Zadania 2. série letnej časti KMS 2002/2003

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD, |AB| > |CD|$). Bodom D veďme rovnobežku so stranou BC a jej prienik s priamkou AC označme E. Dokážte, že obsahy trojuholníkov ACD a EBC sú rovnaké.

Úloha č. 2:
Vo štvorci $ABCD$ označme M stred strany AB. Priamka kolmá na MC, prechádzajúca bodom M pretína stranu AD v bode K. Ukážte, že veľkosti uhlov BCM a KCM sú rovnaké.

Úloha č. 3:
Na stene je nakreslený pravouhlý trojuholník ABC. Nech S je bod, v ktorom sa kružnica vpísaná trojuholníku ABC dotýka prepony AB. Zistite, či sa obsah trojuholníka ABC dá vypočítať ako $|AS| \cdot |BS|$? Tvrdenie zdôvodnite.

Úloha č. 4:
Na lúke v lese je ohnisko. Foto sa postavil do jeho stredu a otočil sa nejakým smerom. Potom sa vydal rovno za nosom a po nejakom čase sa zastavil (nevošiel do lesa). Na kartičku si zapísal azimut, ktorým išiel a počet krokov, ktorý urobil. Z miesta, kde ostal stáť, potom tento postup zopakoval, údaje si však zapísal už na novú kartičku. Toto opakoval, až kým nepopísal 12 kartičiek, ktoré mal zo sebou. Všetky azimuty boli rôzne. Tam, kde zostal stáť, zakopal poklad. Kartičky zamiešal a dal ich Ferimu s Feldom so stručným komentárom: "Začnite v ohnisku."
a) Dá sa pomocou tých kartičiek nájsť poklad aj keď sú pomiešané? Svoje tvrdenie dokážte.
Oni to nevedeli a začali sa s kartičkami hrať. Postavili sa do ohniska. Feldo si zobral 11 kartičiek a vydal sa podľa nich. Feri si zobral zvyšnú a posunul sa podľa tej. Všimli si, že stred ohniska ležal na ich spojnici. Po celodennej zábave zistili, že sa táto vlastnosť zachová, ak si Feldo vyberie hociktorú postupnosť hociktorých 11 kartičiek.
b) Vedeli by ste po tomto zistení nájsť presnú polohu pokladu aj bez kartičiek?
Pozn.: Ak náhodou neviete, čo je azimut, nalistujte si v Príručke pre mladých Svištov kapitolu Práca s buzolou.

Úloha č. 5:
Zadaný je nejaký pravouhlý trojuholník ABC. Zostrojme bod P tak, že priamka PC je kolmá na preponu AB a $|PC| = |BC|$. Presvedčte nás, že priamka BP je buď rovnobežná alebo kolmá na os vnútorného uhla pri vrchole A.

Úloha č. 6:
V rovnobežníku sú na diagonále AC zvolené body E a F tak, že $|AE| = |FC|$. Priamka BF pretne stranu CD v bode G a priamka BE pretne stranu AD v bode H. Dokážte, že platí $GH \parallel AC$.

Úloha č. 7:
Vymyslite príklad, ktorého riešením je rovnoramenný trojuholník s jedným uhlom veľkosti 72°. Pozor, zadanie nesmie obsahovať žiadne čísla, ani slová so slovným základom akejkoľvek číslovky (napr. dvojnásobok a pod.).

Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Na kružnici k_1 sú ďalej dané dva rôzne body C a D tak, že sečnica BC kružnice k_1 vytína na kružnici k_2 ďalší bod E, podobne sečnica BD kružnice k_1 vytína na kružnici k_2 bod F. Dokážte, že ak sú úsečky DF a CE rovnako dlhé, tak bod A je rovnako vzdialený od priamok BC a BF.

Úloha č. 9:
Daný je rovnostranný trojuholník ABC s ťažiskom O. Na stranách AB a AC vyznačme po rade body K a M tak, aby platilo $|\sphericalangle KOM| = 60°$. Dokážte, že obvod trojuholníka KAM je rovný dĺžke strany AB.

Úloha č. 10:
Nad stranami trojuholníka ABC zostrojme zvonka štvorce $BCKM$, $BAQT$, $ACNP$. Označme si p_1 obvod trojuholníka ABC a p_2 obvod šesťuholníka $MKNPQT$. Dokážte nerovnosti

$$5p_1 < 2p_2 < 6p_1.$$

Úloha č. 11:
Označme P priesečník uhlopriečok tetivového štvoruholníka $ABCD$. Bodom P veďme priamku ktorá pretína strany AB a CD v bodoch E a F. Ukážte, že platí ekvivalenicia

$$|PE| = |PF| \Longleftrightarrow EF \perp PO,$$

pričom O označuje stred kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$.

Termín odoslania riešení: **7. apríl 2003** **(3. apríl pre zahraničie)**

Termín konania prednášky: 24. marec 2003

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`