Vzorové riešenia 1. série zimnej časti KMS 2016/2017

Úloha č. 1: *Peťko prehral na šachovom turnaji. Bola to ťažká porážka, lebo neporazil žiadneho hráča. Rozhodol sa, že do nasledujúceho turnaja bude na sebe pracovať. Dobrý šachista musí byť zdatný v matematike, a preto Peťko začal nasledujúcim príkladom.*
Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je $10^n + 8$ deliteľné číslom 72.

Riešenie: (opravovala Veronika)
Našou úlohou je zistiť deliteľnosť 72-mi. Číslo 72 je zložené, a preto bude jednoduchšie rozložiť si ho a zaoberať sa deliteľnosťou menšími číslami. Keďže $72 = 8 \cdot 9$ a čísla 8 a 9 nemajú spoločného deliteľa, platí pre deliteľnosť 72-mi nasledujúce pravidlo. Prirodzené číslo je deliteľné 72-mi práve vtedy, keď je zároveň deliteľné číslami 8 a 9.

Pre čísla 8 a 9 už kritériá poznáme. Prirodzené číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď jeho posledné trojčíslie je deliteľné ôsmimi. A číslo je deliteľné zase deviatimi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný deivatimi.

Ciferný súčet výrazu $10^n + 8$ je 9, kedže $1 + 0 + \cdots + 0 + 8 = 9$ a 9 delí 9. Každé číslo $10^n + 8$ je teda deliteľné deviatimi.

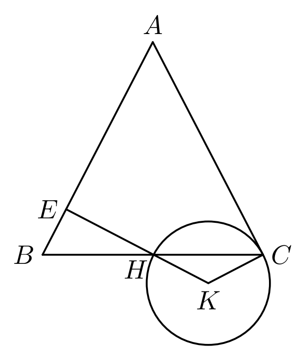
Vypíšeme si, ako vyzerá číslo $10^n + 8$ pre niekoľko najmenších n:
$n = 1, \quad 10^1 + 8 = 18,$
$n = 2, \quad 10^2 + 8 = 108,$
$n = 3, \quad 10^3 + 8 = 1008,$
$n = 4, \quad 10^4 + 8 = 10008.$

Všimnime si, že pre $n \geq 3$ bude posledné trojčíslie 008, čo je deliteľné ôsmimi. Totiž pre $n \geq 3$ sa číslo 10^n končí (aspoň) troma nulami a po pripočítaní osmičky dostaneme na konci trojčíslie 008. Pre $n = 1$ a $n = 2$ končí číslo $10^n + 8$ na 18, respektíve 108, čo nie sú násobky 8. Číslo $10^n + 8$ je teda deliteľné 8 iba v prípade, že $n \geq 3$.

Ukázali sme teda, že číslo $10^n + 8$ je deliteľné 72-mi pre všetky prirodzené čísla $n \geq 3$.

Úloha č. 2: *Šachovnica má štvorcový tvar a štvorce majú veľa pravých uhlov. Peťko je však smutný, že v jeho trojuholníku nemá žiaden pravý uhol. Peťko si teda zobral svoj rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Dokreslil kružnicu k so stredom v bode K, ktorá sa dotýkala priamky AC v bode C a pretínala druhýkrát úsečku BC v bode H. Dokážte, že priamky HK a AB sú na seba kolmé.*

Riešenie: (opravovali Iveta a Ivka)
Chceme dokázať, že priamka KH je kolmá na priamku BA. Teda čo nám stačí ukázať je, že uhol BEH je pravý, kde E je priesečník priamok BA a KH. Začneme tým, že si určíme stred kružnice K. Bod K musí ležať na kolmici k priamke AC (keďže bod C je dotykový). Takže vieme, že $|\sphericalangle KCA| = 90°$. Trojuholník ABC je rovnoramenný, teda



$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = \alpha.$$

Teraz sa pozrieme, čo vieme z doterajších informácií zistiť: $|\sphericalangle ACB| = \alpha$, $|\sphericalangle ACK| = 90°$, teda $|\sphericalangle BCK| = 90° - \alpha$. Pozrime sa bližšie na trojuholník HCK. Je rovnoramenný (pretože $|HK| = |CK| = r$). Z toho vyplýva, že

$$|\sphericalangle HCK| = |\sphericalangle CHK| = 90° - \alpha.$$

Uhly CHK a EHB sú vrcholové, teda $|\sphericalangle EHB| = 90° - \alpha$. V trojuholníku BHE máme vyjadrené dva uhly z troch, teda nebude tažké zistiť veľkosť uhla BEH. $|\sphericalangle ABC| = \alpha$, $|\sphericalangle EHB| = 90° - \alpha$, z čoho dostávame

$$|\sphericalangle BEH| = 180° - \alpha - 90° + \alpha = 90°.$$

Takže sme ukázali, že priamky HK a AB zvieraju pravý uhol, teda sú na seba kolmé.

<u>Úloha č. 3:</u> *Správny šachista sa musí starať o svoje figúrky. Keďže Peťko má len jedného koňa, stará sa oňho veľmi vzorne. Na políčka šachovnice A1, A2 až A8 postupne uloží 2^0, 2^1 až 2^7 kociek cukru. Na políčka B8, B7, až B1 postupne uloží 2^8, 2^9 až 2^{15} kociek, na políčka C1 až C8 postupne 2^{16} až 2^{23} kociek a takto pokračuje, až na políčko H1 uloží 2^{63} kociek cukru.*
Potom položí koňa na nejaké políčko šachovnice a ten po nej začne skákať (ako riadny šachový kôň). Zakaždým, keď kôň doskočí na políčko, zje všetky kocky cukru, ktoré sú na ňom položené. Na začiatočnom políčku ešte neje kocky. Keď z políčka kôň odskočí, Peťko tam znova položí toľko kociek cukru, koľko tam bolo pôvodne. Po nejakom čase kôň doskáče na políčko, kde začínal, zje kocky cukru na ňom a kŕmenie sa skončí. Dokážte, že počet kociek cukru, ktoré kôň zjedol, je deliteľný tromi.

