Vzorové riešenia 3. série zimnej časti KMS 2016/2017

Úloha č. 1: *V každom políčku tabuľky 3×3 je napísané číslo 0. Jeden ťah spočíva v pripočítaní alebo odpočítaní jednotky od ľubovoľných dvoch (hranou) susedných políčok tabuľky. Je možné po niekoľkých ťahoch dostať tabuľku plnú jednotiek?*

Riešenie: (opravoval Dominik)
Na začiatku máme v našej tabuľke veľkosti 3×3 samé nuly. Na konci chceme mať v každom políčku jednotku. Nás bude zaujímať súčet hodnôt v celej tabuľke. Keďže na začiatku máme samé nuly, súčet hodnôt je 0. Čo sa s týmto súčtom môže stať po prvom ťahu?

- Buď môžeme od dvoch susedných políčok odčítať 1-ku. V tom prípade sa súčet zmení z 0 na -2.
- Alebo môžeme ku dvom susedným políčkam pričítať 1-ku. Súčet sa teda zvýši o 2.

Keďže iné ťahy povolené nemáme, je zrejmé, že v každom ťahu sa súčet môže buď zmenšiť o 2, alebo zväčšiť o 2. Z toho ale vyplýva, že jeho parita sa nebude meniť.

A to je pre nás naozaj dôležité, pretože na konci hry chceme dosiahnuť stav, aby v celej tabuľke 3×3 boli 1-ky, a teda aby súčet hodnôt políčok v tabuľke bol $(3 \cdot 3) \cdot 1 = 9$.

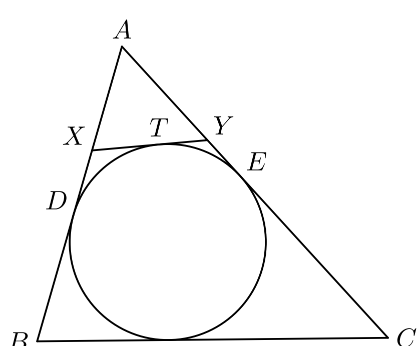
My sme ale zistili, že parita súčtu sa nebude meniť, a teda súčet hodnotu 9 nemôže nikdy nadobudnúť, z čoho už vyplýva, že v tabuľke sa nikdy 9 jednotiek nachádzať nebude.

Úloha č. 2: *Kráľovstvo sa nachádza na ostrove v tvare trojuholníka ABC, v ktorom $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|CA| = 9\,\mathrm{cm}$. Body X a Y sú postupne vnútorné body úsečiek AB a AC tak, že úsečka XY sa dotýka vpísanej kružnice trojuholníka ABC. Určte obvod kráľovstva – trojuholníka AXY.*

Riešenie: (opravovali Iveta a Pedro)
Body dotyku vpísanej kružnice s trojuholníkom si označme D pre úsečku AB, E pre AC a F pre BC. Bod dotyku úsečky XY s kružnicou si označme T.

O dotyčniciach ku kružnici vieme jednu úžasnú vec – od bodu dotyku s kružnicou po ich priesečník to majú obe rovnako ďaleko, t.j. v našom prípade pre úsečky platí $|DA| = |AE|$, $|DB| = |BF|$, $|FC| = |CE|$, $|EY| = |YT|$, $|TX| = |XD|$. To ale znamená, že obvod trojuholníka AXY sa dá „preniesť“ na súčet dĺžok strán úsečiek AD a AE. Navyše dĺžka strany BC je rovnaká, ako súčet dĺžok úsečiek DB a EC. Potom platí:

$$|XY| + |AX| + |AY| = |AD| + |AE| = |AB| + |AC| - |BD| - |CE| = |AB| + |AC| - |BC| = 7 + 9 - 8 = 8.$$



Obr. 1

Iné riešenie:
Iná možnosť, ako riešiť túto úlohu, je uvedomiť si, že strany BX, BC, CY a XY sú všetky dotyčnice tej istej kružnice, teda tvoria dotyčnicový štvoruholník. O ňom vieme povedať, že súčty protiľahlých strán sa rovnajú, teda že $|BX|+|CY| = |BC|+|XY|$. Ďalej vieme, že platí $|AB| = |AX|+|BX|$ a $|AC| = |AY|+|CY|$. Z predchádzajúcej rovnice teda máme, že $|AB| - |AX| + |AC| - |AY| = |BC| + |XY|$. Dĺžky $|AB|$, $|BC|$ a $|AC|$ poznáme, takže ich môžeme dosadiť do rovnice. Dostaneme, že $7-|AX|+9-|AY| = 8+|XY|$, teda $|XY|+|AX|+|AY| = 7+9-8 = 8$, čo je náš hľadaný obvod trojuholníka AXY.

Úloha č. 3: *Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c), pre ktoré platí*

$$a + bc = 3c,$$
$$b + ca = 3a,$$
$$c + ab = 3b.$$

Riešenie: (opravovali Kika a Marián)
Väčšinou platí, že čím viac neznámych, tým horšie sa rieši sústava rovníc. Skúsme úpravou rovníc prísť na nejaký vzťah medzi a, b a c a následne tak dostať sústavu rovníc s menej neznámymi. Z každej si vyjadríme jednu neznámu: $a+bc = 3c$, odčítame bc a dostaneme $a = 3c-bc$. Teraz už len výjmeme c a máme vyjadrené a nasledovne: $a = c(3-b)$ Obdobne zo zvyšných dvoch rovníc vyjadríme $b = a(3 - c)$ a $c = b(3 - a)$.

Vidíme, že a je násobkom c, b je násobkom a a c je násobkom b. Ak by jedno z nich bolo nula, bez ujmy na všeobecnosti nech $a = 0$, tak potom $b = a(3 - c) = 0$ a $c = b(3 - a) = 0$. Takže ak jedno z čísel a, b, c je nula, tak sú všetky nuly, čím dostávame naše prvé riešenie.

Ak sú čísla a, b, c nenulové, tak a je nenulovým násobkom c, b je nenulovým násobkom a a c je nenulovým násobkom b. Z toho nám vyplýva, že $|a| \geq |c| \geq |b| \geq |a|$. Toto môže nastať, iba ak $|a| = |b| = |c|$. Teda a, b a c sa líšia nanajvýš znamienkom.

