Vzorové riešenia 2. série zimnej časti KMS 2016/2017

Úloha č. 1: *V mestečku Algebrovo nemajú nikoho, kto by vedel násobiť veľké čísla. Nevedia tak vyriešiť nasledujúci problém.*
Určte ciferný súčet súčinu $99\ldots9 \cdot 44\ldots4$. *Oba činitele sú 2016-ciferné.*

Riešenie: (opravovala Kika)
Chceme zistiť ciferný súčet čísla $99\ldots9 \cdot 44\ldots4$. Najprv zistíme, ako vyzerá, a potom spočítame jeho ciferný súčet. Číslom tvaru $99\ldots9$ sa nenásobí ideálne (podobne ani $44\ldots4$), preto spravíme takúto fintu: číslo $99\ldots9$ zapíšeme ako $100\ldots0-1$, čo vieme napísať aj ako $10^{2016}-1$. Teraz nám stačí zistiť rozdiel $10^{2016}\cdot 44\ldots4-44\ldots4$. Uvedomme si, čo je $10^{2016}\cdot 44\ldots4$ za číslo. Je to $44\ldots400\ldots0$. Tak a teraz bez hanby odčítajme tieto dve veľké čísla, tak ako nás to asi na základnej škole naučili, a síce pod seba.

$$\begin{array}{rr} & 44\ldots4400\ldots00 \\ - & 44\ldots44 \\ \hline & 44\ldots4355\ldots56 \end{array}$$

Oj, ja som tam rovno už aj výsledok napísala. Niečo si k nemu povieme. Posledná cifra výsledku je 6, lebo $10-4$ je 6. Zobrali sme si 1 z predchádzajúcej cifry, čo môžeme opraviť tak, že namiesto odčítania cifry 4 budeme tentokrát odčítavať cifru 5. Teda keď zisťujeme aká je cifra na mieste desiatok, tak odčítavame $10-5$. Toto sa nám vždy opakuje, až sa nám cifry v menšiteli minú. Ale aj pri odčítavaní prvej cifry čísla $44\ldots4$ sme si požičali 1 z prechádzajúcej cifry, takže ešte z poslednej štvorky menšenca $(44\ldots400\ldots0)$ treba odčítať 1, a tak tam vznikne 3. Od ostatných štvoriek už nemáme čo odčítať, a teda zostanú štvorkami. Naše výsledné číslo vyzerá: $44\ldots4355\ldots56$. Koľko je tam štvoriek a pätiek? Štvoriek je tam o jednu menej ako v pôvodnom čísle, pretože posledná štvorka sa zmenila pri odčítavaní na trojku. Teda ich je 2015. Podobne sme na tom s päťkami. Všetky päťky vznikli ako rozdiel $10-5$, teda z každej nuly menšenca, až na poslednú, od ktorej sme odčítali 4. Pätiek je takisto 2015. Takže naše číslo sa skladá z 2015 štvoriek, 1 trojky, 2015 pätiek a 1 šestky. Jeho ciferný súčet teda vieme spočítať ako $2015\cdot4+3+2015\cdot5+6=18144$. Ciferný súčet súčinu $99\ldots9\cdot44\ldots4$ je teda 18144.

Úloha č. 2: *Martin, ktorý je v Algebrove najlepší hráč kociek, si našiel zaujímavú hru. Povrch bielej kocky* $3\times3\times3$ *zafarbil nazeleno. Následne rozdelil kocku na 27 menších kociek* $1\times1\times1$. *Náhodne si vyberal jednu z kociek a hodil ňou.*

a) *Aká je pravdepodobnosť, že stena kocky ležiaca na zemi je zelená?*
b) *Martin si hodil kockou a uvidel 5 bielych stien (spodnú stenu nevidel). Aká je pravdepodobnosť, že si hodil kockou, ktorá má všetky steny biele?*

Riešenie: (opravovali Čeky a Mojo)
Ako prvé si všimneme, že všetky malé kocky majú dokopy $6\cdot27=162$ stien. A teraz prichádza najzaujímavejšia myšlienka celého riešenia: každá z týchto 162 stien má úplne rovnakú šancu, že bude v Maťovej hre naspodu. Kto tomu neverí, nech píli, farbí a hádže. Tak tisíckrát. Budeme radi, ak nám zašlete výsledky vašich experimentov. Pravdepodobnosť v tomto prípade teda vypočítame, ako pomer priaznivých možností ku všetkým možnostiam. Zelených stien je $6\cdot9=54$. Pravdepodobnosť toho, že naspodu bude zelená, je preto $54/162=1/3$.

Teraz si vyškrtnime všetky steny, ktoré nespĺňajú podmienku v b). Ostanú nám teda tie steny, ktoré majú okrem seba na kocke päť bielych stien. Takých je 6 zelených (sú to tie v strede stien veľkej kocky) a 6 bielych (všetky steny malej kocky, ktorá bola v strede veľkej kocky). Všetkých možností je teda $6+6=12$ a priaznivých je 6. Hľadaná pravdepodobnosť je teda $6/12=1/2$.

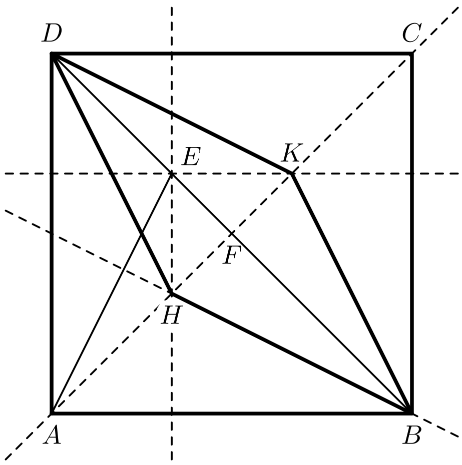
Úloha č. 3: *Námestie Algebrova má tvar štvorca $ABCD$. Na jeho uhlopriečke BD leží jeden osamelý bod E. Označme postupne H a K priesečníky výšok trojuholníkov ABE a ADE. Dokážte, že $BKDH$ je rovnobežník.*

Riešenie: (opravoval Samo, Ivka)

Chceme ukázať, že štvoruholník $BKDH$ je rovnobežník. Body B a D sú vrcholmi zadaného štvorca a body K, H vznikli ako priesečníky výpšok trojuholníkov, teda sú to ortocentrá. Na dôkaz tvrdenia použijeme vetu, že v rovnobežníku sa rozpoľujú uhlopriečky. Keďže uhlopriečka BD je aj uhlopriečkou štvorca $ABCD$ a druhá uhlopriečka KH leží na AC, bod E je presne v strede BD. Teda $|DF| = |BF|$.