<u>Riešenie:</u> (opravovali Betka a Čeky)
Keďže sa budeme zaoberať deliteľnosťou tromi, poďme sa najprv pozrieť na zvyšky, ktoré po delení tromi dávajú jednotlivé mocniny dvojky.

$$\begin{array}{lcll} 2^0 & = & 1 & \to & \text{zvyšok} & 1, \\ 2^1 & = & 2 & \to & \text{zvyšok} & 2, \\ 2^2 & = & 4 & \to & \text{zvyšok} & 1, \\ 2^3 & = & 8 & \to & \text{zvyšok} & 2, \\ 2^4 & = & 16 & \to & \text{zvyšok} & 1, \\ 2^5 & = & 32 & \to & \text{zvyšok} & 2, \\ 2^6 & = & 64 & \to & \text{zvyšok} & 1, \\ 2^7 & = & 128 & \to & \text{zvyšok} & 2, \\ 2^8 & = & 256 & \to & \text{zvyšok} & 1,\dots \end{array}$$

Bystré oko si všimne, že postupnosť zvyškov sa pravidelne opakuje $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ a bystrá hlava začne rozmýšľať, nad tým či to je náhoda. Ako to už v matematike býva zvykom, náhoda to nie je.

Vieme, že 2^0 má po delení tromi zvyšok 1, dá sa teda zapísať ako $3k+1$. Ďalšia mocnina dvojky je dvojnásobkom tej predchádzajúcej, teda $2 \cdot (3k + 1) = 6k + 2$, z čoho vidíme, že 2^1 bude mať po delení tromi zvyšok dva. Zovšeobecnením tejto úvahy ľahko prídeme na to, že po každej mocnine dvojky, ktorá dáva zvyšok 1, bude nasledovať mocnina dvojky, ktorá dáva zvyšok 2. Teraz ešte treba zistiť, čo bude nasledovať po mocninách, ktoré dávajú zvyšok 2, teda sa dajú zapísať ako $3k + 2$. Po takýchto mocninách budú nasledovať ich dvojnásobky, teda $2 \cdot (3k + 2) =$
$= 6k + 4 = 6k + 3 + 1 = 3l + 1$. Vidíme teda, že po každej mocnine dávajúcej zvyšok 2 bude nasledovať taká, ktorá dáva zvyšok 1. Vieme teda, že zvyšky sa naozaj budú pravidelne opakovať, ako sme predpokladali. Z toho ale vyplýva, že na našej šachovnici budú všetky zvyšky 1 na čiernych políčkach a všetky zvyšky 2 na bielych políčkach.

Poďme sa teraz pozrieť, ako sa bude pohybovať náš kôň. Vieme, že kôň sa pohybuje v tvare písmena L a jeho otočení. Môžeme si všimnúť, že ak kôň začne na bielom políčku, skončí na čiernom a naopak. Vieme teda, že kôň pri svojom ťahu vždy zmení farbu políčka, na ktorom stojí a že po dvoch ťahoch bude zase na rovnakej farbe. Aby sa dostal na políčko, z ktorého štartoval, musí spraviť párny počet ťahov (lebo toto políčko má samé so sebou rovnakú farbu), a teda musí počas svojej cesty stúpiť na rovnako veľa bielych a čiernych políčok.

My už ale vieme, že všetky čierne políčka majú zvyšok 1 a všetky biele políčka majú zvyšok 2. Náš kôň teda v každej dvojici krokov stúpi na jedno políčko so zvyškom 1 a jedno políčko so zvyškom 2. Keď tieto zvyšky sčítame, dostaneme zvyšok 3, teda číslo, ktoré je tiež deliteľné tromi.

A to je presne to, čo sme chceli dostať. Trikrát hurá, dokázali sme, že kôň vždy spapá počet kociek cukru, ktorý bude deliteľný tromi.

<u>Úloha č. 4:</u> *Peťko stratil svoje obľúbené čísla a bez nich sa nemôže pripravovať. Ešte k tomu vypadla elektrina a nemá po ruke žiadnu baterku. Bude preto potrebovať pomoc.*
Je dané prvočíslo p. Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel a, b, c, d pre ktoré platí

$$ac - bd = p,$$
$$ad - bc = 0.$$

<u>Riešenie:</u> (opravovali Adam a Maťa)
Peťko má podľa zadania tieto dve rovnice

$$ac - bd = p,$$
$$ad - bc = 0.$$

Rovnice nám zatiaľ príliš veľa nehovoria, a tak ich skúsime sčítať a odčítať. Vo všeobecnosti je dobrou úpravou nahradiť sústavu rovníc ekvivalentou sústavou rovníc, napríklad odčítaním a sčítaním rovníc. Takto môžme získať nejakú zaujímavú skutočnosť.

$$ac - bd + ad - bc = p + 0,$$
$$ac - bd - ad - bc = p - 0.$$

Ešte ich trochu upravíme:

$$a(c+d) - b(c+d) = p, \qquad (a-b)(c+d) = p,$$
$$a(c-d) + b(c-d) = p, \qquad (a+b)(c-d) = p.$$

Tento tvar je už oveľa zaujímavejší, zamerajme sa na prvú z nich. Na ľavej strane máme súčin dvoch členov, ktorý je rovný nášmu prvočíslu p. Môžeme si všimnúť, že v rovniciach funguje nasledujúce pravidlo. Ak sú čísla na jednej strane rovnosti deliteľné nejakým číslom, tak ním musia byť deliteľné aj čísla na druhej strane rovnosti. To platí aj v našom prípade. Keďže o prvočíslach vieme, že sú deliteľné len jednotkou a samým sebou, tak jedna zo zátvoriek bude rovná 1 a druhá p.

V jednej zátvorke máme súčet dvoch celých kladných čísel (podľa zadania), a v druhej rozdiel iných dvoch kladných celých čísel. Keď sčítavame dve celé kladné čísla, výsledok bude vždy väčší ako 1. Z toho vyplýva, že súčet musí byť $c + d = p$ a rozdiel $a - b = 1$.

Analogicky dostaneme z druhej rovnice súčet $a + b = p$ a rozdiel $c - d = 1$. Platí teda

$$a - b = c - d = 1,$$
$$a + b = c + d = p.$$

Pomocou prvočísla p teraz vieme vyjadriť každé z čísel a, b, c, d. Napríklad pre získanie b si najprv vyjadríme a