Preto sa poďme pozrieť na znamienka. Pretože a, b a c sú tri čísla a ich znamienka môžu nadobúdať len dve hodnoty, musí medzi nimi byť taká dvojica, ktorá má rovnaké znamienko. To znamená, že aspoň dve čísla sa rovnajú. Nakoľko sú rovnice cyklické, tak si môžme povedať, nech $a = b$. Ak riešením bude usporiadaná trojica (x, x, y), tak riešením budú aj usporiadané trojice (y, x, x) a (x, y, x).

Dobre, zaoberajme sa prípadom $a = b$. V tomto prípade majú prvé dve rovnice tvar $a + ac = 3c$ a $a + ac = 3a$. Ľavé strany majú tieto rovnice rovnaké, teda aj pravé strany musia mať rovnaké. Čiže $3a = 3c$, čo znamená $a = c$. Dokázali sme, že $a = b = c$. Toto si dosadíme do ľubovoľnej rovnice a dostaneme vždy tú istú rovnicu: $a + a^2 = 3a$. Túto rovnicu vieme upraviť na tvar $a(a - 2) = 0$. Rovnica má práve dve riešenia a síce $a = 0$ (ktoré sme už našli predtým) a $a = 2$.

Riešenia pôvodnej sústavy rovníc sú $a = b = c = 2$ a $a = b = c = 0$.

Úloha č. 4: *Gertrúda a Pekelník hrajú hru na šachovnici rozmerov $n \times n$. Gertrúda začína, potom sa s Pekelníkom striedajú v ťahoch. V každom svojom ťahu položí hráč na ľubovoľné voľné políčko kameň. Voľné políčko je také, na ktorom nie je kameň a ktorého (hranou) susedné políčka obsahujú najviac jeden kameň. Hráč, ktorý vo svojom ťahu nemôže položiť kameň, prehráva. V závislosti od prirodzeného čísla n určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu.*

Riešenie: (opravovali Čeky a Adam)
Pozrime sa samostatne na párne a nepárne n, začnime s párnym.

Každému políčku vieme nájsť práve jedného kamaráta, ktorý je s ním stredovo súmerný podľa stredu šachovnice. Nech Gertrúda položí svoj prvý kameň kamkoľvek na šachovnicu. Pekelník položí svoj kameň na kamaráta Gertrúdinho políčka. Po týchto dvoch ťahoch je šachovnica stredovo súmerná. Teraz Gertrúda položí svoj druhý kameň na ďalšie voľné políčko. Keďže voľné políčka šachovnice boli pred jej ťahom stredovo súmerné a ona dala kameň na voľné políčko, musel byť voľný aj jeho kamarát, čo Gertrúda svojím ťahom určite nepokazila, lebo skamarátené dvojice sa nachádzajú v rôznych riadkoch aj stĺpcoch. Pekelník teda môže svoj druhý kameň položiť na kamaráta Gertrúdinho políčka a šachovnica je znovu stredovo súmerná. Po každom Gertrúdinom ťahu bude môcť urobiť ťah aj Pekelník – tak, že položí kameň na kamaráta posledného Gertrúdinho políčka. Z voľných políčok tak ubudnú vždy aspoň dve, preto sa niekedy stane, že Gertrúda už nebude mať kam položiť kameň. A tým pádom vyhrá Pekelník, pre ktorého sme práve našli víťaznú stratégiu.

Bude to takto fungovať aj pre nepárne n? Keď budeme znovu vytvárať dvojice kamarátov, nájdeme jedno políčko, ktoré žiadneho nemá – stred šachovnice. Všetky ostatné políčka kamarátov majú. Gertrúda položí svoj prvý kameň na stredové políčko. Teraz sme už vo veľmi podobnej situácii ako pri párnej šachovnici, lebo ju máme celú rozdelenú na dvojice kamarátov, pre ktorých platí, že ak sa dá položiť kameň na jedného z nich, dá sa položiť aj na druhého. (Môže sa stať že to Pekelník svojim ťahom pokazí?) Rozdiel je ale v tom, že teraz s ukladaním začína Pekelník. Po každom jeho ťahu bude môcť Gertrúda položiť ďalší kameň a raz sa dostanú do situácie, že Pekelník už nebude mať kam položiť svoj kameň a Gertrúda vyhrá. Takýto postup teda bude jej víťaznou stratégiou.

Úloha č. 5: *Body K, L sú zvolené na strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$ tak, že bod K leží medzi bodmi A a L. Analogicky, body M, N sú na strane CD tak, že bod M leží medzi bodmi C a N. Ďalej platí $|AK| = |KN| = |DN|$ a tiež $|BL| = |BC| = |CM|$. Predpokladajme, že $BCNK$ je tetivový štvoruholník. Dokážte, že potom aj štvoruholník $ADML$ je tetivový.*

Riešenie: (opravoval Ľubo)
Pozrime sa najprv na štvoruholník $BCNK$, o ktorom predpokladáme, že je tetivový. Označme si $|\sphericalangle KBC| = \beta$ a $|\sphericalangle BCN| = \gamma$. Z vlastností tetivového štvoruholníka vieme, že $|\sphericalangle CNK| = 180° - \beta$ a $|\sphericalangle BKN| = 180° - \gamma$.

Keď sa teraz pozrieme na uhol KND (resp. AKN), vidíme, že je susedný k uhlu KNC (resp. BKN), takže jeho veľkosť bude určite β (resp. γ).

To nám ale veľmi pomohlo. Keď totiž hodíme očkom po štvruholníkoch $AKND$ a $MCBL$, tak zo zadania vieme, že každý z nich má tri strany rovnaké. Navyše sme ukázali, že tieto tri strany zvierajú rovnaké uhly (β a γ). To by nám mohlo napovedať, že tieto štvoruholníky budú asi podobné. Ľahko sa o tom presvedčíme. Stačí, keď si napríklad štvoruholník $MCBL$ zväčšíme (alebo zmenšíme, podľa potreby) tak, aby platilo, že $|DN| = |BL|$ (potom musí platiť aj, že $|NK| = |BC|$ a $|KA| = |CM|$). Teraz už len zväčšený (zmenšený) štvruholník $MCBL$ správne natočíme a vidíme, že je identický so štvruholníkom $AKND$. Teda pôvodný štvoruholník $MCBL$ je so štvoruholníkom $AKND$ podobný. (Podobnosť sa dala ukázať aj rozdelením štvoruholníkov uhlopriečkami a dokázať podobnosť vzniknutých trojuholníkov. Je ale dôležité, aby okrem toho, že sú podobné, boli aj správne usporiadané.)

