Zadania 3. série letnej časti KMS 2002/2003

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Z kláštora ráno o 8:00 vyrazil mních, aby vystúpil na svätý kopec. Na vrchole sa ocitol presne napoludnie. Tam tri dni meditoval a znovu o 8:00 ráno začal zostupovať. Vracal sa rovnakou cestou a do kláštora dorazil presne o 12:00. Dokážte, že existuje miesto, cez ktoré pri svojej púti prechádzal v oboch smeroch presne v rovnakú dennú dobu. Pozor, mních nemusel kráčať rovnomerne!

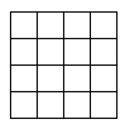
Úloha č. 2:
Štyria kamaráti, Foto, Feldo, Jano a Peťo, uvideli včera večer v televízii zástup Číňanov (stáli v rade za sebou). Foto si všimol, že prvý má červenú šatku. Feldo si všimol, že ak má nejaký Číňan červenú šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý je 13 miest pred ním a aj 13 miest za ním (ak takí existujú). Jano si všimol, že ak má nejaký Číňan červenú šatku, tak ju má aj Číňan, ktorý je 5 miest pred ním a aj 5 miest za ním (takisto iba ak existujú). Peťo počul, že ich je 10 000. Potom vypadol prúd a všetkých začalo zaujímať, koľko Číňanov malo vlastne červenú šatku. Viete im poradiť?

Úloha č. 3:
Palindróm je číslo, ktoré keď napíšeme odpredu i odzadu (v príslušnej číselnej sústave), tak vyzerá rovnako (napr. 12321). Nájdite všetky palindrómové dvojičky, t.j. palindrómy, ktorých rozdiel je 2,

a) v desiatkovej sústave,
b) v dvojkovej sústave.

Úloha č. 4:
Dajú sa všetky čiary na obrázku pokryť

a) 8 lomenými čiarami dlžky 5,
b) 5 lomenými čiarami dĺžky 8?



Úloha č. 5:
Dokážte, že ak sú $2m+1$ a m^2+1 zložené čísla, potom aj $5m-3$ je zložené číslo (m je prirodzené).

Úloha č. 6:
Dvaja hráči hrajú takúto hru. Striedajú sa a každý vo svojom ťahu vyberie nejaké prirodzené číslo spomedzi 2 až 9. Po každom ťahu sa spočíta súčin čísel, čo vybrali obaja, a ak prevýši 1000, tak ten, čo vyberal posledné číslo, vyhral. Napríklad prvý vyberie 3, druhý 6, prvý 8, druhý 9, $3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 1296$, teda vyhral druhý hráč.
Zistite, ako má hrať prvý hráč, aby určite vyhral (ak sa to dá).

Úloha č. 7:
Každá z cifier $0, 1, \ldots, 9$ je napísaná na dvoch lístkoch (dokopy 20 lístkov). Je možné uložiť týchto 20 lístkov do radu tak, aby medzi lístkami s číslom k ležalo práve k lístkov (pre $k = 0, 1, \ldots, 9$)?

Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Majme postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definovanú takto:

i) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$,
ii) ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je párne, tak $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n$,
iii) ak $a_n \cdot a_{n+1}$ je nepárne, tak $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

Ukážte, že a_n nemôže byť nula pre žiadne prirodzené číslo $n \geq 3$.

Úloha č. 9:
Nájdite najväčšie prirodzené číslo m, pre ktoré je číslo $1978^m - 1$ deliteľné číslom $1000^m - 1$.

Úloha č. 10:
Nájdite sústavu nanajvýš kvadratických rovníc, ktorá má v reálnych číslach práve

a) 3 riešenia,
b) 47 riešení,

pričom za kvadratickú rovnicu považujeme napr. $x^2 + 2xy - y^2 = 1$, ale nie $x^2 \cdot y = 5$.

Úloha č. 11:
Dokážte, že existuje číslo A také, že grafu funkcie $y = A \cdot \sin(x)$ možno vpísať najmenej 2003 rôznych (s rôznou dĺžkou strany) štvorcov. Štvorec sa nazýva vpísaný do grafu, ak na ňom ležia všetky jeho vrcholy.

Termín odoslania riešení: **5. máj 2003 (2. máj pre zahraničie)**

Termín konania prednášky: 21. apríl 2003

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`