$$a - b = 1, \qquad a = 1 + b,$$

čo dosadíme do druhej rovnosti

$$b + 1 + b = p,$$
$$b = \frac{p-1}{2}.$$

Rovnakým spôsobom si vieme vyjadriť aj a, c a d. Dostaneme

$$a = c = \frac{p+1}{2} \quad \text{a} \quad b = d = \frac{p-1}{2}.$$

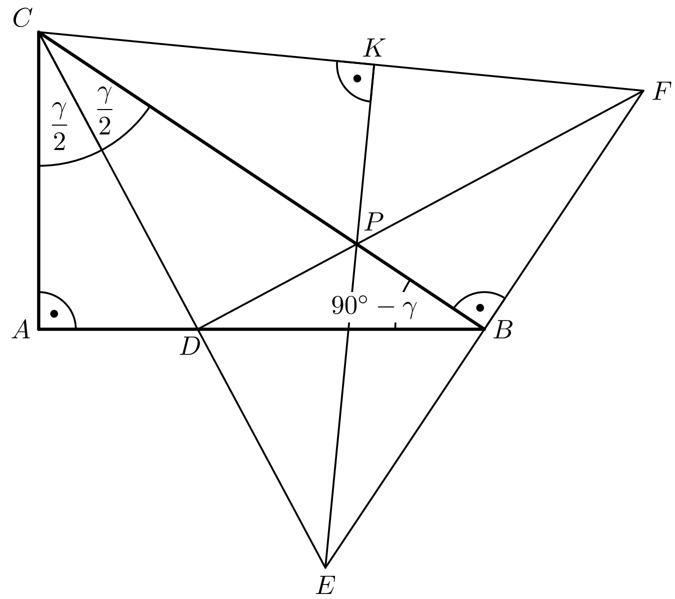
Keďže a, b, c, d sú kladné celé čísla, musia byť kladné celé aj oba zlomky, ktoré sme dostali. To spĺňajú všetky nepárne prvočísla p.

A to je všetko. Nezistili sme, aké prvočíslo p sa Peťkovi stratilo, vieme však pre každé nepárne prvočíslo nájsť štvoricu čísel (a, b, c, d) tak, aby spĺňali rovnice zo zadania.

Úloha č. 5: *Pri pripravovaní stratégie je dôležité nakresliť si ju. Keďže sa však Peťkovi pokazil počítač, musel si ju nakresliť na papier.*
Nakreslil si pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A a s odvesnou AB dlhšou ako odvesna AC. Os uhla ACB mu pretínala stranu AB v bode D a kolmicu na stranu BC vedúcu cez bod B v bode E. Obraz bodu E v stredovej súmernosti so stredom v bode B označil F. Úsečky BC a DF sa mu preťali v bode P. Dokážte, že priamky EP a FC sú na seba kolmé.

Riešenie: (opravoval Ľubo)
Keďže riešime geometrickú úlohu, bude vhodné začať načrtnutím si obrázka. Čo v obrázku vieme a prečo?

- $|\sphericalangle BAC| = \alpha = 90°$ (vieme zo zadania).
- $|\sphericalangle CBE| = 90°$ (vieme zo zadania).
- $|EB| = |BF|$ (zo zadania).
- $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ (použijeme štandardné označenie).
- $|\sphericalangle ABC| = \beta = 90° - \gamma$ (doplnok k 180° v $\triangle ABC$).
- $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = \gamma/2$ (os uhla).
- Priesečník priamok EP a CF sme si označili K.



Našou úlohou je ukázať, že $EP \perp CF$, respektíve, že $|\sphericalangle PKC| = 90°$. To môžeme spraviť napríklad tak, že zistíme veľkosť zvyšných uhlov v trojuholníku PKC.

Jeden z uhlov vieme zistiť veľmi ľahko, a síce PCK. Keď sa totiž pozrieme na trojuholníky EBC a FBC, vidíme, že sú zhodné (podľa vety sus). Vieme teda povedať, že

$$|\sphericalangle PCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Zostáva nám ešte zistiť veľkosť uhla CPK. To už nebude také jednoduché, pustime sa preto do uhlenia. Bude jednoduché zistiť veľkosť uhla ADC z trojuholníka ADC, uhol CEB z trojuholníka EBC a uhol CFB z trojuholníka FBC. Začnime teda s nimi.

- $|\sphericalangle ADC| = 180° - 90° - \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$.
- $|\sphericalangle EDB| = |\sphericalangle ADC| = 90° - \frac{\gamma}{2}$ (vrcholové uhly).
- $|\sphericalangle CEB| = 90° - \frac{\gamma}{2}$ (rovnako ako $\sphericalangle ADC$).
- $|\sphericalangle CFB| = 90° - \frac{\gamma}{2}$ (rovnako ako $\sphericalangle ADC$).

Všetky uhly nám vyšli rovnaké, vieme to nejak využiť? Mohli by sme napríklad využiť, že uhol CEB má rovnakú veľkosť ako uhol CFB, a teda trojuholník CEF je rovnoramenný, ale to nám asi veľmi nepomôže. Zaujímavejší poznatok je, že trojuholník EDB je rovnoramenný, teda platí

$$|BD| = |BE| = |BF|.$$

Preto je aj trojuholník DBF rovnoramenný. Vieme toto nejak využiť? Určite áno. Vieme vďaka tomu zistiť veľkosť uhla PFB.

$$|\sphericalangle PFB| = \frac{180° - (180° - \gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Pozrime sa teraz na trojuholníky BEP a BFP. Vidíme, že sú zhodné (podľa vety sus), preto je trojuholník EFP tiež rovnoramenný. Keďže poznáme veľkosť uhla PFB, nebude ťažké zistiť veľkosť uhla EPB.

$$|\sphericalangle EPB| = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

A keďže uhol EPB je vrcholový k uhlu CPK, tak vieme, že

$$|\sphericalangle CPK| = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Neostáva nám už nič iné, len dopočítať veľkosť uhla CKP.

$$|\sphericalangle CKP| = 180° - (90° - \frac{\gamma}{2}) - \frac{\gamma}{2} = 90°.$$

A to je presne to, čo sme chceli ukázať, teda že $EP \perp CF$. Ostáva nám už len zamyslieť sa, či náš obrázok nemôže vyzerať nejak inak a kvôli tomu by niektoré uhly mohli mať inú veľkosť, no keď sa zamyslíme, zistíme, že inak vyzerať naozaj nemôže a tak sme spokojní.

Iné riešenie:

Z dôvodov symetrie nám stačí ukázať, že uhol EDF je pravý (rozmyslite si prečo). Na to nám stačí poznatok, že $|DB| = |EB| = |BF|$ (čo sa dá ľahko ukázať, spravili sme to už vyššie), teda body D, E a F ležia na kružnici so stredom v B a priemerom $|EF|$. Tým pádom bod D leží na Tálesovej kružnici nad priemerom EF a $|\sphericalangle EDF| = 90°$. Zo symetrie vyplýva, že aj $|\sphericalangle EKF| = 90°$, teda $EP \perp CF$.