Pozrime sa, čo sme z tejto podobnosti zistili. Ak si označíme $|\sphericalangle BLM| = \alpha$, tak z podobnosti bude aj uhol ADN mať veľkosť α (uhol oproti uhlu γ). Analogicky, keď si označíme $|\sphericalangle CML| = \delta$, aj uhol KAD bude mať veľkosť δ.

No a to už máme úlohu skoro hotovú. Stačí si len všimnúť, že uhol DML (resp. ALM) je susedný k CML (resp. BLM), a teda jeho veľkosť je $180° - \delta$ (resp. $180° - \alpha$).

Tým sme ukázali, že v štvoruholníku $ALMD$ je súčet protiľahlých uhlov $180°$, čo znamená, že je naozaj tetivový.

Úloha č. 6: *Pre každé nezáporné celé číslo k nájdite všetky nezáporné celé čísla x, y, z také, že*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8^k.$$

Riešenie: (opravoval Jožo)
Skôr, ako sa pustíme do riešenia, môžeme si všimnúť, že rovnica zo zadania se nezmení, ak ľubovoľne poprehadzujeme čísla x, y, z. Preto sa zameriame na hľadanie takých trojíc (x, y, z), kde $x \geq y \geq z$. Pre každú takú vyhovujúcu trojicu bude potom riešením aj ľubovoľná jej permutácia, t. j. trojica, ktorú dostaneme preusporiadaním čísel v nej. Ďalej budeme pre jednoduchosť v celom riešení rozumieť pod pojmom číslo len celé nezáporné číslo.

Našou úlohou je hľadať celé čísla. Pri ich hľadaní nám veľmi pomôže využiť ich špeciálnu vlastnosť, a to deliteľnosť. Všimnime si, že pravá strana rovnice 8^k je pre väčšinu celých čísel k deliteľná štyrmi[1]. Keď je pravá strana rovnice deliteľná štyrmi, tak štyrmi musí byť deliteľná aj ľavá strana. Preto sa môžeme pozrieť, kedy bude ľavá strana $x^2 + y^2 + z^2$ deliteľná štyrmi.

Pri vyšetrovaní deliteľnosti štyrmi sa nám oplatí pozrieť sa na zvyšky po delení štyrmi. So zvyškami sa veľmi ľahko pracuje. Ak chceme zistiť, aký zvyšok po delení štyrmi dáva číslo a^2, stačí nám zobrať jeho zvyšok a umocniť ho na druhú. Ak takto dostaneme príliš veľké číslo, tak ešte z neho zoberieme zvyšok po delení štyrmi. Rozmyslite si to. Preto si vieme pekne zapísať do tabuľky, kedy dáva a^2 ktorý zvyšok po delení štyrmi.

zvyšok a	0	1	2	3
zvyšok a^2	0	1	0	1

Z tabuľky si vieme ľahko uvedomiť, že všetky druhé mocniny celých čísel dávajú po delení štyrmi len zvyšky 0 alebo 1. Chceme, aby číslo $x^2 + y^2 + z^2$ bolo deliteľné štyrmi, t. j. aby dávalo po delení štyrmi zvyšok 0. Ten však vieme len z troch zvyškov, ktoré môžu byť nuly alebo jednotky, dostať jedine ako $0 + 0 + 0$. Zvyšok nula dávajú len párne čísla. Z toho dostávame, že $x^2 + y^2 + z^2$ je deliteľné štyrmi práve vety, keď x, y aj z sú párne. Preto môžeme za ne dosadiť $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ a $z = 2z_1$, čím dostaneme

$$(2x_1)^2 + (2y_1)^2 + (2z_1)^2 = 8^k = 2^{3k},$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{3k-2}.$$

Po predelení rovnice štyrmi sme vlastne dostali dosť podobnú rovnicu. Takže môžeme zopakovať našu úvahu. Ak je pravá strana deliteľná štyrmi, tak aj ľavá strana musí byť deliteľná štyrmi. To nastane práve vtedy, keď x_1,

[1] Prečo práve štyrmi? Najskôr by nám napadla deliteľnosť 8-mimi. Samozrejme, nasledujúce úvahy budú podobné pre akékoľvek číslo. Nebojte sa vyskúšať si ich pre číslo 8 alebo pre iné čísla ako 2, 16 či 64. Uvidíte potom, že deliteľnosť štyrmi nám ponúkne najjednoduchšiu cestu. Preto sme ju aj vybrali do vzoráku.

y_1 a z_1 sú párne. Potom nahradíme $x_1 = 2x_2$, teda bude platiť $x = 2x_1 = 4x_2$ (a ostatné neznáme podobne) a opäť môžeme celú rovnicu predeliť štyrmi.

Takéto delenie štyrmi môžeme opakovať, až kým už žiadna strana nebude deliteľná štyrmi. Keďže na pravej strane budeme mať stále mocninu dvojky, tak nám tam môže ostať len $2^0 = 1$ alebo $2^1 = 2$. Ľahko si rozmyslíme, že číslo 1 dostaneme pri párnom k a 2 pri nepárnom k.

Ak máme teda k párne[2], t. j. $k = 2n$ pre nejaké číslo n, tak $8^k = 2^{3k} = 2^{6n} = 4^{3n}$. Rovnicu môžeme vydeliť štyrmi $3n$-krát a dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad \text{kde } x = 2^{3n}a,\ y = 2^{3n}b,\ z = 2^{3n}c.$$

Túto rovnicu vieme jednoducho vyriešiť, pretože a^2, b^2 a c^2 sú celé nezáporné čísla. Preto jediným riešením je trojica $(a, b, c) = (1, 0, 0)$. Z toho ľahko dopočítame, že jediným možným riešením rovnice zo zadania je trojica $(x, y, z) = (2^{3n}, 0, 0)$ (až na permutáciu), kde $n = k/2$.

