kuťková Sára	2.	Gamča BA	4	9	5							14	48
29.	Ivan Peter	2.	GJH BA	4	5	3	3		0		0		11	45
30.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	3	9		3	3	0				15	42
31.	Bajnoková Natália	2.	GCSL BA	4	9								9	36
31.	Mach Jakub	3.	GPoš KE	3									0	36
31.	Smolárová Paulína	2.	ŠPMNDG BA	4									0	36
31.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	3									0	36
35.	Žídek Matěj	4.	Frýdlant ČR	7									0	34
36.	Holčíková Sandra	1.	GCSL BA	1	6	3	9						18	33
36.	Ralbovský Peter	3.	GJH BA	7									0	33
38.	Homola Marek	2.	GJH BA	4	3	3	2		0		1		9	30
39.	Porubsky Michal	4.	GsvCM NR	6									0	29
40.	Genči Jakub	3.	GPoš KE	5									0	26
41.	Choma Matej	4.	Gamča BA	7									0	21
42.	Onduš Peter	2.	GAlej KE	4									0	20
43.	Král Adam	4.	GVar ZA	6									0	18
43.	Pozsonyi Karol	1.	GBil BA	2		3	1			1			5	18
45.	Parada Matej	2.	Gamča BA	4									0	16
45.	Vančo Šimon	4.	CGsvM SL	5									0	16
47.	Kurimský Ján	4.	GsvMo	6									0	15
48.	Belan Pavol	2.	GVar ZA	4									0	14
48.	Krajmerová Barbora	4.	G Šurany	6		3	2						5	14
50.	Hanesz Zoltán	3.	GPoš KE	5									0	9

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
50.	Molnár Maximilián	2.	EvSŠ LM	2									0	9
52.	Dendis Tomáš	5.	BiG Sučany	5									0	7
53.	Jarunek Maximilián	1.	GLN BA	1	0	1	1	0			0		2	3
54.	Dobrík Dušan	1.	GCSL BA	1									0	0
54.	Dvořák Daniel	11.	Trutnov ČR	11									0	0
54.	Eller Peter	3.	GJH BA	4									0	0
54.	Pieš Adrián	6.	ŠPMNDG BA	8									0	0

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Mišiak Dávid	1.	GJH BA	1	9	9	9	9	9	9	9		45	135
2.	Krajči Samuel	1.	GAlej KE	1	9	9	9	9			9		45	132
3.	Kollár Pavol	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9			9		45	130
4.	Poturnay Marián	1.	GPdC PN	1	9	9	9	9	3	9			45	128
5.	Tódová Tereza	1.	GPár NR	1	9	6	9	9	3	9			42	127
6.	Klein Pavol	1.	GPdC PN	1	9	9	9	9		5			41	122
7.	Glevitzká Štefánia	1.	GVBN PD	1	9	9	9	9			9		45	115
8.	Moško Matej	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9			9		45	114
8.	Zubčák Matúš	1.	GPár NR	1	7	9	9	9		8			42	114
10.	Brezinová Viktória	1.	GAlej KE	1	9	9	9		9				36	109
10.	Janeta Tomáš	2.	GAB NO	2		9	9	9	6	9	9		45	109
12.	Molnár Michal	1.	Gamča BA	1	9	9	9	9		9			45	108
13.	Winczer Tobiáš	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	3				39	107
14.	Ďuračková Mária	1.	GJH BA	1	9		9	9			9		36	106
15.	Cinová Tatiana	1.	GPár NR	1	9	8	9	9	3	2			38	104
15.	Hrmo Matej	1.	GPár NR	1	6	4	6	9			9		34	104
17.	Rosinsky Juraj	1.	I de Lancy	1	3	9	9	7	3	3	8		36	102
18.	Machalová Monika	1.	GJH BA	1	9	9	9	9					36	101
19.	Kalašová Martina	1.	GJH BA	1	9	6		9			9		33	100
20.	Kebis Pavol	1.	G PK	1	9	7	9	9	4	4			38	97
21.	Csenger Géza	3.	GHS	3				9	9	9	9		36	96
22.	Královič Tomáš	1.	GPár NR	1	4	5	7	9		3			28	94
22.	Marčeková Michaela	1.	GPár NR	1	9			9					18	94
24.	Benková Nina	1.	GPdC PN	1	9	5	6	9	3				32	93
25.	Števko Martin	1.	GAlej KE	1	9	9	9	9	9	9	9		45	90
26.	Findra Michal	1.	GDT PP	1	8	1	6		2	2	9		27	88
27.	Ondovčíková Lucia	1.	G Modra	1		1	6	7	3	2	6		24	87
28.	Hečko Michal	1.	GPOH DK	1	7	8	9				7		31	84
29.	Belák Tomáš	1.	GAV LV	1		5	9		3	3			20	83
29.	Jóža Bohdan	1.	GJH BA	1	9	3		9	3	2			26	83
29.	Studeničová Katarína	2.	GPOH DK	2		8	5	9	3	6	9		37	83
32.	Dujava Jonáš	1.	SPŠE Prešov	1	9	5	9		3				26	81
32.	Pieš Dávid	1.	ŠPMNDG BA	1	9	4	5	9	3				30	81
34.	Oravkin Richard	1.	1SG BA	1	9	9	9		3				30	75
35.	Baláž Lukáš	1.	G Bánovce	1						9			9	69
36.	Kopunec Matúš	2.	GĽŠ TN	2									0	68
36.	Vištanová Laura	3.	Gmaď KE	3				9	9	9	9		36	68
38.	Galikova Kristina	1.	SúkG Česká	1	9	4	5		3				21	65
39.	Kopfová Lenka	1.	G Mendel ČR	2			9	9	9	9	9		45	63
40.	Holčíková Sandra	1.	GCSL BA	1	6	1	9	6	3	9			33	60
41.	Portašiková Jasmína	1.	GVar ZA	1	9		9	1	3				22	59
42.	Pisoňová Karolína	1.	G Bánovce	1	9		9						18	58
43.	Mráz Michal	1.	ŠPMNDG BA	1	5	8	9		3	3			28	54