Úloha č. 6: *Peťko má už premyslenú svoju stratégiu a je presvedčený, že isto nasledujúci turnaj vyhrá a stane sa najlepším šachistom na škole. Presvedčenie však nestačí – potrebuje riadny matematický dôkaz.*
Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $xyz \geq xy + yz + xz$. Dokážte, že

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Riešenie: (opravovali Kika a Zajo)

Pozrime sa na to, čo vieme a na to, čo treba dokázať, a skúsme to nejako prepojiť. Vieme, že x, y, $z > 0$ (ináč by sme ich nevedeli odmocniť) a ešte aj $xyz \geq xy + xz + yz$. Chceme dokázať, že ak toto platí, tak platí aj $\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Upravíme tie nerovnosti tak, aby mali na ľavej strane (tej väčšej) to isté. Ten šikovný spôsob, ako to spraviť, je predpoklad vydeliť xyz a dokazovanú nerovnosť vydeliť $\sqrt{xyz}$. Toto môžeme veselo spraviť, pretože x, y a z sú z množiny kladných reálnych čísel. Naše nerovnosti budú po úprave takéto:

$$1 \geq \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}, \quad 1 \geq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Pokúsime sa ukázať, že

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}. \tag{1}$$

Ak tento odhad spojíme s predpokladom, dostávame po pár úpravách presne to, čo chceme dokázať.

$$1 \geq \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}},$$

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}},$$

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Tak poďme dokazovať nerovnosť (1).

A už stačilo zlomkov, čo poviete? Pre prehľadnosť si označme

$$\frac{1}{x} = a, \quad \frac{1}{y} = b \quad \text{a} \quad \frac{1}{z} = c.$$

Dokazovaná nerovnosť po preoznačení vyzerá nasledovne:

$$a + b + c \geq \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab},$$

$$2a + 2b + 2c \geq 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{ab},$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b + a - 2\sqrt{ac} + c + b - 2\sqrt{bc} + c \geq 0.$$

Celú nerovnosť sme zdvojnásobili, čo sa nám hneď v ďalšom kroku zišlo. Mnohokrát sa šikovne dokazuje, že niečo je ≥ 0. práve preto sme si to upravili do tvaru, kde na pravej strane máme 0.

Chýba nám už len čerešnička na torte, áno, je to tak, naozaj tam je súčet troch druhých mocnín.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0.$$

Druhá mocnina je vždy väčšia alebo rovná nule, teda aj ich súčet je väčší alebo rovný nule. Keďže všetky použité úpravy boli ekvivalentné, dokázali sme, čo bolo treba.

Poznámka na koniec, niektorí ste si možno všimli, že nerovnosť $a+b+c \geq \sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}$, sú tri sčítané AG nerovnosti:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \quad \text{a} \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}.$$

Dôkaz nerovnosti (1) bolo možné postaviť aj na tomto fakte.

Úloha č. 7: *Žiaden zápas Peťka nezaskočil. Dokonca nemal žiaden stres ani pri zápase, ktorý sa odohrával na šachovnici rozmerov $2n \times 2n$, kde n je prirodzené číslo.*
V jednom okamihu si Peťko všimol, že na šachovnici sú figúrky rozmiestnené tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je nepárny počet figúrok.[1] *Dokážte, že počet figúrok na čiernych políčkach je párny.*

Riešenie: (opravovali Slavo a Dominik)
Bez ujmy na všeobecnosti, nech je ľavé dolné políčko biele (ak by nebolo, tak šachovnicu otočíme o 90°).

Označme si:

1. a počet figúrok na políčkach zároveň v nepárnych riadkoch a nepárnych stĺpcoch.
2. b počet figúrok na políčkach zároveň v nepárnych riadkoch a párnych stĺpcoch.
3. c počet figúrok na políčkach zároveň v párnych riadkoch a nepárnych stĺpcoch.

Počet figúrok na čiernych políčkach zodpovedá súčtu $b+c$.

Keď sčítame počet figúrok v nepárnych stĺpcoch (sčítame n nepárnych čísel), dostaneme číslo s rovnakou paritou ako n. Daný súčet je $a+c$.

Analogicky, keď sčítame počet figúrok v nepárnych riadkoch (sčítame n nepárnych čísel), dostaneme číslo s rovnakou paritou ako n. Daný súčet je $a+b$.

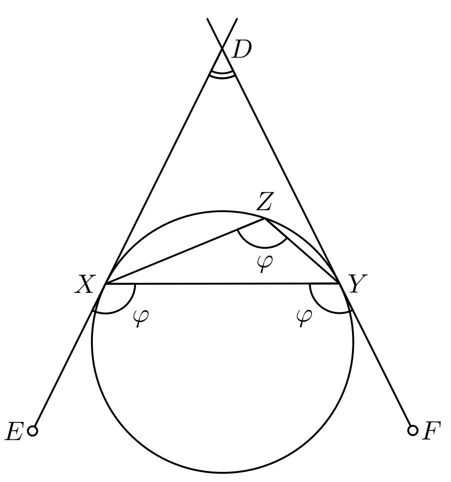
Súčty $a+b$ aj $a+c$ majú oba rovnakú paritu (ako n). Preto ich súčet $2a+b+c$ je párny. Súčet $b+c$ je teda párny, čo bolo treba dokázať.

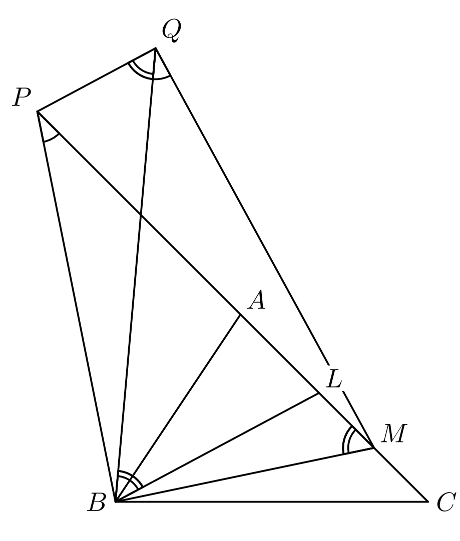
Úloha č. 8: *Čakanie na vyhlásenie výsledkov je zdĺhavé, tak sa Peťko zahľadel na jeden pekný obraz a rozmýšľal, aké pekné veci na ňom platia.*
Na obraze sa nachádza trojuholník ABC s bodom L na strane AC takým, že BL je os uhla ABC. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod úsečky CL. Dotyčnica v bode B ku kružnici opísanej trojuholníku ABC pretína polpriamku CA v bode P. Dotyčnice cez body B a M ku kružnici opísanej trojuholníku BLM sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že priamka PQ je rovnobežná s priamkou BL.