Podobne pri nepárnom $k = 2n + 1$ zas $8^k = 2^{6n+3} = 2 \cdot 4^{3n+1}$. Teda po predelení $(3n + 1)$-krát štvorkou sa dopracujeme k rovnici

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2, \qquad \text{kde } x = 2^{3n+1}a,\ y = 2^{3n+1}b,\ z = 2^{3n+1}c.$$

Tá má opäť jediné riešenie $(a, b, c) = (1, 1, 0)$. Z neho analogicky dostaneme $(x, y, z) = (2^{3n+1}, 2^{3n+1}, 0)$, kde $n = (k - 1)/2$.

Ukázali sme teda, že pre každé k existujú práve tri trojice čísel (x, y, z) vyhovujúce zadaniu, a to

$$\begin{aligned} (2^{\frac{3k}{2}}, 0, 0),\ (0, 2^{\frac{3k}{2}}, 0) \text{ a } (0, 0, 2^{\frac{3k}{2}}) &\qquad \text{pre párne } k,\\ (2^{\frac{3k-1}{2}}, 2^{\frac{3k-1}{2}}, 0), (2^{\frac{3k-1}{2}}, 0, 2^{\frac{3k-1}{2}}) \text{ a } (0, 2^{\frac{3k-1}{2}}, 2^{\frac{3k-1}{2}}) &\qquad \text{pre nepárne } k. \end{aligned}$$

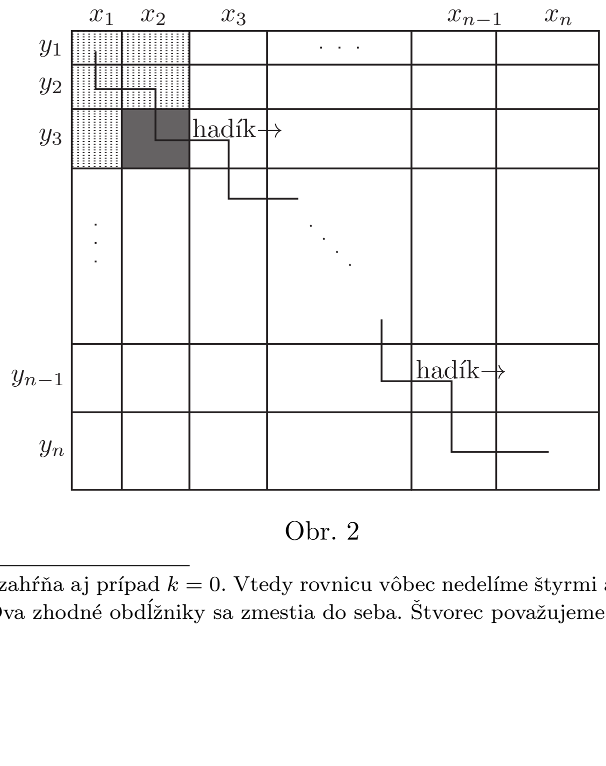
Na záver ešte treba spomenúť, že každé z uvedených riešení naozaj vyhovuje rovnici zo zadania. O tom sa môžeme ľahko presvedčiť skúškou správnosti. Druhou možnosťou je uvedomiť si, že pri riešení úlohy sme použili len ekvivalentné úpravy.

Úloha č. 7: *Štvorec je rozdelený na n^2 obdĺžnikov pomocou $n - 1$ zvislých a $n - 1$ vodorovných úsečiek, kde $n \geq 2$ je celé číslo. Dokážte, že spomedzi nich vieme vybrať $2n$ obdĺžnikov tak, aby pre ľubovoľné dva z nich platilo, že jeden sa zmestí do druhého.*[3]

Riešenie: (opravoval Miki, Zajo)

Keď si skúsime len tak nakresliť nejaké rozdelenie štvorca na n^2 obdĺžnikov tak, ako je v zadaní, zistíme, že hľadať $2n$ takých, že sa do seba vždy pomestia je pomerne ťažko uchopiteľný pojem, pretože nevidíme na prvý pohľad žiadnu súvislosť medzi vybratými obdĺžnikmi.

V takomto prípade sa oplatí skúsiť spraviť nejakú ekvivalentnú úpravu zadania, ktorá nám ponúkne lepší pohľad na problém. V tejto úlohe sa dalo uvedomiť si, že nezáleží na poradí riadkov a stĺpcov, a preto si ich môžeme akokoľvek preusporiadať (resp. preoznačiť) a problém, ktorý budeme riešiť bude ekvivalentný pôvodnému.



Obr. 2

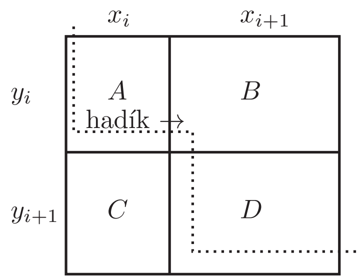
[2]Rozmyslite si, že tento prípad zahŕňa aj prípad $k = 0$. Vtedy rovnicu vôbec nedelíme štyrmi a už je priamo v „jednoduchom“ tvare.
[3]Obdĺžniky možno aj otáčať. Dva zhodné obdĺžniky sa zmestia do seba. Štvorec považujeme za špeciálny prípad obdĺžnika.

Označme si postupne šírky stĺpcov x_1, x_2, …, x_n a výšky riadkov y_1, y_2, …, y_n. Teraz zvoľme také usporiadanie riadkov a stĺpcov, kedy bude platiť $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ a zároveň $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. (Inými slovami sme zoradili riadky a stĺpce podľa výšky a šírky tak, že vľavo hore máme najmenší obdĺžnik.)

Pri tomto usporiadaní pre nejaký vybraný obdĺžnik (na obr. 2 vyplnený) platí, že sa do neho zmestia všetky čo sú od neho naľavo alebo vyššie (na obr. 2 bodkované). Vyplýva to z toho, že tieto obdĺžniky sa nachádzajú v stĺpci s menšou alebo rovnakou šírkou a v riadku s menšou alebo rovnakou výškou než náš vybraný obdĺžnik.