Teraz treba to isté ukázať o uhlopriečke KH (že F je jej stred). Priamky KE a EH sú výšky v trojuholníkoch, teda platí, že KE je kolmé na AD a EH je kolmé na AB. Z toho nám ale vyplýva, že $KE||CD$ a $EH||AD$. Vďaka týmto rovnobežnostiam vieme: $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle EKH|$ a $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle KEH|$. Teda trojuholníky ACD a HKE sú podľa vety (uu) podobné. Keďže trojuolník ACD je rovnoramenný, tak bude musieť byť rovnoramenný aj trojuholník HKE. Pozrime sa teraz na ich výšky. V trojuholníku ACD je výškou úsečka DF. Keďže vrchol E trojuholníka HKE leží na tejto úsečke, výškou v HKE bude úsečka EF. Pretože trojuholníky sú podobné, tak ak F je stred základne AC, bude musieť byť aj stredom HK, teda ju rozpoľuje.

Ukázali sme teda, že v štvrouholníku $BKDH$ sa rozpoľujú uhlopriečky. Z toho vyplýva, že $BKDH$ je rovnobežník, čo bolo treba dokázať.



Obr. 1

Úloha č. 4: *Ako v každom meste, aj v Algebrove majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet. Dokonca sa ňou chvália, že je najlepšia spomedzi okolitých miest.*
V meste je n klebetníc. Na začiatku vie každá z nich jednu klebetu. Všetky klebety sú navzájom rôzne. Klebety sa šíra SMS-kami. Odosielateľka pošle v jednej SMS-ke všetky klebety, ktoré vie, nejakej inej klebetnici. Pre každé prirodzené číslo n určte, koľko najmenej SMS-iek je potrebných na to, aby každá klebetnica vedela o všetkých klebetách. Nezabudnite zdôvodniť, prečo menej SMS-iek nestačí.

Riešenie: (opravoval Iveta, Adam)

Našou úlohou je zistiť a následne dokázať, koľko najmenej SMS treba, aby všetky klebetnice poznali všetky klebety. Ako prvé si musíme uvedomiť, že SMS sa posielajú postupne, a zároveň po jednej SMS sa zmení počet poznaných klebiet iba jednej klebetnici. Z toho vyplýva, že v určitom momente bude práve jedna klebetnica poznať všetky klebety. Určite vieme, že do tejto chvíle muselo byť poslaných aspoň $n-1$ SMS, jedna od každej z klebetníc, okrem tej, ktorá pozná všetky klebety. Ak by ich bolo $n-2$ alebo menej, mali by sme aspoň 2 klebetnice, z ktorých žiadna neposlala SMS, teda aspoň 2 klebety, ktoré pozná iba jedna klebetnica. Nebolo by teda možné, aby jedna poznala všetky. Potom potrebujeme ešte aspoň $n-1$ ďalších odoslaných SMS, lebo ak jedna pozná všetky, zostáva ešte $n-1$ klebetníc, ktorým treba zmeniť počet poznaných klebiet, to je ďalších $n-1$ SMS. Dokopy teda potrebujeme aspoň $2n-2$ SMS.

Aby sme dokázali, že taký systém posielania SMS naozaj existuje, predstavme si situáciu, keď prvých $n-1$ klebetníc pošle SMS n-tej klebetnici. Poslali sme $n-1$ SMS a máme práve jednu klebetnicu, ktorá pozná všetky klebety. Teraz n-tá klebetnica pošle SMS každej z $n-1$ zostávajúcich klebetníc, teda každá klebetnica vie všetky klebety. Tým sme dokázali, že naozaj stačí $2n-2$ SMS.

Iné riešenie:

Povedzme si, že máme n klebetníc, ktoré si medzi sebou nejako posielajú svoje klebety a nakoniec poznajú všetky klebetnice všetky klebety. Predpokladajme, že to robia najefektívnejšie, ako sa len dá. Počet SMS, ktoré si medzi sebou poslali, označme k.

Ako sa zmení k, keď sa k nim pridá nová klebetnica? Zjavne bude musieť nová klebetnica poslať aspoň jednu SMS – aby sa jej klebeta dostala do obehu. Taktiež bude musieť aspoň jednu SMS prijať, aby mohla mať všetky ostatné klebety. To znamená, že k sa zväčší aspoň o 2. Vieme zabezpečiť aby sa k zvýšilo s novou klebetnicou práve o dva?

Vieme. Na začiatku pošle nová klebetnica niektorej starej svoju klebetu – to je jedna správa navyše. Staré klebetnice si ďalej posielajú svoje klebety tak, ako predtým. Jediný rozdiel je, že keď stará klebetnica, ktorá dostala klebetu od novej, posiela svoju vlastnú klebetu, priloží k nej novú klebetu. Obe klebety sa ďalej posielajú spolu, čiže v podstate splynú a celkový počet SMS sa nezmení. Na konci, keď už všetky klebetnice vedia všetko, pošle jedna z nich všetky klebety novej klebetnici, a tým sa k zvýši ešte o jedna.

Ukázali sme tak, že keď príde do skupiny klebetníc nová, najmenší počet SMS, ktoré si musia poslať, sa zvýši o dva. Teraz si zoberme prípad, kde máme len dve klebetnice, $n = 2$. Riešenie je zjavné, jedna pošle svoju klebetu druhej a naopak, použijú tak 2 SMS. Keď k nim príde nová a $n = 3$, zvýši sa počet poslaných SMS o dva, čiže budú po novom potrebovať 4 SMS. Keď príde ďalšia, bude $n = 4$ a $k = 6$, pre $n = 5$ $k = 8$ a tak ďalej. S každou novou klebetnicou musí počet SMS stúpnuť o dva.

Keď teda dostaneme hocijaký počet klebetníc, môžeme si to predstaviť, že na začiatku sme mali dve a k nim sa postupne pridali ostatné (ak máme len jednu klebetnicu, zjavne žiadne SMS posielať nepotrebujeme). Ak je klebetníc n, na začiatku boli dve, ktoré potrebujú dve správy, plus pridalo sa $n - 2$ klebetníc, z ktorých každá potrebovala dve správy. To sčítame a voilà – máme riešenie: $2 + 2(n - 2) = 2n - 2$.

Úloha č. 5: *V jednom mestečku hľadajú zločincov, v inom zlato, v Algebrove však hľadajú čísla. Nájdite všetky prvočísla p, q, r také, že platí*

$$2^{p+1} + q^2 = r^2.$$

Riešenie: (opravoval Ľubo)

Poďme si rovnicu zo zadania trochu poupravovať. Ako prvé nás nabáda nechať mocninu čísla 2 na ľavej strane rovnice a obe druhé mocniny prvočísiel mať na pravej strane. Dostávame $2^{p+1} = r^2 - q^2$. Vidíme, že pravú stranu si vieme napísať v tvare súčinu a vnikne nám

$$2^{p+1} = (r - q) \cdot (r + q).$$

Všimnime si, že oba výrazy na pravej strane delia výraz 2^{p+1}, čo znamená, že aj ony samotné budú nejakou mocninou čísla 2. Môžeme preto napísať nasledovné:

- $r - q = 2^k$,
- $r + q = 2^{p-k+1}$.