Riešenie: (opravovali Pedro a Vodka)
Označme si veľkosti uhlov štandardne: $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Vieme, že $|\sphericalangle CBL| = \beta/2$. Potom z trojuholníka BLC

$$|\sphericalangle BLC| = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma = 90° + 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Predpokladajme, že tento uhol je väčší ako pravý (tzn., že $\alpha > \gamma$, a teda $|AB| \leq |BC|$). Z vety o úsekovom uhle vyplýva, že $|\sphericalangle ABP| = \gamma$. Potom ale $|\sphericalangle BPC| = 180° - 2\gamma - \beta = \alpha - \gamma$.





[1] Figúrok na šachovnici môže byť ľubovoľne veľa. Na každom políčku sa nachádza najviac jedna figúrka.

Predstavme si kružnicu a v nej uhol φ nad nejakou tetivou XY, ktorý je väčší ako pravý. Potom z vety o úsekovom uhle budú veľkosti uhlov YXE a XYF rovné φ. Ich susedné uhly YXD a XYD budú mať veľkosť $180° - \varphi$. Preto uhol XDY, ktorý zvierajú dotyčnice bude $2\varphi - 180°$. Navyše vďaka tomu, že uhly YXE a XYF sú tupé, bude bod D ležať v polrovine XYZ.

Toto sa dá využiť v trojuholníku BLM. Čiže dotyčnice BQ a MQ ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku budú zvierať uhol veľkosti $|\sphericalangle BQM| = 2|\sphericalangle BLC| - 180° = \alpha - \gamma$. Navyše, tu jasne vidno, že bod Q bude ležať v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku BM ako bod P.

Keďže zjavne $|\sphericalangle BPA| = |\sphericalangle BQM|$, tak z vety o obvodovom uhle vyplýva, že body B, M, Q, P ležia na kružnici. Potom opäť z vety o obvodovom uhle vyplýva, že uhly BQP a BMA sú obvodové, a teda aj rovnako veľké.

Na dôkaz tvrdenia (s predpokladom, že $|\sphericalangle BLC| > 90°$) stačí ukázať rovnosť uhlov BML a LBQ. Ak sa nám ju totiž podarí ukázať, tak sme vlastne ukázali, že striedavé uhly LBQ a BQP majú rovnakú veľkosť. To už implikuje požadovanú vlastnosť, že priamky PQ a BL sú rovnobežné. Táto rovnosť je ale v podstate zrejmá, pretože priamo vyplýva z vety o úsekovom uhle.

Ak platí $|\sphericalangle BLC| = 90°$, tak $\alpha = \gamma$. Z toho vyplýva, že dotyčnica v bode B ku kružnici opísanej trojuholníku ABC bude rovnobežná s priamkou AC (pretože trojuholník ABC bude rovnoramenný so základňou AC). Z toho vyplýva, že tieto dve priamky sa nepretnú, a teda úloha nemá význam.

V prípade, že $|\sphericalangle BLC| < 90°$, tak veľkosti uhlov BPA a BQM nám vyjdú záporné, z čoho vyplýva, že priesečníky P a Q vzniknú v opačnej polrovine podľa priamky BL. No ale to je v spore so zadaním, kde sa píše, že bod P má pretnúť polpriamku CA (v prípade, že by ste si predsa len chceli pozrieť aj riešenie tohto prípadu, pozrite si videovzorák).

Úloha č. 9: *Po náročných zápasoch sa Peťko stal šachovým šampiónom školy. Ako prvú cenu dostal* 2016 *cukríkov, čo je naňho priveľa. Rozhodol sa preto, že sa s nimi podelí so svojou sestrou Zuzkou, a to nasledujúcim spôsobom. Peťko rozmiestni nepárny počet krabíc po obvode kruhu a rozdelí do krabíc* 2016 *cukríkov. Potom si Zuzka zoberie jednu z krabíc so všetkými cukríkmi v nej. Peťko si následne vyberie polovicu zvyšných krabíc tak, aby spolu žiadne dve z nich nesusedili a zoberie si z nich cukríky. Peťko si chce zobrať aspoň k cukríkov. Nájdite najväčšie celé číslo k, pre ktoré je toho vždy schopný, bez ohľadu na to, čo Zuzka spraví.*

Riešenie: (opravovali Marek a Mišo)

Peťko si vie vždy zobrať aspoň polovicu cukríkov. Zvládne to napríklad tak, že dá do niektorých dvoch krabíc po 1008 cukríkov a ostatné nechá prázdne. Zuzka vie maximálne zobrať jednu z tých dvoch krabíc a určite ostane aspoň polovica cukríkov vo zvyšnej.

Ukážeme si, že viac cukríkov sa získať nedá, teda že pre ľubovoľné rozmiestnenie cukríkov a ľubovoľný počet krabíc vie Zuzka vybrať krabicu tak, aby v oboch skupinách krabíc z ktorých si Peťko vyberá bolo nanajvýš 1008 cukríkov.

Druhú časť si ukážeme sporom, teda budeme (mylne) predpokladať, že Peťko vie rozložiť cukríky takým spôsobom, že nech Zuzka vyberie ľubovoľnú krabicu, tak jedna z dvoch skupín krabíc ktoré si môže Peťko zobrať má aspoň 1009 cukríkov.

Zaostrime preto na to, aké má Peťko možnosti výberu. Keď si Zuzka vyberie nejakú krabicu, Peťko si zoberie polovicu zvyšných, ktoré navyše nemajú žiadnu susednú dvojicu. Predpokladáme, že jedna skupina krabíc má viac ako polovicu cukríkov. Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme povedať, že je to skupina, ktorá obsahuje krabicu vľavo od tej, ktorú si vybrala Zuzka.

Teraz sa pozrime, ako by vyzerala situácia, keby Zuzka vybrala krabicu o jedno miesto vpravo. Väčšiu skupinu to neovplyvní, akurát teraz obsahuje krabicu napravo od krabice vybranej Zuzkou. Skupina naľavo od Zuzkinej krabice, označme si ju L, teda obsahuje menej ako polovicu cukríkov. Všimnite si, ako sa zmenila pozícia väčšej skupiny vzhľadom na krabicu vybratú Zuzkou zo strany na stranu, konkrétne z ľavej strany na pravú.

Keby si Zuzka vybrala krabicu ešte o jedno vpravo, zase by skupina krabíc s väčším množstvom cukríkov bola naľavo. Predtým totiž skupina L naľavo mala menej ako polovicu cukríkov a tú sme neovplyvnili, keď si Zuzka zobrala o krabicu vpravo. Tým pádom zvyšok musí mať viac ako 1008 cukríkov (lebo predpokladáme, že vždy aspoň jedna skupina je nadpolovičná).