Zvoľme postupnosť („hadíka“ na obr. 2 čiarou) obdĺžnikov od ľavého horného po pravý dolný popri uhlopriečke štvorca. Pre ňu bude platiť, že každý obdĺžnik sa zmestí do všetkých nasledujúcich, teda bude splnená podmienka zo zadania. Takýto hadík má vždy dĺžku $2n-1$ (začíname na prvom políčku a pohneme sa $(n-1)$-krát vpravo a $(n-1)$-krát dole). K výberu $2n$ obdĺžnikov nám už chýba doplniť iba jeden obdĺžnik.

Skúmajme teraz štvorice obdĺžnikov pri uhlopriečke také, ako na obrázku 3. Z každej štvorice sa v našom hadíkovi nachádzajú už tri obdĺžniky. Ukážme však, že bude existovať taká štvorica, že tam budeme vedieť zaradiť aj posledný obdĺžnik z nej.



Obr. 3

Pre takúto štvoricu vieme, že obdĺžnik A sa zmestí do všetkých a do obdĺžnika D sa zmestia všetky. Zaujímavá je otázka, či sa do seba nejako zmestia B a C. Ak by bola totiž odpoveď áno, tak sme vyhrali, pretože bude platiť $A \subset B \subset C \subset D$[4], resp. s vymeneným B a C, čím sme našli obdĺžnik, ktorým doplníme nášho hadíka.

V prvom rade vieme, že bez otočenia to nepôjde, keďže $x_i \leq x_{i+1}$ a $y_i \leq y_{i+1}$. Ak sa teda do seba majú zmestiť, bude to musieť byť po otočení, a to jedným z dvoch spôsobov:

$$B \subset C \rightarrow x_{i+1} \leq y_{i+1} \wedge y_i \leq x_i,$$

$$C \subset B \rightarrow y_{i+1} \leq x_{i+1} \wedge x_i \leq y_i.$$

Ukážeme, že táto situácia musí aspoň raz nastať pomocou dôkazu sporom. Aby sa B a C do seba nezmestili, musela by nastať jedna z týchto možností:

$$x_{i+1} < y_{i+1} \wedge x_i < y_i$$

$$y_{i+1} < x_{i+1} \wedge y_i < x_i$$

Pozrime sa na ľavú hornú štvoricu obdĺžnikov. Aby sme v nej vylúčili štvrtý obdĺžnik, nech bez ujmy na všeobecnosti platí $x_1 < y_1, x_2 < y_2$. Pre ďalšiu štvoricu potom platí (aby bolo splnené, že z nej vylúčime štvrtý obdĺžnik) $x_2 < y_2$, z čoho dostávame $x_3 < y_3$ a podobne až po $x_n < y_n$ Keď týchto n nerovností sčítame, dostávame $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, čo je ale v spore zo zadaním pretože celý útvar je štvorec a spomenuté súčty sa musia rovnať.

Podobne, ak pre prvú štvoricu bude platiť $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$ rovnakým spôsobom sa dostávame k sporu, pretože celý útvar je štvorec.

Týmto sme ukázali, že ak by sme vo všetkých štvoriciach pri uhlopriečke nemohli pridať do našej postupnosti obdĺžnikov ten štvrtý, čo neleží v hadíkovi, tak dostaneme spor. Preto určite existuje štvorica v ktorej platí buď $B \subset C$, alebo $C \subset B$.

Obdĺžnikom z tejto štvorice doplníme nášho hadíka, čím dostávame hľadaných $2n$ obdĺžnikov, ktoré sa do seba postupne zmestia, čím spĺňajú úlohu zo zadania.

Úloha č. 8: *Na kružnici so stredom O sú dané body A, B, C, D, E tak, že úsečka AB je priemer kružnice, úsečka CD je kolmá na úsečku AB a úsečka AE prechádza stredom úsečky OC. Dokážte, že úsečka DE prechádza stredom úsečky BC.*

[4] Pod $A \subset B$ budeme v tomto príklade značiť, že obdĺžnik A sa zmestí do obdĺžniku B.

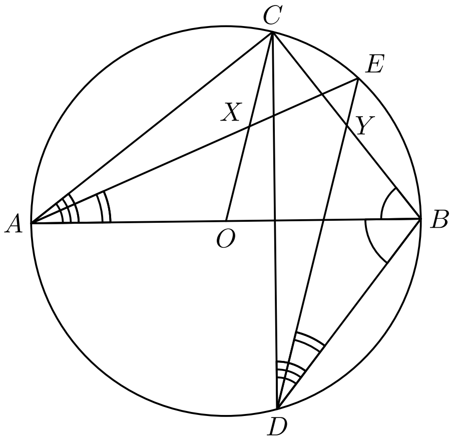
Riešenie: (opravoval Slavo)
Označme si uhly nasledovne: $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle EAB| = \delta$, označme si X stred úsečky OC, Y stred úsečky BC. Ukážeme, že $|\sphericalangle BDY| = |\sphericalangle BDE|$, potom body E, D, Y budú ležať na priamke a tým bude úloha dokázaná.

Vyjadrime si uhly na obrázku pomocou uhlov α, β a δ. Keďže AB je priemer kružnice a $CD \perp AB$, body C a D sú súmerné podľa AB. Trojuholník CDB je teda rovnoramenný so základňou CD. Preto AB je os uhla CBD, a teda $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle ABC| = \beta$.

Uhol AOC je stredový uhol k uhlu ABC, preto $|\sphericalangle AOC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2\beta$. Z tetivových štvoruholníkov $ADBC$ a $ADBE$ vidíme, že $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$ a $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle BAE| = \delta$.

Všimnime si, že $\triangle CAO$ a $\triangle CBD$ sú podobné ($|\sphericalangle COA| = |\sphericalangle CBD|$, $|\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle CDB|$). Preto uhly medzi prislúchajúcimi stranami a ťažnicami v daných trojuholníkoch sú rovnaké. Platí teda $|\sphericalangle BDY| = |\sphericalangle OAX| = \delta$.

Ukázali sme, že $|\sphericalangle BDY| = \delta = |\sphericalangle BDE|$, dôkaz je teda hotový.