A tu ako by nám niečo chcelo nahrať, že skúsme sčítať tieto dve rovnice, zbavíme sa tým q a snáď nám to niečo povie o r. Máme teda $2r = 2^{p-k+1} + 2^k$, čo si vieme celé predeliť ešte číslom 2. Vznikne nám

$$r = 2^{p-k} + 2^{k-1}.$$

To nám však o r toho veľa nepovedalo. Zamyslime sa však trochu. Nevieme niečo zistiť o exponente k, ktorý by nám jasne určil veľkosť výrazu $r - q$? Vieme! Keď sa totiž pozrieme na paritu tejto rovnice, uvedomíme si, že r bude určite nepárne. To vieme, nakoľko určite platí, že r je väčšie ako q. A keďže obe sú prvočísla, tak r bude aspoň 3. No a všetky prvočísla od väčšie alebo rovné 3 majú takú vlastnosť, že sú nepárne. To nám ale vraví, že aj pravá strana musí byť nepárna. Ľahko si môžete overiť, že p musí byť väčšie ako k, teda mocnina 2^{p-k} je vždy párna. A teda ak má byť pravá strana rovnice nepárna, musí byť nepárny práve výraz 2^{k-1}, čo nastáva práve vtedy, ak $k = 1$. Teraz už vieme že:

- $r - q = 2^k \wedge k = 1$, takže $r - q = 2$;
- $r + q = 2^{p-k+1} \wedge k = 1$, takže $r + q = 2^p$.

Z prvej rovnice si môžeme vyjadriť $r = q + 2$ (môžeme si všimnúť, že q bude tiež nepárne) a dosadíme do druhej rovnice. Dostaneme

$$2q + 2 = 2^p \quad \text{a teda} \quad q = 2^{p-1} - 1.$$

Analogicky dostaneme

$$2r - 2 = 2^p \quad \text{a teda} \quad r = 2^{p-1} + 1.$$

Tu ste už všetci, ktorí ste zriešili tretí príklad minulej série, šťastní, lebo viete, že mocniny čísla 2 dávajú po delení tromi vždy zvyšok buď jeden alebo dva. A teda r alebo q je vždy nejaký násobok trojky. Pre tých, ktorí nevedia o čo ide, si ukážeme niečo trochu iné. Zistime, akú paritu môže nadobúdať p. Dá sa ľahko overiť, že p musí byť nepárne. Pri pohľade na výraz, ktorému sa rovná q, vidíme, že exponent $p-1$ je vždy párny. Budeme sa teda zaujímať len o zvyšky párnych mocnín čísla 2 po delení tromi, čo je identické so zisťovaním zvyšku mocnín čísla 4 po delení tromi. Napíšme si 4^0 ako $3m+1$. Ak toto číslo vynásobíme štyrmi, dostaneme nasledovnú mocninu čísla 4, ktorú vieme napísať ako $4 \cdot (3m+1) = 12m+4 = 3(4m+1)+1$. Stačí si uvedomiť, že pri ďalších mocninách sa deje vždy to isté a síce, že niečo delitelné tromi bude stále delitelné tromi aj po vynásobení štyrmi a že zvyšok jeden bude po vynásobení štyrmi vždy štyri, čo vieme prepísať ako $3+1$, teda nám znovu zostane zvyšok jeden. Takže všetky mocniny čísla 4 dávajú po delení tromi zvyško jeden.

To ale znamená, že q bude vždy delitelné tromi, keďže tam sa práve ten zvyšok odpočíta. A aké poznáme prvočísla delitelné tromi? No jedine trojku samotnú, teda $q=3$, potom $r=5$ a dopočítame, že $p=3$. Jediným riešením rovnice zo zadania je teda usporiadaná trojica

$$(p,q,r) = (3,3,5).$$

__Úloha č. 6:__ *Algeborovské legendy rozprávajú o tajomnej podmnožine prirodzených čísel X, ktorú ešte nikto nikdy nevidel. Podľa legiend má nasledujúcu vlastnosť: Aritmetický priemer čísel v každej podmnožine Y množiny X je celé číslo. Dokážte, že množina X môže obsahovať práve* 2016 *rôznych čísel. Taktiež ukážte, že nie je možné, aby množina X obsahovala nekonečne veľa čísel.*

Riešenie: (opravoval Dominik)
Úlohu si rozdelíme na dve časti, pretože chceme dokázať dve rôzne tvrdenia.
Prvá časť. Chceme ukázať, že vieme nájsť množinu X takú, že počet jej prvkov bude 2016. Z toho vyplýva, že veľkosť jej podmnožiny Y môže byť od 1 po 2016. Keďže nás zaujíma aritmetický priemer podmnožiny Y, ktorý vyrátame ako podiel súčtu všetkých a počtu prvkov, stačí nám vytvoriť množinu X tak, aby každé číslo v nej bolo deliteľné každým celým číslom od 1 po 2016. To zvládneme napríklad tak, že za prvky množiny X vezmeme celočíselné násobky čísla 2016!.
Druhá časť. Teraz nás zaujíma, či množina X môže byť aj nekonečná. Najskôr však ukážme, že čísla v množine X musia mať rovnaký zvyšok po delení každým číslom n, ktoré môže predstavovať počet prvkov nejakej podmnožiny množiny X. Vezmime si dve podmnožiny veľkosti n, nazvime ich Y_1 a Y_2, v ktorých sú všetky prvky rovnaké až na jeden, ten nazvime a_1 pre podmnožinu Y_1 a a_2 pre podmnožinu Y_2. Je zrejmé, že prvkami a_1, a_2 môžu byť ľubovoľné prvky z množiny X.

Jednoznačne platí $S_1 - a_1 = S_2 - a_2$, kde S_1, respektíve S_2 sú súčty prvkov množín Y_1, respektíve Y_2. Na to, aby platilo aj $S_1 \equiv S_2 \equiv 0 \pmod{n}$, aby aritmetický priemer bol celé číslo, musí platiť aj $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$. Teda všetky prvky z množiny X musia mať rovnaký zvyšok po delení číslom n.

Keby množina X bola nekonečná, mohla by obsahovať podmnožiny ľubovoľnej veľkosti. Potom každý jej prvok by musel mať rovnaký zvyšok po delení ľubovoľným prirodzeným číslom. To však znamená, že by všetky prvky v tejto množine museli byť rovnaké. Pretože ak vezmeme ľubovoľné čísla a a b z množiny X, vždy vieme nájsť prvočíslo väčšie ako ktorékoľvek z nich. Teda zvyšky čísel a a b po delení tým prvočíslom budú a a b, o ktorých sme už ukázali, že musia byť rovnaké. Takto dostávame spor s tým, že množina X obsahuje nekonečne veľa rôznych čísel. Preto taká množina X, ktorý by obsahovala nekonečne veľa rôznych čísel, neexistuje.

__Úloha č. 7:__ *V Algebrove majú jeden nepríjemný zvyk. Miešajú tam hrušky s jablkami, teda presnejšie dĺžky strán s veľkosťami uhlov. V trojuholníku ABC so štandardným označením dĺžok strán a veľkostí uhlov dokážte, že platí*

$$60^\circ \le \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} < 90^\circ.$$

Riešenie: (opravoval Slavo, Zajo)
Bez ujmy na všeobecnosti, nech $a \ge b \ge c$ (ak by to tak nebolo, tak si môžeme zmeniť označenia strán, úloha sa nezmení). Keďže oproti najväčšej strane je najväčší uhol a oproti najmenšej strane je najmenší uhol, platí $\alpha \ge \beta \ge \gamma$.