A tu prichádzame k sporu. Keď zoberieme postupne všetky krabice v kruhu, tak skupina s väčším počtom cukríkov má vždy susednú krabicu napreskačku vľavo alebo vpravo. Krabíc je však nepárny počet, takže keď prejdme celé kolečko zistíme, že nielen skupina s krabicou vpravo musí mať viac ako polovicu cukríkov, ale aj skupina s krabicou vľavo. A to je spor, lebo nemôžeme mať dve skupiny s viac ako polovicou cukríkov.

Preto musí existovať krabica, ktorú keď si Zuzka vyberie, tak Peťkovi ostanú na výber skupiny krabíc, v ktorých bude nanajvýš 1008 cukríkov.

Úloha č. 10: *Peťko nemá žiaden nápad, ako by vyriešil túto úlohu. Viete ju vyriešiť vy?*
Nájdite všetky dvojice celých čísel (p, m), kde p je prvočíslo, také, že platí

$$p^3 + m(p + 2) + 4^p = m^2 + p + 1.$$

Riešenie: (opravovali Marián a Jožo)
Na zoznámenie sa s úlohou môžeme na začiatok dosadiť $p = 2$. Dostaneme tak po úprave kvadratickú rovnicu

$$m^2 - 4m - 21 = 0$$

s riešeniami $m = -3$ a $m = 7$. Podobne môžeme skúsiť za p dosadzovať ďalšie prvočísla, ale žiadne riešenia nedostaneme. Ako však zdôvodnime, že pre $p \neq 2$ neexistujú riešenia? Všetky prvočísla rôzne od 2 sú nepárne, a to môžeme využiť. Pozrime sa v zadanej rovnici na zvyšky po delení dvomi. Pre nepárne prvočíslo p platí

$$1 + m(1 + 0) + 0 \equiv m^2 + 1 + 1 \pmod 2.$$

Po úprave dostaneme $1 + m \equiv m \pmod 2$ a z toho $1 \equiv 0 \pmod 2$.[2] Tu nastáva spor, a teda rovnica nemá riešenie pre nepárne p. Takže jediné dve vyhovujúce dvojice (p, m) sú $(2, -3)$ a $(2, 7)$.

Iné riešenie:
(Podľa niektorých riešiteľov.) Na rovnicu zo zadania sa vieme pozrieť ako na kvadratickú rovnicu s premennou m a paremetrom p. Preto si vieme m vyjadriť ako

$$m = \frac{p + 2 \pm \sqrt{4^{p+1} + p^2 + 4p^3}}{2}.$$

Aby m bolo celé číslo, musí byť $\sqrt{4^{p+1} + p^2 + 4p^3}$ tiež celé číslo, teda $4^{p+1} + p^2 + 4p^3$ musí byť štvorcom (druhou mocninou celého čísla). Číslo $4^{p+1} = (2^{p+1})^2$ je štovrec. Najbližší väčší štvorec je $(2^{p+1} + 1)^2 = 4^{p+1} + 2^{p+2} + 1$. Keďže $4^{p+1} + p^2 + 4p^3 > 4^{p+1}$, tak musí platiť $4^{p+1} + p^2 + 4p^3 \geq 4^{p+1} + 2^{p+2} + 1$. Túto nerovnosť ekvivalentne upravíme na

$$p^2 + 4p^3 - 1 \geq 2^{p+2}.$$

Keď sa nad tým zamyslíme, tak pri veľkých hodnotách p bude pravá strana rásť stále viac (aj keď sa to spočiatku nezdá) a nerovnosť prestane platiť. Preto dokážeme, že pre všetky prvočísla $p \geq 11$ platí

$$p^2 + 4p^3 - 1 < 2^{p+2}. \tag{1}$$

Keďže všetky prvočísla sú prirodzené čísla, dokážeme platnosť nerovnosti (1) rovno pre všetky prirodzené čísla p väčšie ako 11. Na to môžeme využiť matematickú indukciu.

Pre $p = 11$ dostávame $5444 < 8192$ a nerovnosť platí. Predpoklajme teraz, že nerovnosť (1) platí pre nejeké p. Keďže pravá strana sa vždy zdvojnásobuje, stačí nám ukázať, že

$$(p + 1)^2 + 4(p + 1)^3 - 1 \leq 2(p^2 + 4p^3 - 1). \tag{2}$$

To po roznásobení upravíme na

$$11p^2 + 14p + 6 \leq 4p^3.$$

Keďže $p \geq 11$, platí

$$4p^3 \geq 4 \cdot 11p^2 \geq 11p^2 + 363p \geq 11p^2 + 14p + 349 \cdot 11 > 11p^2 + 14p + 6.$$

Porovnaním prvého a posledného výrazu dostaneme $4p^3 > 11p^2 + 14p + 6$, z čoho vyplýva dokazovaná nerovnosť (2). Keď dáme nerovnosť (2) dohromady s indukčným predpokladom (1), dostaneme

$$(p + 1)^2 + 4(p + 1)^3 - 1 \geq 2(p^2 + 4p^3 - 1) \geq 2 \cdot 2^{p+2} = 2^{p+3},$$

z čoho už zjavne vyplýva platnosť nerovnosti (1) pre $p + 1$. Ukázali sme teda, že pre všetky prirodzené čísla (a teda aj pre všetky prvočísla) $p \geq 11$ je číslo $4^{p+1} + p^2 + 4p^3$ medzi dvoma za sebou idúcimi štvorcami. Preto nemôže byť štvorcom a teda m nebude celé číslo. Ostávajú nám overiť prvočísla 2, 3, 5 a 7, ktoré sú menšie ako 11.

- Pre $p = 2$ máme pod odmocninou 100, čo je štvorec. Získame tak riešenia $m = -3$ a $m = 7$.
- Pre $p = 3$ dostávame pod odmocninou 373, čo nie je štvorec.
- Pre $p = 5$ dostávame pod odmocninou 4 621, čo nie je štvorec.
- Pre $p = 7$ dostávame pod odmocninou 66 957, čo nie je štvorec.

[2] Ak sa s takýmito zápismi nekamarátite, rozlíšte dva prípady, kedy je m párne a nepárne. V oboch prípadoch určte paritu ľavej a pravej strany rovnice a presvedčte sa, že sú rôzne.

Komentár: Za úlohou s číslom 10 sa v tejto sérii skrývala nezvyčajne ľahká úloha. Mnohí riešitelia v nej šikovne využili paritu. Iní sa trápili s drsnejšími vecami, ako je aj ilustrované v druhom riešení. Avšak tí, čo úlohu ani neskúšali, môžu ľutovať, o čo prišli :). Preto sa treba pozerať na všetky úlohy a nebáť sa niektorých len preto, že majú veľké číslo :).

