Zadania 1. série letnej časti KMS 2002/2003

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Na papieri je nakreslený pravidelný n-uholník. Zistite, koľkými spôsobmi je možné z jeho vrcholov vybrať 3 tak, aby tvorili vrcholy rovnoramenného trojuholníka.

Úloha č. 2:
Starý otec má dvoch vnukov. Nebol až taký úplne starý kmeť, že by mal viac ako 99 rokov. Keď pred vek starého otca napíšeme vek jedného z jeho vnukov, dostaneme štvorciferné číslo, ktoré je deliteľné vekom tohoto vnuka. Okrem toho, vynásobením vekov všetkých troch dostaneme už spomínané štvorciferné číslo. Koľko rokov má starý otec?

Úloha č. 3:
Mazo a Rado hrávajú takúto hru: Striedavo dopĺňajú namiesto hviezdičiek v rovniciach celé čísla. Začína Mazo.

$$\begin{aligned} * &= * \\ *+* &= * \\ *+*+* &= * \\ &\vdots \\ *+*+*+*+*+*+* &= * \end{aligned}$$

Zistite, či môže Mazo dosiahnuť, aby po poslednom ťahu boli pravdivé všetky rovnosti.

Úloha č. 4:
Niektoré políčka nekonečnej štvorcovej tabuľky sú ofarbené na čierno, zvyšné sú biele. Každý obdĺžnik 2×3 resp. 3×2 obsahuje práve 2 čierne políčka. Koľko čiernych políčok môže obsahovať obdĺžnik 9×11, ktorý spĺňa toto pravidlo?

Úloha č. 5:
Aladin sa chce dostať do jaskyne, pred ktorou je sud. Sud má navrchu štyri otvory tvoriace vrcholy štvorca. Pod každým otvorom je džbán, v ňom je ryba otočená hlavou alebo chvostom nahor. Jaskyna sa otvorí len vtedy, keď budú všetky ryby otočené rovnako. Aladin môže dať ruky do ľubovoľných dvoch otvorov a potom otočiť žiadnu, jednu alebo dve ryby. Aladin necíti, ktorým smerom sú ryby, ktore práve drží, otočené. Akonáhle Aladin vytiahne ruky, sud sa roztočí a po zastavení Aladin nepozná jeho pôvodnú polohu. Takto môže pokračovať ľubovolne dlho. Existuje postup, pomocou ktorého sa Aladin do jaskyne dostane po konečnom počte krokov?

Úloha č. 6:
Na nekonečnej štvorcovej sieti (s jednotkovou dĺžkou strany jedného štvorčeka) sedí v mrežovom bode blcha. Je to blcha konzervatívna a pri pohybe sa riadi prísnymi pravidlami:
1) Dráha jej skoku je úsečka.
2) Dĺžka jej skoku je vždy 13.
3) Skáče len z mrežového bodu do mrežového bodu (pohybuje sa len medzi mrežovými bodmi).
V nejakom inom mrežovom bode sedí blšiak. Zistite, či sa k nemu vie doskákať blcha po konečnom počte skokov.

Úloha č. 7:
V kruhu na ľade stojí x hokejistov, h namyslených z nich sa pozerá hore, d hanblivých zasa dole ($x = h + d$). Tréner raz za čas skríkne na jedného namysleného hokejistu, aby šiel do šatne. Súčasne jeho susedia v kruhu (ak nejakí sú, ale dvaja najviac) zmenia svoje správanie (hanbliví sa stanú namyslenými a naopak). Pre aké h, d existuje možnosť dostať všetkých hokejistov do šatne?

Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na šachovnici 48×48 je porozhadzovaných 99 štvorcov 3×3 tak, že sa neprekrývajú (štvorce zapadajú do mriežky šachovnice). Dokážte, že tam vždy vieme umiestniť ešte aspoň jeden ďalší štvorec 3×3.

Úloha č. 9:
Na katedre cudzích jazykov je 500 učiteľov a každý z nich ovláda aspoň n jazykov. Počet všetkých jazykov je $2n$. Ukážte, že vieme vybrať 14 jazykov tak, že každý učiteľ z nich hovorí aspoň jedným jazykom.

Úloha č. 10:
V rovine je daných 6 kruhov a priamka. Prienikom každého kruhu s priamkou je úsečka, ktorej dĺžka je rovná

polomeru daného kruhu. Žiadne dve z týchto šiestich úsečiek nemajú spoločný bod. Dokážte, že neexistuje bod ležiaci vo vnútri všetkých šiestich kruhov.

Úloha č. 11:
Nech S je podmnožina $m + n$ mrežových bodov v obdĺžniku $m \times n$. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojníc.

Termín odoslania riešení: **10. marec 2003 (6. marec pre zahraničie)**

Termín konania prednášky: 24. február 2003

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`