V strednom člene nerovnosti máme uhly α, β, γ , vo zvyšných členoch máme uhly 60° a 90°. Chceme to zjednotiť. Keďže platí $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, môžeme nahradiť $60^\circ = \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$ a $90^\circ = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

Zadanie sme si nahradili ekvivalentným tvrdením

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \le \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Rozdelíme si nerovnosti na 2 časti. Chceme ukázať, že

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \le \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} \quad \text{a} \quad \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Dôkaz pravej nerovnosti:

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Prenásobíme nerovnosť kladným výrazom $2(a+b+c)$ a presunieme všetky členy na pravú stranu. Dostaneme

$$0<\alpha b+\alpha c-\alpha a+\beta a+\beta c-\beta b+\gamma a+\gamma b-\gamma c.$$

Vyňatím α, β, γ pred zátvorky získame:

$$0<\alpha(b+c-a)+\beta(a+c-b)+\gamma(a+b-c).$$

Keďže a, b, c tvoria trojuholník, platia pre ne trojuholníkove nerovnosti $(b+c-a)>0$, $(a+c-b)>0$, $(a+b-c)>0$. Výraz $\alpha(b+c-a)+\beta(a+c-b)+\gamma(a+b-c)$ má všetky zátvorky kladné, teda je určite väčší ako 0.

Dôkaz ľavej nerovnosti:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\leq\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}.$$

Analogicky, ako pri pravej nerovnosti, prenásobíme nerovnosť kladným výrazom $3(a+b+c)$ a presunieme všetky členy na pravú stranu. Dostaneme

$$0\leq 2\alpha a-\alpha b-\alpha c+2\beta b-\beta a-\beta c+2\gamma c-\gamma a-\gamma b.$$

Táto nerovnosť sa dá upraviť:

$$0\leq(a-b)(\alpha-\beta)+(a-c)(\alpha-\gamma)+(b-c)(\beta-\gamma),$$

$$0\leq(a-b)(\alpha-\beta)+(a-c)(\alpha-\gamma)+(c-b)(\gamma-\beta).$$

Keďže $a\geq b\geq c$ a zároveň $\alpha\geq\beta\geq\gamma$, výraz $(a-b)(\alpha-\beta)+(a-c)(\alpha-\gamma)+(c-b)(\gamma-\beta)$ má všetky zátvorky nezáporné, teda je aspoň 0.

Ukázali sme, že

$$60^\circ=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\leq\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{a+b+c}<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ.$$

Všetky úpravy, ktoré sme použili, boli ekvivalentné. Nerovnosti zo zadania sme tak dokázali.

Úloha č. 8: *Nie je žiaden Algebrovčan, ktorý by nepozal tamojšiu špecialitu – algebrovské čísla. Nech n je dané prirodzené číso. Algebrovské čísla sa označujú $A(i,j)$ a sú definované pre každú dvojicu nezáporných celých čísel (i,j) nasledovne: $A(0,j)=A(i,0)=0$, $A(1,1)=n$ a*

$$A(i,j)=\left\lfloor\frac{A(i-1,j)}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{A(i,j-1)}{2}\right\rfloor$$

pre všetky kladné celé čísla $(i,j)\neq(1,1)$.[1] Pre dané n určte, koľko existuje usporiadaných dvojíc prirodzených čísel (i,j) takých, že číslo $A(i,j)$ je nepárne.
Zápis $\lfloor a\rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.

Riešenie: (opravoval Pedro, Jožo)

Naše algebrovské čísla majú dve súradnice, i a j. Preto, ak si ich chceme nejako zapísať, môže nám pomôcť nekonečná dvojrozmerná tabuľká, v ktorej políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci bude mať súradníce (i,j) a bude predstavovať číslo $A(i,j)$. Na obrázku môžeme vidieť takúto tabuľku (resp. jej konečnú časť) pre $n=15$.

$i\backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	15	7	3	1	0
2	0	7	6	4	2	1
3	0	3	4	4	3	1
4	0	1	2	3	2	1
5	0	0	1	1	1	0

[1] Napríklad pre $n=47$ platí $A(2,1)=\lfloor 0/2\rfloor+\lfloor 47/2\rfloor=23$, $A(2,8)=0$, $A(4,7)=4$.

Budeme sledovať súčet algebrovských čísel na tých diagonálach tabuľky, pre ktoré platí $i + j = k$ pre nejaké celé nezáporné číslo k a danú diagonálu budeme označovať ako k-ta diagonála. Na druhej diagonále teda máme číslo $A(1, 1) = n$. Teraz sa pozrime na ľubovoľné algebrovské číslo $A(i, j)$. Toto číslo priamo ovplyvňuje hodnotu čísel $A(i + 1, j)$ a $A(i, j + 1)$, ktoré sú obe na $(k + 1)$-vej diagonále. K obom číslam prispieva hodnotou $\lfloor \frac{1}{2} A(i, j) \rfloor$.

Ak $A(i, j)$ je párne, tak

$$\left\lfloor \frac{A(i,j)}{2} \right\rfloor = \frac{A(i,j)}{2}.$$

Čiže párne $A(i, j)$ dokopy akoby „odovzdá“ ďalšej diagonále celú svoju hodnotu. Naopak, ak $A(i, j)$ je nepárne, potom

$$\left\lfloor \frac{A(i,j)}{2} \right\rfloor = \frac{A(i,j)}{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{teda} \quad 2\left\lfloor \frac{A(i,j)}{2} \right\rfloor = A(i,j) - 1.$$

Takže nepárne $A(i, j)$ „odovzdá“ ďalšej diagonále len hodnotu $A(i, j) - 1$. Z opačného pohľadu je jasné, že čísla na $(k + 1)$-vej diagonále závisia len od čísel na k-tej diagonále. Preto rozdiel medzi súčtom čísel na $(k + 1)$-vej a k-tej diagonále bude rovný práve počtu nepárnych čísel v k-tej diagonále.

Ak existuje diagonála (rôzna od nultej a prvej), na ktorej už budú len samé nuly, tak zrejme aj na každej ďalšej diagonále už budú len nuly. Teda súčet číslel na diagonálach klesol z čísla n (pre druhú diagonálu) na nulu. Ako sme vyššie ukázali, každé nepárne číslo v tabuľke tento súčet zmenšilo o 1. Preto na týchto diagonálach musí byť n nepárnych čísel. A keďže vo zvyšku tabuľky sú len párne nuly, všetkých nepárnych čísel v tabuľke bude tiež n. Stačí teda ukázať, že súčet čísel na diagonálach v konečnom čísle diagonály klesne na nulu.