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Adam Dominik	2.	GJH BA	3	9	9	9	9			9		45	45
1.	Kebis Pavol	2.	GJH BA	4	9	9		9		9	9		45	45
1.	Kollár Pavol	2.	Gamča BA	3	9	9	9		9		9		45	45
1.	Krajčoviechová Lucia	1.	GJH BA	2	9	9	9		9		9		45	45
1.	Melicher Martin	2.	GPoš KE	2	9	9	9	9		9	9		45	45
1.	Mišiak Dávid	2.	GJH BA	4	9	9	9	9	9	9	9		45	45
1.	Olšák Radek	2.	Mensa	2	9	9		9	9	9			45	45
1.	Poturnay Marián	2.	GPdC PN	4	9	9	9	9	9	5	9		45	45
1.	Sásik Tomáš	3.	Gamča BA	6		9	9	9	9	8	9		45	45
1.	Števko Martin	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9			9		45	45
1.	Vištanová Laura	4.	Gmaď KE	6		9	9	9	9		9		45	45
12.	Fülöp Jozef	1.	Gamča BA	2	8	9	9	9			9		44	44
12.	Krajči Samuel	2.	GAlej KE	4		9	9	9	8		9		44	44
12.	Marko Alan	3.	LEAF	5		9	9	9	9	8			44	44
12.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	2	9	9	9	8			9		44	44
16.	Glevitzká Štefánia	2.	GVBN PD	4	9	9	9	9			7		43	43
17.	Jóža Bohdan	2.	GJH BA	4	9	9		9		5	7		39	39
17.	Mráz Michal	2.	ŠPMNDG BA	4	9	9		9		3	9		39	39
19.	Machalová Monika	2.	GJH BA	4	9	9		9		1	9		37	37
19.	Moško Matej	2.	Gamča BA	4	9	9	9	1			9		37	37
19.	Ralbovský Peter	4.	GJH BA	9			9	9	7	3	9		37	37
22.	Dlugošová Michaela	3.	GKuk PP	6		9	9	9	0		9		36	36
22.	Dujava Jonáš	2.	SPŠE Prešov	3	9	9	9				9		36	36
22.	Ďuračková Mária	2.	GJH BA	4	9	9				9	9		36	36
22.	Klein Pavol	2.	GPdC PN	4	9	9	9				9		36	36
22.	Onduš Peter	3.	ŠPMNDG BA	5		9	9	9			9		36	36
22.	Záhorský Ákos	3.	G Šahy	5		9	9	9	9				36	36
28.	Molnár Michal	2.	Gamča BA	4	9	9				6	9		33	33
28.	Parada Matej	3.	Gamča BA	5		9	9			6	9		33	33
30.	Galíková Kristína	2.	ŠPMNDG BA	3	8	9		4			9		30	30
30.	Švihorík Tomáš	3.	GPár NR	6		9		9		3	9		30	30
30.	Winczer Tobiáš	2.	ŠPMNDG BA	4	9	9				3	9		30	30
33.	Poljovka Jakub	3.	GPár NR	6		9		9	2		9		29	29
34.	Brezinová Viktória	2.	GAlej KE	4	9	9	1				9		28	28
35.	Číž Jozef	2.	GJH BA	3	8	7				3	9		27	27
35.	Kuťková Sára	3.	Gamča BA	6		9	9				9		27	27
35.	Prokopová Tereza	2.	GJH BA	3	9	9					9		27	27
35.	Šuchová Martina	3.	GPár NR	5		9	0	9	0		9		27	27
39.	Zubčák Matúš	2.	GPár NR	2	9	9	0				8		26	26
40.	Studeničová Katarína	3.	GPOH DK	5		9	1	6		5	3		24	24
41.	Pajger Šimon	3.	GVO ZA	5		9		9			3		21	21
42.	Findra Michal	2.	GDT PP	3	3	9		4		1	3		20	20
42.	Kalašová Martina	2.	GJH BA	3	9	9			2				20	20
42.	Ondovčíková Lucia	2.	G Modra	3	7	9	0	1			3		20	20

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
45.	Krutek Robert	4.	GJGT BB	5		9					9		18	18
45.	Oravkin Richard	2.	1SG BA	4	9			9					18	18
47.	Jurečeková Alžbeta	2.	EGMT	2	6	9		1		1			17	17
47.	Kopfová Lenka	2.	G Mendel ČR	4		9			8				17	17
49.	Janeta Tomáš	3.	GAB NO	4	8	4							12	12
50.	Kofira Eduard	4.	BiG Sučany	4	1	2		2		0			5	5
51.	Ďurina Marián	3.	G Šurany	3							1		1	1
51.	Vranovský Michal	1.	GCSL BA	1		0				1			1	1