Obr. 4

Úloha č. 9: *Kružnicu k nazývame separátor množiny piatich bodov v rovine, ak prechádza tromi z daných bodov, štvrtý bod leží vo vnútri kružnice k a piaty bod mimo kružnice k. Dokážte, že každá množina piatich bodov, z ktorých žiadne tri body neležia na priamke a žiadne štyri body neležia na kružnici, má práve štyri separátory.*

Riešenie: (opravoval Marek, Mišo)
Nech úsečka AB je časť konvexného obalu piatich bodov. Zoberme kružnicu s polomerom ∞, ktorá prechádza bodmi A, B. Keď začneme posúvať jej stred z ∞ do $-\infty$ statnú sa tri zaujímavé udalosti. Kružnica prekročí prvý bod, nazvime ho C, potom D, potom E. Všimneme si že kružnica ABD je separátor. Ale vráťme sa na pozíciu kde ABC je kružnica. Keď vyberieme ľubovoľnú dvojicu bodov tj. AB, BC a AC tak posúvaním stredu kružnice s danými bodmi raz dosiahneme, že kružnica pretne jeden z bodov D, E. Keď sa tak stane tak vieme, že tieto tri kružnice sú separátory a že sú jediné ktoré vzniknú touto konštrukciou. Ostatné kružnice prechádzajúce dvomi z bodov A, B, C (také sú dokopy 4) nie sú separátormi.

Ostáva nám ukázať, že spomedzi troch kružníc prechádzajúcich cez DE je práve jedna separátorom. Ak sú A, B, C v jednej polrovine vzhľadom na DE, tak posúvaním stredu kružnice obahujúcej DE ľahko zistíme, že práve jedna je seprátorom, jedna má 2 body vnútri a jedna vonku.

Ak nie sú body v jednej polrovine, tak kružnica opísaná DE a bodu, ktorý je v polrovine sám, neobsahuje zvyšné dva body. To preto, lebo dve kružnice sa môžu pretnúť maximálne v dvoch bodoch a tieto dva body musia byť v jednej polrovine vzhľadom k DE, lebo úsečka leží celá buď vnútri, alebo mimo kružnice opísanej trojuholníku ABC. Z rovnakého dôvodu bod, ktorý je v polrovine sám, nemôže byť vnútri kružnice opísanej DE a jednému zvyšnému bodu. Tieto dva body sú v jednej polrovine vzhľadom k DE, takže keď spravíme kružnice cez oba, tak jedna bude mať vnútri jeden bod a druhá žiaden.

Je práve jeden separátor prechádzajúci bodmi D a E, dohromady sú preto separátory presne 4.

Úloha č. 10: *Pre postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí* $a_1 = c$,

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)}$$

pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že ak c je prirodzené číslo, potom každý člen postupnosti je celé číslo.

Riešenie: (opravoval Samuel, Vodka)
Najprv si všimnime základné vlastnosti našej postupnosti v prípade, že $c \in \mathbb{N}$.

Postupnosť je neklesajúca, keďže $a_1 = c$ a rekurentný vzťah je súčet odmocniny (nezáporná) a $a_n c \geq a_n$, z čoho máme indukciou neklesajúcosť. A keďže $a_1 = c \geq 1$, tak všetky prvky postupnosti sú aspoň 1, teda postupnosť je naozaj dobre definovaná.

Teraz si definujme novú postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú platí $b_i = a_i$ pre $i = 1, 2, 3$ a rekurentný vzťah

$$b_{n+2} = 2cb_{n+1} - b_n$$

pre všetky prirodzené čísla $n > 1$.

Indukciou ukážeme, že $b_i = a_i$, pre všetky prirodzené čísla i. Pre $i = 1, 2, 3$ to vyplýva z definície.

Teraz chceme ukázať, že $b_n = a_n$ pre $n > 3$. V tejto časti riešenia je veľmi dôležité uvedomiť si, že všetky kroky sú ekvivalentné. Pre jasnosť budeme písať v rovnostiach, ktoré chceme dokázať znak $\stackrel{?}{=}$.

Máme teda

$$ca_{n-1} + \sqrt{(c^2-1)(a_{n-1}^2-1)} = a_n \stackrel{?}{=} b_n = 2cb_{n-1} - b_{n-2} = 2ca_{n-1} - a_{n-2},$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z indukčného predpokladu. Po odčítaní ca_{n-1} nám ostane

$$\sqrt{(c^2-1)(a_{n-1}^2-1)} \stackrel{?}{=} ca_{n-1} - a_{n-2}.$$

Ako sme už ukázali postupnosť a_n je neklesajúca, a teda obe strany sú kladné a vieme urobiť ekvivalentnú operáciu umocnenia na druhú.

$$c^2a_{n-1}^2 - c^2 - a_{n-1}^2 + 1 \stackrel{?}{=} c^2a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 - 2ca_{n-1}a_{n-2}.$$

Teda

$$1 - c^2 \stackrel{?}{=} a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 - 2ca_{n-1}a_{n-2}.$$

Keby sme začali s tým, že z indukčného predpokladu platí $b_{n-1} = a_{n-1}$, tak by sme tými istými úpravami dostali tú istú rovnicu, avšak bez otáznika a s o 1 menšími indexami. Konkrétne

$$1 - c^2 = a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2 - 2ca_{n-2}a_{n-3}.$$

Odčítaním týchto dvoch rovníc dostávame:

$$0 \stackrel{?}{=} a_{n-1}^2 - a_{n-3}^2 - 2ca_{n-2}(a_{n-1} - a_{n-3}).$$

Po úprave

$$0 \stackrel{?}{=} (a_{n-1} - a_{n-3})(a_{n-1} + a_{n-3} - 2ca_{n-2}).$$

Avšak z indukčného predpokladu vieme, že

$$a_{n-1} = b_{n-1} = 2cb_{n-2} - b_{n-3} = 2ca_{n-2} - a_{n-3}.$$

Teda naša rovnica prejde na $0 \stackrel{?}{=} (a_{n-1} - a_{n-3}) \cdot 0$, čo zrejme platí. Tým je indukcia hotová.

Teda obe postupnosti sú rovnaké, my ale chceme dokázať, že obsahuje len celé čísla. Najprv máme $a_1 = c$, $a_2 = 2c^2 - 1$, čo sú celé čísla a potom sú ďalšie členy definované ako $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$, pričom z indukcie vidno, že oba sčítance sú celé, a teda zadanie platí.