Pre spor predpokladajme, že to tak nie je. To by ale znamenalo, že od istého momentu, povedzme od m-tej diagonály, už budú v každej diagonále s indexom aspoň m samé párne čísla. Označme j najmenší taký stĺpec, že políčko m-tej diagonály v stĺpci j je nenulové. Riadok, v ktorom sa toto políčko nachádza, označme i. Diagonála m obsahuje po $(j - 1)$-vý stĺpec iba nuly. Každá ďalšia diagonála tiež obsahuje po stĺpec $j - 1$ (vrátane) iba nuly, lebo vznikla súčtom 2 členov z predchádajúcej diagonály (o ktorých vieme, že sú nulové). Teda stĺpec $j - 1$ obsahuje počnúc $(i + 1)$-vým riadkom iba nuly.

Z toho ale vyplýva, že všetky čísla v j-tom stĺpci v riadkoch s číslom väčším ako i už budú iba dolnou celou časťou z polovice čísla nad ním. Keďže pre kladné číslo x platí $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor < x$, tak sa raz dopracujeme k nule. Lenže na nulu sa vieme dostať jedine z jednotky (rozmyslite si). To sme ale v spore s tým, že od m-tej diagonály už máme samé párne čísla.

Ukázali sme teda, že počnúc nejakou m-tou diagonálou budú vo všetkých diagonálach len samé nuly. Preto počet nepárnych čísel v tabuľke, čo je hľadaný počet nepárnych algebrovských čísiel, je n.

Komentár: Úloha sa dala riešiť aj tým, že sa budeme pozerať na to, ako sa zmení počet nepárnych čísel, ak zväčšíme n o 1, resp. o inú hodnotu. Je ľahké ukázať, že ak párne n zväčšíme o 1, dostaneme o jedno nepárne číslo viac. To sa môže ponúkať ako sľubná cesta. Na druhej strane, ukázať podobnú vec pre nepárne n je podstatne zložitejšie. Pri niektorých zvýšeniach n sa totiž pomenia všetky hodnoty v tabuľke. Treba sa preto pozrieť na to, ako sa tieto zmeny šíria tabuľkou a čo sa s nimi deje na párnych a nepárnych políčkach. Avšak riadne formulovať všetky detaily tohoto postupu je celkom náročné.

Úloha č. 9: *Jedna z ďalších miestnych legiend hovorí o jednom podivuhodnom čísle. Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Dokážte, že existuje prirodzené číslo $m > n^n$ také, že*

$$\frac{n^m - m^n}{n + m}$$

je prirodzené číslo.

Riešenie: (opravoval Marek, Mišo)

Riešení existuje viacero. Stačí však nájsť jedno a my ukážeme, že pre nepárne n vyhovuje $m = 2n^n - n$ a pre párne $n > 2$ vyhovuje $m = (n - 1)n^n - n$.

Najprv overme, či je zlomok

$$\frac{n^{2n^n - n} - (2n^n - n)^n}{2n^n}$$

pre nepárne n celé číslo. O druhom člene si všimnime, že $(2n^n - n)^n \equiv -n^n \pmod{2n^n}$. Zlomok bude celým číslom práve vtedy, keď bude celým číslom zlomok s $-n^n$ namiesto tohto člena. Ďalej vyberieme n^n pred prvý člen a dostaneme

$$\frac{n^n n^{2n^n - 2n} + n^n}{2n^n} = \frac{n^{2n^n - 2n} + 1}{2}.$$

Číslo n je nepárne a aj $n^{2n^n - 2n}$ je nepárne a keď sčítame dve nepárne čísla, dostaneme párne číslo, a to už je deliteľné dvoma.

Pre párne n dostávame zlomok
$$\frac{n^{(n-1)n^n-n} - ((n-1)n^n - n)^n}{(n-1)n^n},$$
ktorý analogicky upravíme na
$$\frac{n^{2n^n-2n} - 1}{n-1}.$$
Keďže $n \equiv 1 \pmod{n-1}$ a po umocnení zvyšok ostane 1, tak čitateľ dáva zvyšok 0 po delení menovateľom, takže je ním deliteľný. Aj druhý zlomok je teda celým číslom.

Všimneme si, že pre $n = 2$ potrebujeme podmienku overiť špeciálne, pretože $m = (n-1)n^n - n = 2$ a to nie je viac ako $n^n = 4$. Pre ostatné n je zrejmé, že $m > n^n$. Pre $n = 2$ vyhovuje $m = 5$ kde zlomok je $(2^5 - 5^2)/7 = 7/7$, teda to platí.

V ďalšej časti ukážeme, že zlomky sú nie len celé, ale aj prirodzené čísla. (Vynechanie tejto časti body nikomu neovplyvnilo.) Stačí nám už len ukázať, že čitateľ je kladný.

Nájdime $x > 1$ také, aby $m = xn$. Budeme potom vedieť z výrazu vyňať n. Odhadnime teraz čitateľ $n^m - m^n$.
$$n^m - m^n = n^{xn} - (xn)^n = n^n(n^{(x-1)n} - x^n) = n^n\left((n^{x-1})^n - x^n\right) > n^n\left((e^{x-1})^n - (x-1+1)^n\right) \geq 0$$
Posledná nerovnosť vyplýva zo známej (a pomerne slabej) nerovnosti $e^x \geq x + 1$.

Našli sme teda riešenie pre každé n.

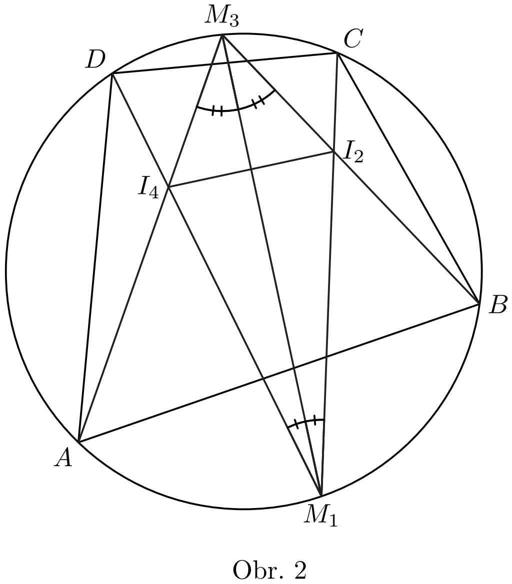
<u>Úloha č. 10:</u> *Vyznať sa v linkách MHD Algebrova nie je žiadna sranda. Môžete si ich skúsiť nakresliť. Body A, B, C, D ležia na kružnici k. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode K. Označme I_1, I_2, I_3, I_4 postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABK, BCK, CDK, DAK a M_1, M_2, M_3, M_4 postupne stredy oblúkov AB, BC, CD, DA kružnice k, tak aby body A, M_1, B, M_2, C, M_3, D, M_4 ležali na kružnici k v uvedenom poradí. Dokážte, že priamky M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 sa pretínajú v jednom bode.*

<u>Riešenie:</u> (opravovala Vodka)