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
44.	Pivoda Tomáš	3.	SJG KN	3					9	0			9	51
45.	Lacko Dávid	1.	GPOH DK	1	9		5						14	50
46.	Feketeová Viola	1.	GBST LC	1	9	1	1	1	2	1	0		14	44
47.	Šuchová Martina	2.	GPár NR	3				9		3	3		15	43
48.	Izsóf Ottó	3.	SJG KN	3				1	9	0			10	40
48.	Kňaze Gabriel	1.	GJCh BR	1	7	1		1					9	40
50.	Číž Jozef	1.	GJH BA	1									0	38
51.	Rajníková Mária	3.	GĽŠ TN	3									0	36
52.	Calvo Natália	1.	GPár NR	1	3	7	4	1	3	1			18	34
52.	Pozsonyi Karol	1.	GBil BA	2			9		3	1			13	34
54.	Častulíková Katarína	2.	1SG BA	3			7		2	1			10	31
54.	Molnár Maximilián	2.	EvSŠ LM	2									0	31
56.	Barusová Ema	1.	GPár NR	1									0	28
56.	Miháľ Filip	1.	Gym RS	1									0	28
58.	Mach Jakub	3.	GPoš KE	3									0	27
58.	Prokopová Tereza	1.	GJH BA	1	5	7							12	27
58.	Záhorský Ákos	2.	G Šahy	3									0	27
61.	Majer Matúš	1.	ŠPMNDG BA	1									0	25
62.	Letovanec Ján	1.	Gamča BA	1									0	19
63.	Budaj Ľubor	2.	BiG Sučany	2									0	18
64.	Bederka Andrej	1.	ŠPMNDG BA	1	6	1	5		3	2	1		17	17
65.	Belejová Sára	2.	GPH MI	2									0	16
66.	Šánta Adam	1.	GJH BA	1									0	13
67.	Kubinec Ondrej	1.	G PK	1									0	11
68.	Dobrík Dušan	1.	GCSL BA	1									0	9
68.	Ghirbaková Karin	1.	Gamča BA	1									0	9
68.	Jarunek Maximilián	1.	GLN BA	1	0	1	1	0	1	1	0		4	9
68.	Skala Daniel	1.	GCSL BA	1									0	9
68.	Skopalová Katarína	2.	GPH MI	2									0	9
73.	Jakubíková Hana	1.	GCSL BA	1									0	7
73.	Novota Matej	1.	SŠsvFA	1									0	7
73.	Sadovská Jana	2.	ŠPMNDG BA	3									0	7
76.	Kurimský František	2.	GsvM PO	2									0	5
77.	Beňo Roman	3.	GJH BA	3									0	0
77.	Čičová Katarína	3.	GMRŠ NM	3									0	0
77.	Ďurina Marián	2.	G Šurany	2									0	0
77.	Kissová Dominika	1.	G Šurany	1									0	0
77.	Novosedliaková Lea	3.	GJL MT	3									0	0
77.	Porges Eduard	2.	GJH BA	2									0	0
77.	Sadovská Jana	2.	ŠPMNDG BA	2									0	0
77.	Stroka Martin	2.	GŠkol PB	2									0	0
77.	Tóthová Natália	2.	GAlej KE	3									0	0
77.	Valová Alena	3.	GJL MT	3									0	0