Výsledková listina

kategória BETA

Por.	Meno	Roč.	Škola	κ	4	5	6	7	8	9	10	p	s	$\sum$
1.	Melicher Martin	2.	GPoš KE	2	9	9	9		9		9		45	135
1.	Mišiak Dávid	2.	GJH BA	4	9	9	9	9			9		45	135
3.	Sásik Tomáš	3.	Gamča BA	7			8	9	9	9	9		44	134
3.	Vištanová Laura	4.	Gmaď KE	6		9	9	9	9	8			44	134
5.	Krajčoviechová Lucia	1.	GJH BA	2	7	9	9	9	9				43	132

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**p**	**s**	$\sum$
5.	Poturnay Marián	2.	GPdC PN	4	7	9	9	9	9				43	132
7.	Krajči Samuel	2.	GAlej KE	5		8	9	9	9	9			44	126
8.	Glevitzká Štefánia	2.	GVBN PD	4	7	9	9	9	9				43	125
8.	Kollár Pavol	2.	Gamča BA	4	7	9	9	1	9				35	125
10.	Števko Martin	2.	GAlej KE	4	7	9	9	3	9				37	118
11.	Fülöp Jozef	1.	Gamča BA	2	9	9	8	9					35	111
12.	Brezinová Viktória	2.	GAlej KE	4	9	9	6	9	6				39	107
13.	Marko Alan	3.	LEAF	5			9		9				18	98
14.	Molnár Michal	2.	Gamča BA	4	9	9		9					27	97
15.	Dujava Jonáš	2.	SPŠE Prešov	3	9	9	2	9					29	93
15.	Kebis Pavol	2.	GJH BA	4	9	0	4	1					14	93
17.	Ralbovský Peter	4.	GJH BA	10			7	9		4			20	92
18.	Olšák Radek	2.	Mensa	2	9	9		9					27	91
19.	Záhorský Ákos	3.	G Šahy	6		9	9	9					27	90
20.	Mráz Michal	2.	ŠPMNDG BA	4	9			7					16	87
21.	Adam Dominik	2.	GJH BA	3	7	9							16	86
21.	Ďuračková Mária	2.	GJH BA	4	7	9		9					25	86
21.	Machalová Monika	2.	GJH BA	4	9	9	5	2					25	86
24.	Moško Matej	2.	Gamča BA	4	7	9	9	3					28	84
24.	Oravkin Richard	2.	1SG BA	4	9		8	9		6			32	84
26.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	2									0	82
27.	Dlugošová Michaela	3.	GKuk PP	6		9	3	7					19	80
28.	Klein Pavol	2.	GPdC PN	4	7	9	3						19	74
29.	Jóža Bohdan	2.	GJH BA	4	7	9	3						19	73
30.	Prokopová Tereza	2.	GJH BA	3	7	9	2	9					27	64
31.	Číž Jozef	2.	GJH BA	3			5						5	59
32.	Šuchová Martina	3.	GPár NR	5		7	3	1	1				12	57
33.	Poljovka Jakub	3.	GPár NR	6		7							7	56
34.	Onduš Peter	3.	ŠPMNDG BA	6									0	54
35.	Winczer Tobiáš	2.	ŠPMNDG BA	4									0	50
35.	Zubčák Matúš	2.	GPár NR	4									0	50
37.	Švihorík Tomáš	3.	GPár NR	6									0	47
38.	Galíková Kristína	2.	ŠPMNDG BA	3	3		7						10	44
39.	Parada Matej	3.	Gamča BA	5									0	42
40.	Pajger Šimon	3.	GVO ZA	5			2		0				2	41
41.	Kalašová Martina	2.	GJH BA	3									0	38
41.	Ondovčíková Lucia	2.	G Modra	3									0	38
43.	Jurečeková Alžbeta	2.	EGMT	2									0	27
43.	Kuťková Sára	3.	Gamča BA	6									0	27
45.	Studeničová Katarína	3.	GPOH DK	5									0	24
46.	Findra Michal	2.	GDT PP	3									0	20
47.	Krutek Robert	4.	GJGT BB	5									0	18
48.	Kopfová Lenka	2.	G Mendel ČR	4									0	17
49.	Sadovská Jana	3.	ŠPMNDG BA	4									0	16
50.	Pajunková Anežka	1.	GMH Trstená	1									0	14
51.	Drotár Pavol	4.	GPoš KE	7									0	9
52.	Kofira Eduard	4.	BiG Sučany	4									0	5
53.	Vranovský Michal	1.	GCSL BA	1									0	4

kategória ALFA

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
1.	Krajčoviechová Lucia	1.	GJH BA	2		9	9	7	9	9	9		45	133
2.	Pravda Jakub	1.	ŠPMNDG BA	1	9	8	9	9	9				44	130