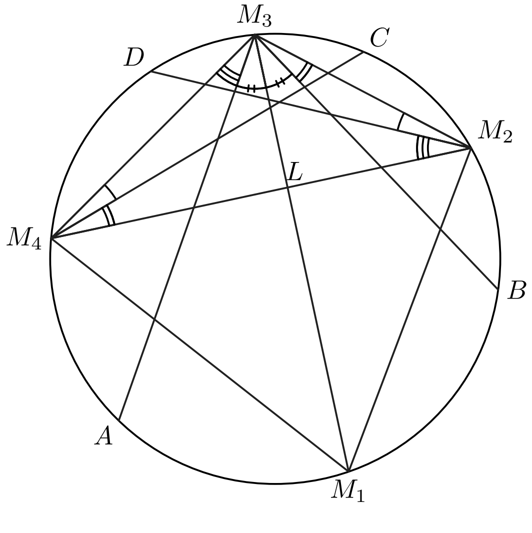
Máme ukázať, že štyri priamky sa pretínajú v jednom bode. Na to stačí ukázať to, že každé tri z nich sa pretínajú v jednom bode. Avšak je jasné, že ak ukážeme, že napr. priamky M_1I_1, M_2I_2, M_4I_4 sa pretínajú v jednom bode, tak úplne analogicky budeme vedieť dokázať, že aj ostatné trojice priamok sa pretínajú v jednom bode. Preto nám stačí ukázať len to, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode.

To ale nevyzerá ako jednoduchá úloha. Na začiatok môžeme začať s nejakými triviálnymi pozorovaniami. Napríklad vieme, že M_1 je Švrčkov bod oblúka AB, a preto sú DM_1 a CM_1 osi uhlov ADB a ACB. Ďalej vieme, že I_4 je stred vpísanej kružnice AKD, a preto musí ležať na osiach uhlov trojuholníka AKD – špeciálne na priamke DM_1. Tak isto leží aj na AM_3. Analogicky vieme dostať to, že $I_1 = AM_2 \cap BM_4$ a tiež $I_2 = CM_1 \cap BM_3$.

Keď si nakreslíme obrázok, tak sa zdá, že $I_2I_4 \parallel M_2M_4$. A teraz to dokážeme. Priamka M_1M_3 je os uhla AM_3B a aj uhla CM_1D (lebo M_1, M_3 sú Švrčkove body oblúkov AB, CD). To znamená, že trojuholníky $M_1M_3I_2$ a $M_1M_3I_4$ sú zhodné podľa vety *sus*. (Majú spoločnú stranu M_1M_3 a rovnaké uhly pri nej.) Preto sú osovo súmerné podľa priamky M_1M_3, a teda nutne $I_2I_4 \perp M_1M_3$ (obrázok 2).



Obr. 2



Obr. 3

Celkom známa vec je to, že $M_1M_3 \perp M_2M_4$. Z toho už potom vyplýva, že $M_2M_4 \parallel I_2I_4$. Pre istotu si to však dokážeme. Označme si L priesečník M_2M_4 a M_1M_3. Zrejme platí

$$|\sphericalangle M_2M_4M_3| + |\sphericalangle M_4M_3M_1| = |\sphericalangle M_2M_4C| + |\sphericalangle CM_4M_3| + |\sphericalangle M_4M_3A| + |\sphericalangle AM_3M_1| =$$

$$= |\sphericalangle M_2M_3B| + |\sphericalangle DM_2M_3| + |\sphericalangle M_4M_2D| + |\sphericalangle BM_3M_1| = |\sphericalangle M_4M_2M_3| + |\sphericalangle M_2M_3M_1|.$$

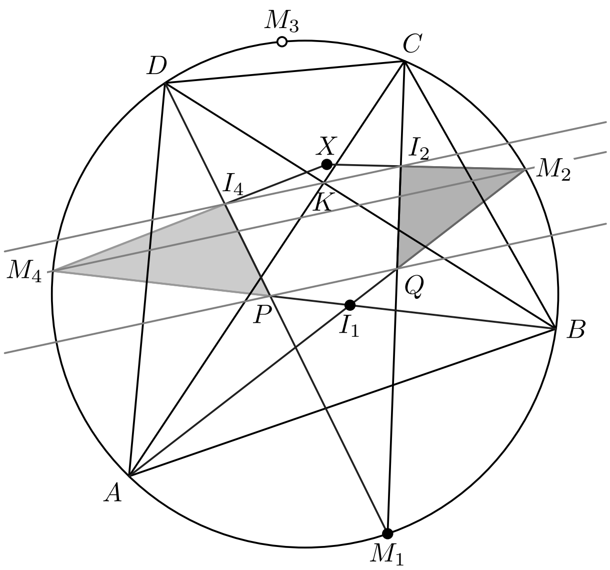
Využili sme to, že M_i sú stredy oblúkov, a preto obvodové uhly nad AM_1 a BM_1 (a ostatné analogické dvojice) sú zhodné. No my vieme, že $|\sphericalangle M_2M_4M_3| + |\sphericalangle M_4M_3M_1| + |\sphericalangle M_4M_2M_3| + |\sphericalangle M_2M_3M_1| = 180\ °$, a preto nutne $|\sphericalangle M_2M_4M_3| + |\sphericalangle M_4M_3M_1| = 90°$. Z trojuholníka M_4M_3L vyplýva, že $|\sphericalangle M_4LM_3| = 90°$, čo sme chceli dokázať (obrázok 3).

Ďalších podobných vzťahov by sme asi mohli nájsť veľa, no nič z toho nám zatiaľ veľmi nenapomáha dopracovať sa k tomu, že sa tie tri priamky pretínajú v jednom bode. Skúsme na to využiť nejakú vetu. A to konkrétne Desarguovu vetu[2]. Tá hovorí to, že ak sa priamky AA' BB' a CC' pretínajú v jednom bode (resp. sú rovnobežné), tak priesečníky priamok AB s $A'B'$, AC s $A'C'$ a BC s $B'C'$ ležia na jednej priamke.

Označme X priesečník M_2I_2 a M_4I_4. Skúsme pomocou Desarguovej vety ukázať, že body X, M_1, I_1 ležia na jednej priamke. Musíme nájsť 6 bodov, pre ktoré vetu použijeme. Zrejme chceme aby tam boli priamky I_2M_2 a I_4M_4, lebo ich priesečník je X. Chceme doplniť ešte dva body tak, aby príslušné priesečníky boli M_1 a I_1. Do tejto úlohy sa ponúkajú body P, Q na 4. Pričom $P = DM_1 \cap BM_4$ a $Q = CM_1 \cap AM_2$. Vidíme, že ak ukážeme, že priamky M_2M_4, I_2I_4, PQ sú rovnobežné, tak už to z Desarguovej vety vyplýva (pre lepšiu názornosť si pozrite obrázok 4).

Ale to, že $M_2M_4 \parallel I_2I_4$ už máme. Potrebujeme, ešte zistiť niečo o PQ. Ľahko si môžeme všimnúť, že P, Q sú stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov ABD, ABC (pretože ležia na ich osiach uhlov). A z ďalšej vlastnosti Švrčkovho bodu máme, že $|M_1A| = |M_1B| = |M_1P| = |M_1Q|$. Ak tento vzťah náhodou nepoznáte, dá sa veľmi ľahko dokázať dopočítaním uhlov. To ale znamená, že trojuholník M_1PQ je rovnoramenný a tiež vieme, že aj trojuholník $M_1I_2I_4$ je rovnoramenný. Preto nutne $I_2I_4 \parallel PQ$.