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Krajčoviechová Lucia	1.	GJH BA	2		9	9	9	9	9			45	45
1.	Macko Miroslav	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	9				45	45
1.	Matejková Tatiana	1.	GPár NR	1	9	9	9	9	9				45	45
1.	Melicher Martin	2.	GPoš KE	2		9	7	9	9	9	9		45	45
5.	Horanský Michal	1.	ŠPMNDG BA	1	8	9	9	9	9				44	44
5.	Juríková Róberta	2.	GVBN PD	2		9	8	9	9	9			44	44
5.	Koutenský Martin	1.	Gamča BA	1	9	9	8	9	9				44	44
5.	Tran Marek	1.	Gamča BA	1	8	9	9	9	9				44	44
9.	Pravda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	7				43	43
9.	Rampašeková Svetlana	1.	GPár NR	1	9	9	7	9	9				43	43
9.	Šumšala Tomáš	1.	GJH BA	1	9	9	8	8	9				43	43
12.	Calvo Natália	1.	GPár NR	1	8	9	7	9	9				42	42
12.	Kluvancová Hana	1.	GPár NR	1	8	9	7	9	9				42	42
14.	Bölcskei Matej	1.	GPár NR	1	8	9	6	9	9				41	41
14.	Vojtek Matej	1.	Gamča BA	1	7	9	7	9	9				41	41
16.	Nemcová Kornélia	1.	Gamča BA	1	9	9	9	3	9				39	39
17.	Barnišin Michal	3.	GJAR PO	3			5	9	9	9	6		38	38
17.	Kajan Michal	1.	1SG BA	1	9	9	9	2	9	1	2		38	38
17.	Stupta František	1.	GPár NR	1	8	9	3	9	9				38	38
20.	Adam Dominik	2.	GJH BA	3				9	9	9	9		36	36
20.	Hanus Matej	1.	GPoš KE	1	9	9	9		9				36	36
20.	Masrna Michal	1.	GPoš KE	1	9	9	9		9				36	36
23.	Bielaková Tánička	1.	Gamča BA	1	8	9	5	4	9				35	35
23.	Fülöp Jozef	1.	Gamča BA	2				8	9	9	9		35	35
23.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	2				9	9	9	8		35	35
23.	Paška Jaroslav	2.	ŠPMNDG BA	2		9	9	8	9				35	35
23.	Pisoňová Karolína	2.	G Bánovce	3			9	8	9		9		35	35
28.	Kuniak Adam	1.	Gamča BA	1	9	9	7		9				34	34
28.	Sabovčík Róbert	1.	GPoš KE	1	8	9	9	8					34	34
30.	Šavelová Gabriela	1.	Gamča BA	1	6	9		9	9				33	33
31.	Demková Karin	1.	GJH BA	1	9	9	3	1	9				31	31
31.	Chudíc Alex	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9		1		3		31	31
33.	Portašiková Jasmína	2.	GVar ZA	2		9	9		9		3		30	30
34.	Benková Nina	2.	GPdC PN	3			9	2	9		9		29	29
34.	Bobeničová Michaela	2.	GPoš KE	2		6	5	9	9		0		29	29
34.	Hronská Marianna	1.	BiG Sučany	1	7	9	7	3	3				29	29
34.	Řehulka Erik	1.	ŠPMNDG BA	1	9	0	9	9	2				29	29
38.	Kriek Patrik	2.	GĽŠ ZV	1		9	1	9	9	0			28	28
38.	Šánta Adam	2.	GJH BA	2		1	9	9	9				28	28
38.	Ždímalová Michaela	2.	GJH BA	2		9	7	3	9				28	28
41.	Baláž Lukáš	2.	G Bánovce	2			9	9			9		27	27
41.	Balogh Matúš	1.	GMA BA	1	8	1	9	9					27	27

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
41.	Dujava Jonáš	2.	SPŠE Prešov	3				9	9	9			27	27
41.	Hrmo Matej	2.	GPár NR	3			9	9	9				27	27
41.	Kalašová Martina	2.	GJH BA	3			9	9	9				27	27
41.	Kollár Pavol	2.	Gamča BA	3				9	9	9			27	27
41.	Královič Tomáš	2.	GPár NR	3			9	9	9				27	27
41.	Olšák Radek	2.	Mensa	2				9	9		9		27	27
41.	Prokopová Tereza	2.	GJH BA	3			9	9	9				27	27
50.	Farnbauer Michal	0.	Gamča BA	0	8	9			9				26	26
50.	Rusnák Patrik	1.	GAlej KE	1	5	6	4	9	2		1		26	26
50.	Staník Michal	2.	GĽŠ TN	3			8	9	9				26	26
50.	Szombuy Šimon	1.	GPár NR	1	7	1	3	8	7				26	26
54.	Barančíková Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	4		0		3		25	25
54.	Černíková Jana	2.	GJH BA	2		9	7	9					25	25
54.	Sládečková Laura	2.	GVar ZA	2		9	7		9				25	25
57.	Genčur Andrej	1.	GAM TT	1	8	4		2	9	1			24	24
57.	Rosinsky Juraj	2.	I de Lancy	3			8	3	9		4		24	24
59.	Ganz Tomáš	1.	SPŠSDSJ TT	1	9	9	4	1					23	23
60.	Galíková Kristína	2.	ŠPMNDG BA	3				8	9		4		21	21
60.	Macáková Eliška	-3.	SZS CENADA BA	-3	8	9	1	2		1	0		21	21
62.	Belák Tomáš	2.	GAV LV	3			9	9	2	0			20	20
63.	Cinová Tatiana	2.	GPár NR	3			1	9	9				19	19
63.	Jurečeková Alžbeta	2.	EGMT	2			3	6	9		1		19	19
65.	Tomášik Ondrej	1.	GJGT BB	1	8	6	1		2	1	1		18	18
65.	Zubčák Matúš	2.	GPár NR	2				9	9	0			18	18
67.	Ghirbaková Karin	2.	Gamča BA	2		9		0	8		0		17	17
67.	Chalúpek Adam	1.	Gamča BA	1	7	6	4	0	0	0	0		17	17
67.	Ondovčíková Lucia	2.	G Modra	3				7	9	0	1		17	17
67.	Tarča Matej	1.	GPoš KE	1	8	9							17	17
67.	Vranovský Michal	1.	GCSL BA	1	8	9			0				17	17
72.	Findra Michal	2.	GDT PP	3				3	9		4		16	16
72.	Grigová Natália	1.	Gamča BA	1	5	9			2				16	16
72.	Hluško Jakub	2.	ŠPMNDG BA	2		7	9						16	16
72.	Priesol Matej	1.	ŠPMNDG BA	1	6	0	7	2	1				16	16
76.	Barla Adam	1.	GJGT BB	1	8	0	7			0	0		15	15
76.	Číž Jozef	2.	GJH BA	3				8	7				15	15
76.	Krásny Matej	2.	ŠPMNDG BA	2		6			9				15	15
76.	Novák Samuel	1.	GPoš KE	1	6	9							15	15
80.	Pajúnková Anežka	1.	GMH Trstená	1	9		1	2					12	12
80.	Pozsonyi Karol Rudolf	2.	GBil BA	3			3	3	6		0		12	12
82.	Letenayova Nina	2.	GJH BA	2		9			2				11	11
83.	Halama Andrej	1.	GVO ZA	1	8	0	1	1		0	0		10	10
84.	Funková Veronika	3.	GLN SE	3					9				9	9
84.	Ganzová Veronika	3.	GAM TT	3			4	2	2		1		9	9
84.	Pankuch Andrej	1.	GAlej KE	1		9							9	9
84.	Sojka Peter	1.	GJCh BR	1	9								9	9
84.	Starovič Martin	1.	Gamča BA	1		9					0		9	9
89.	Géciová Alexandra	1.	GJH BA	1	7			1					8	8
89.	Magula Daniel	3.	PiarG NR	1				8					8	8
91.	Balheim Boris	2.	1SG BA	2		3	3	1					7	7
92.	Michálková Júlia	1.	GJH BA	1	5								5	5
92.	Stásiniak Šimon	3.	GLN BA	3			2	3		0	0		5	5
94.	Fojtová Gabriela	1.	GFGL BA	1	4			0		0			4	4
95.	Feketeová Viola	2.	GBST LC	3			1		1				2	2