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
3.	Macko Miroslav	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	7	5	9				39	129
4.	Horanský Michal	1.	ŠPMNDG BA	1	9	7	8	9		8			41	126
5.	Kajan Michal	1.	1SG BA	1	9	3	9	7	0	9	7		41	122
6.	Melicher Martin	2.	GPoš KE	2				9	9	9			27	117
7.	Matejková Tatiana	1.	GPár NR	1	9	8	3	9	9				38	114
8.	Šumšala Tomáš	1.	GJH BA	1	9	9	9						27	112
9.	Juríková Róberta	2.	GVBN PD	2		9	7	7	9				32	109
10.	Bielaková Tánička	1.	Gamča BA	1	9	3	7		9	2			30	103
10.	Pisoňová Karolína	2.	G Bánovce	3			9	9	9		9		36	103
12.	Fülöp Jozef	1.	Gamča BA	2				9	9	8	9		35	99
13.	Demková Karin	1.	GJH BA	1	9	9	9		1	2			30	98
14.	Koutenský Martin	1.	Gamča BA	1	9		5	7					21	97
15.	Nemcová Kornélia	1.	Gamča BA	1	9	9				3			21	96
16.	Ganz Tomáš	1.	SPŠSDSJ TT	1	9		7	4	7	1			28	93
17.	Portašiková Jasmína	2.	GVar ZA	2		9	7	1	9		1		27	92
17.	Staník Michal	2.	GĽŠ TN	3			9	9	9	2	9		38	92
17.	Tran Marek	1.	Gamča BA	1	9		5						14	92
20.	Řehulka Erik	1.	ŠPMNDG BA	1	9		9	4		3			25	91
21.	Hronská Marianna	0.	BiG Sučany	0	3		2	7	9				21	87
22.	Baláž Lukáš	2.	G Bánovce	2			9	7		9			25	86
23.	Barančíková Barbora	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	7					34	84
24.	Chudíc Alex	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	5	7					30	83
24.	Macáková Eliška	-3.	SZS CENADA BA	-3	9		7	1		2	9		28	83
24.	Vojtek Matej	1.	Gamča BA	1	8		3						11	83
27.	Farnbauer Michal	0.	Gamča BA	0	9	9	7			3			28	82
27.	Priesol Matej	1.	ŠPMNDG BA	1	9	9	9	9	1	2			38	82
29.	Bölcskei Matej	1.	GPár NR	1	9	1	3			2			15	81
29.	Calvo Natália	1.	GPár NR	1	9	5		1	0				15	81
31.	Masrna Michal	1.	GPoš KE	1	9								9	78
32.	Adam Dominik	2.	GJH BA	3				7	9				16	77
32.	Dujava Jonáš	2.	SPŠE Prešov	3				9	9	2	9		29	77
32.	Hanus Matej	1.	GPoš KE	1	9		8						17	77
32.	Rusnák Patrik	1.	GAlej KE	1	9		8	4		4			25	77
32.	Starovič Martin	1.	Gamča BA	1	9		7	4	9	2			31	77
37.	Prokopová Tereza	2.	GJH BA	3			3	7	9	2	9		30	76
38.	Barnišin Michal	3.	GJAR PO	3									0	74
38.	Sabovčík Róbert	1.	GPoš KE	1									0	74
40.	Olšák Radek	2.	Mensa	2				9	9		9		27	73
41.	Parada Jakub	1.	Gamča BA	2									0	71
42.	Ždímalová Michaela	2.	GJH BA	2		8	9	2					19	68
43.	Genčur Andrej	1.	GAM TT	1	9	5	7						21	67
44.	Stupta František	1.	GPár NR	1									0	63
44.	Szombay Šimon	1.	GPár NR	1	9	7	3						19	63
46.	Benková Nina	2.	GPdC PN	3			3		9	2	1		15	60
47.	Paška Jaroslav	2.	ŠPMNDG BA	2			2	4		9	1		16	58
48.	Kuniak Adam	1.	Gamča BA	1									0	57
49.	Hrmo Matej	2.	GPár NR	3									0	56
50.	Géciová Alexandra	1.	GJH BA	1	9	9	7	1	0		0		26	55
51.	Kalašová Martina	2.	GJH BA	3									0	54
52.	Černíková Jana	2.	GJH BA	2		3	1						4	52
53.	Bobeničová Michaela	2.	GPoš KE	2									0	50
54.	Magula Daniel	3.	PiarG NR	1	9	9	8			2			28	49
55.	Číž Jozef	2.	GJH BA	3						5			5	47
56.	Cinová Tatiana	2.	GPár NR	3			3			3			6	45

Por.	**Meno**	**Roč.**	**Škola**	κ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**p**	**s**	$\sum$
57.	Královič Tomáš	2.	GPár NR	3									0	44
57.	Rosinsky Juraj	2.	I de Lancy	3									0	44
59.	Rampašeková Svetlana	1.	GPár NR	1									0	43
59.	Vranovský Michal	1.	GCSL BA	1	9		3						12	43
61.	Ganzová Veronika	3.	GAM TT	3			9	4		3	0		16	42
61.	Kluvancová Hana	1.	GPár NR	1									0	42
61.	Tomášik Ondrej	1.	GJGT BB	1	1	3	7		0				11	42
64.	Barla Adam	1.	GJGT BB	1									0	38
64.	Krásny Matej	2.	ŠPMNDG BA	2									0	38
66.	Kriek Patrik	2.	GĽŠ ZV	1									0	36
66.	Pajunková Anežka	1.	GMH Trstená	1									0	36
68.	Galíková Kristína	2.	ŠPMNDG BA	3				3		7			10	35
68.	Jurečeková Alžbeta	2.	EGMT	2									0	35
70.	Halama Andrej	1.	GVO ZA	1	1	2	2			2			7	34
71.	Grigová Natália	1.	Gamča BA	1									0	33
71.	Šavelová Gabriela	1.	Gamča BA	1									0	33
73.	Ondovčíková Lucia	2.	G Modra	3									0	32
74.	Pozsonyi Karol Rudolf	2.	GBil BA	3									0	30
75.	Šánta Adam	2.	GJH BA	2									0	28
76.	Balogh Matúš	1.	GMA BA	1									0	27
77.	Sládečková Laura	2.	GVar ZA	2									0	25
78.	Balheim Boris	2.	1SG BA	2									0	24
79.	Belák Tomáš	2.	GAV LV	3									0	20
79.	Sojka Peter	1.	GJCh BR	1									0	20
81.	Funková Veronika	3.	GLN SE	3									0	18
82.	Ghirbaková Karin	2.	Gamča BA	2									0	17
82.	Chalúpek Adam	1.	Gamča BA	1									0	17
82.	Tarča Matej	1.	GPoš KE	1									0	17
85.	Findra Michal	2.	GDT PP	3									0	16
85.	Hluško Jakub	2.	ŠPMNDG BA	2									0	16
85.	Peťová Natália	1.	GAE BA	1	0	3	0	0		2			5	16
88.	Kopunec Matúš	3.	GĽŠ TN	3									0	15
88.	Novák Samuel	1.	GPoš KE	1									0	15
88.	Vrtiaková Anna	1.	GJH BA	1									0	15
91.	Jambrichová Anna	0.	BiG Sučany	0									0	12
92.	Letenayova Nina	2.	GJH BA	2									0	11
93.	Pankuch Andrej	1.	GAlej KE	1									0	9
94.	Michálková Júlia	1.	GJH BA	1									0	5
94.	Stásiniak Šimon	3.	GLN BA	3									0	5
96.	Bratková Kristína	3.	EGJAK KE	3									0	4
96.	Fojtová Gabriela	1.	GFGL BA	1									0	4
98.	Feketeová Viola	2.	GBST LC	3									0	2