Takže keď to zlepíme dokopy, tak naozaj z Desarguovej vety máme, že priamky M_1I_1, M_2I_2, M_4, I_4 sa pretínajú v jednom bode, čím je celá úloha dokázaná.



Obr. 4

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Kollár Pavol	2.	Gamča BA	4	9	9	9	9	9				45	90
1.	Melicher Martin	2.	GPoš KE	2	9	9	9	9		9			45	90
1.	Mišiak Dávid	2.	GJH BA	4	9	9	9	9	8	9			45	90

[2] Tú môžete nájsť napr. na https://en.wikipedia.org/wiki/Desargues%27s_theorem

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Sásik Tomáš	3.	Gamča BA	7		9	9	9	9	9			45	90
1.	Vištanová Laura	4.	Gmaď KE	6		9	9	9		9	9		45	90
6.	Krajčoviechová Lucia	1.	GJH BA	2	9	9	9	9	8				44	89
6.	Poturnay Marián	2.	GPdC PN	4	9	9	9	9	8				44	89
8.	Glevitzká Štefánia	2.	GVBN PD	4	9	9	9	9	3				39	82
8.	Krajči Samuel	2.	GAlej KE	5		9	9	9	9		2		38	82
8.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	2	9	9	9	9	2				38	82
11.	Števko Martin	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9					36	81
12.	Marko Alan	3.	LEAF	5		9	9	9	9				36	80
13.	Kebis Pavol	2.	GJH BA	4	9	9	9	5	2				34	79
14.	Fülöp Jozef	1.	Gamča BA	2	9	9	2	9	3				32	76
15.	Ralbovský Peter	4.	GJH BA	10			9	9	8	9			35	72
16.	Mráz Michal	2.	ŠPMNDG BA	4	9	9	9	5					32	71
17.	Adam Dominik	2.	GJH BA	3	9	9	2	5					25	70
17.	Molnár Michal	2.	Gamča BA	4	7	9	9	9	3				37	70
19.	Brezinová Viktória	2.	GAlej KE	4	9	9	9	9	4				40	68
20.	Dujava Jonáš	2.	SPŠE Prešov	3	5	9	2	5	7				28	64
20.	Olšák Radek	2.	Mensa	2	9	1	9						19	64
22.	Záhorský Ákos	3.	G Šahy	6		9	9	9					27	63
23.	Dlugošová Michaela	3.	GKuk PP	6		9	5	5	6				25	61
23.	Ďuračková Mária	2.	GJH BA	4	9	9	7						25	61
23.	Machalová Monika	2.	GJH BA	4	5	9	7	0	3	0			24	61
26.	Moško Matej	2.	Gamča BA	4	4	2	2	9	2				19	56
27.	Klein Pavol	2.	GPdC PN	4	7	4	7	0	1				19	55
28.	Jóža Bohdan	2.	GJH BA	4	4	7	3	0	1				15	54
28.	Onduš Peter	3.	ŠPMNDG BA	6		9	9						18	54
30.	Oravkin Richard	2.	1SG BA	4	9	9	9	7					34	52
31.	Winczer Tobiáš	2.	ŠPMNDG BA	4	9	9	2						20	50
31.	Zubčák Matúš	2.	GPár NR	4	8	9	2	5					24	50
33.	Poljovka Jakub	3.	GPár NR	6		9	2	9					20	49
34.	Švihorík Tomáš	3.	GPár NR	6		9	3	5					17	47
35.	Číž Jozef	2.	GJH BA	3	9	0	0	9					18	45
35.	Šuchová Martina	3.	GPár NR	5		9	2	5	2		0		18	45
37.	Parada Matej	3.	Gamča BA	5		9							9	42
38.	Pajger Šimon	3.	GVO ZA	5		9	9	0			0		18	39
39.	Kalašová Martina	2.	GJH BA	3	9		5	4					18	38
40.	Ondovčíková Lucia	2.	G Modra	3	9	2		3		3			17	37
40.	Prokopová Tereza	2.	GJH BA	3	4	3	3	0					10	37
42.	Galíková Kristína	2.	ŠPMNDG BA	3	2	2							4	34
43.	Jurečeková Alžbeta	2.	EGMT	2	4	2		0	1	3			10	27
43.	Kuťková Sára	3.	Gamča BA	6									0	27
45.	Studeničová Katarína	3.	GPOH DK	5									0	24
46.	Findra Michal	2.	GDT PP	3									0	20
47.	Krutek Robert	4.	GJGT BB	5									0	18
48.	Kopfová Lenka	2.	G Mendel ČR	4									0	17
49.	Sadovská Jana	3.	ŠPMNDG BA	4	7	9		0					16	16
50.	Pajúnková Anežka	1.	GMH Trstená	1	2	7				3			12	14
51.	Janeta Tomáš	3.	GAB NO	4									0	12
52.	Drotár Pavol	4.	GPoš KE	7			9	0					9	9
53.	Kofira Eduard	4.	BiG Sučany	4									0	5
54.	Vranovský Michal	1.	GCSL BA	1	2		1	0					3	4
55.	Ďurina Marián	3.	G Šurany	3									0	1
56.	Jančík Michael	4.	GĽŠ Turzovka	4									0	0

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Macko Miroslav	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	9	9			45	90
1.	Melicher Martin	2.	GPoš KE	2		9	9	9	9	9	9		45	90
3.	Krajčoviechová Lucia	1.	GJH BA	2		7		9	9	9	9		43	88
4.	Pravda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	6	7			43	86
5.	Horanský Michal	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	5		9			41	85
5.	Šumšala Tomáš	1.	GJH BA	1	9	6	9	5	9	9			42	85
7.	Kajan Michal	1.	1SG BA	1	9	6	9	5	9	7	9		43	81
8.	Tran Marek	1.	Gamča BA	1	9	6	8	2	9				34	78
9.	Juríková Róberta	2.	GVBN PD	2		7	6	2	9		9		33	77
10.	Koutenský Martin	1.	Gamča BA	1	7	6	8	2	9				32	76
10.	Matejková Tatiana	1.	GPár NR	1	9	6	9	2	5				31	76
12.	Nemcová Kornélia	1.	Gamča BA	1	9	6	9	3	9				36	75
13.	Barnišin Michal	3.	GJAR PO	3			9	9	9		9		36	74
13.	Sabovčík Róbert	1.	GPoš KE	1	9	6	9	9		7			40	74
15.	Bielaková Tánička	1.	Gamča BA	1	7	4	9	9	9				38	73
16.	Vojtek Matej	1.	Gamča BA	1	9	6	7	1	8				31	72
17.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	2				9	9	9	9		36	71
18.	Masrna Michal	1.	GPoš KE	1	9	6	9			9			33	69
19.	Demková Karin	1.	GJH BA	1	9	6	9	4	9				37	68
20.	Pisoňová Karolína	2.	G Bánovce	3			9	6	9	8			32	67
21.	Bölcskei Matej	1.	GPár NR	1	7	5	9	2	2				25	66
21.	Calvo Natália	1.	GPár NR	1	9	6	7	2			0		24	66
21.	Hronská Marianna	1.	BiG Sučany	1	9	6	9	4	9				37	66
21.	Řehulka Erik	1.	ŠPMNDG BA	1	9	6	7	6	9				37	66
25.	Ganz Tomáš	1.	SPŠSDSJ TT	1	9	9	9	9	6				42	65
25.	Portašiková Jasmína	2.	GVar ZA	2		6	9	9	2		9		35	65
27.	Fülöp Jozef	1.	Gamča BA	2				9	9	2	9		29	64
28.	Stupta František	1.	GPár NR	1	7	6	8	2	2				25	63
29.	Adam Dominik	2.	GJH BA	3				9	9	2	5		25	61
29.	Baláž Lukáš	2.	G Bánovce	2			7	9	9	9			34	61
31.	Hanus Matej	1.	GPoš KE	1	9	6	9						24	60
32.	Kuniak Adam	1.	Gamča BA	1	7	5	7	2	2				23	57
33.	Hrmo Matej	2.	GPár NR	3			9	9	9	2			29	56
34.	Macáková Eliška	-3.	SZS CENADA BA	-3	8	6	7	4	4	2	9		34	55
35.	Farnbauer Michal	0.	Gamča BA	0	9	6	9	2		2			28	54
35.	Kalašová Martina	2.	GJH BA	3			9	9		5	4		27	54
35.	Staník Michal	2.	GĽŠ TN	3			7	3	9	9	0		28	54
38.	Chudíc Alex	1.	ŠPMNDG BA	1	9	5	6	2					22	53
39.	Rusnák Patrik	1.	GAlej KE	1	9	6	*	2	9				26	52
40.	Barančíková Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	6	7	2	1				25	50
40.	Bobeničová Michaela	2.	GPoš KE	2		6	9	4	2				21	50
42.	Ždímalová Michaela	2.	GJH BA	2		7	7	5		2			21	49
43.	Černíková Jana	2.	GJH BA	2		5	9	9					23	48
43.	Dujava Jonáš	2.	SPŠE Prešov	3				5	9	2	5		21	48
45.	Genčur Andrej	1.	GAM TT	1	7	6	*	2	6	1			22	46
45.	Olšák Radek	2.	Mensa	2				9	1	9			19	46
45.	Prokopová Tereza	2.	GJH BA	3			9	4	3	3	0		19	46
45.	Starovič Martin	1.	Gamča BA	1	9	9	5	6	8				37	46
49.	Benková Nina	2.	GPdC PN	3			9	3	2	2			16	45
50.	Královič Tomáš	2.	GPár NR	3			8	3	6				17	44
50.	Priesol Matej	1.	ŠPMNDG BA	1	9	6	9	4					28	44
50.	Rosinsky Juraj	2.	I de Lancy	3				9	9	2	0		20	44

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
50.	Szombay Šimon	1.	GPár NR	1	7	6	1	2	2				18	44
54.	Rampašeková Svetlana	1.	GPár NR	1									0	43
55.	Kluvancová Hana	1.	GPár NR	1									0	42
55.	Paška Jaroslav	2.	ŠPMNDG BA	2					7				7	42
57.	Cinová Tatiana	2.	GPár NR	3			9	2	2	2	5		20	39
58.	Barla Adam	1.	GJGT BB	1	7	7	7	2					23	38
58.	Krásny Matej	2.	ŠPMNDG BA	2		6	9	4	4				23	38
60.	Kriek Patrik	2.	GĽŠ ZV	1		6			2		0		8	36
60.	Pajúnková Anežka	1.	GMH Trstená	1	7	7	1	2	7				24	36
62.	Jurečeková Alžbeta	2.	EGMT	2		5	5	4	2		0		16	35
63.	Číž Jozef	2.	GJH BA	3				9	0	0	9		18	33
63.	Grigová Natália	1.	Gamča BA	1	7	6	4						17	33
63.	Šavelová Gabriela	1.	Gamča BA	1									0	33
66.	Ondovčíková Lucia	2.	G Modra	3				9	2		3		14	31
66.	Tomášik Ondrej	1.	GJGT BB	1	7	6	0	0		0			13	31
66.	Vranovský Michal	1.	GCSL BA	1	6	5		2		1	0		14	31
69.	Pozsonyi Karol Rudolf	2.	GBil BA	3			9	3	6				18	30
70.	Šánta Adam	2.	GJH BA	2									0	28
71.	Balogh Matúš	1.	GMA BA	1									0	27
71.	Halama Andrej	1.	GVO ZA	1	7	6		3	1				17	27
73.	Ganzová Veronika	3.	GAM TT	3			6	3	8				17	26
74.	Galíková Kristína	2.	ŠPMNDG BA	3				2	2				4	25
74.	Sládečková Laura	2.	GVar ZA	2									0	25
76.	Balheim Boris	2.	1SG BA	2		5		3	9				17	24
77.	Géciová Alexandra	1.	GJH BA	1		6	4	3	1				14	22
78.	Magula Daniel	3.	PiarG NR	1			6	2	5				13	21
79.	Belák Tomáš	2.	GAV LV	3									0	20
79.	Sojka Peter	1.	GJCh BR	1	7	4							11	20
81.	Funková Veronika	3.	GLN SE	3			9						9	18
82.	Ghirbaková Karin	2.	Gamča BA	2									0	17
82.	Chalúpek Adam	1.	Gamča BA	1									0	17
82.	Tarča Matej	1.	GPoš KE	1									0	17
85.	Findra Michal	2.	GDT PP	3									0	16
85.	Hluško Jakub	2.	ŠPMNDG BA	2									0	16
87.	Kopunec Matúš	3.	GĽŠ TN	3				6	9				15	15
87.	Novák Samuel	1.	GPoš KE	1									0	15
87.	Vrtiaková Anna	1.	GJH BA	1	7	6	0	2					15	15
90.	Jambrichová Anna	0.	BiG Sučany	0	6	5	0	0	1				12	12
91.	Letenayova Nina	2.	GJH BA	2									0	11
91.	Peťová Natália	1.	GAE BA	1	7			2	2				11	11
93.	Pankuch Andrej	1.	GAlej KE	1									0	9
94.	Michálková Júlia	1.	GJH BA	1									0	5
94.	Stásiniak Šimon	3.	GLN BA	3									0	5
96.	Bratková Kristína	3.	EGJAK KE	3				2	2		0		4	4
96.	Fojtová Gabriela	1.	GFGL BA	1									0	4
98.	Feketeová Viola	2.	GBST LC	3									0	2
99.	Beliansky Patrik	3.	GJH BA	3									0	0
99.	Ďurina Marián	3.	G Šurany	3									0	0
99.	Janeta Tomáš	3.	GAB NO	3									0	0
99.	Kollár Filip	1.	GAV LV	1									0	0