Zadania 2. série zimnej časti KMS 2002/2003

Kategória ALFA

Úloha č. 1: Nakreslite si nejaký trojuholník ABC tak, že $|AC| > |AB|$. Na jeho strane AC si vyznačte bod D tak, aby platilo $|AB| = |AD|$ (bod D leží na úsečke AC). Zabudli sme Vám ešte na začiatku prezradiť, že platí aj $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = 30^\circ$ (ale presné veľkosti uhlov $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ nepoznáme). Pokúste sa (aj bez znalosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC) zistiť veľkosť uhla CBD.

Úloha č. 2: V nejakom rovnobežníku $ABCD$ (ktorého rozmery nevieme) si na strane BC zvolíme ľubovoľne bod E. Priamka $\overleftrightarrow{AE}$ pretne uhlopriečku BD v bode G a priamku DC v bode F (F leží na polpriamke $\overrightarrow{DC}$ za bodom C). Dokážete zistiť veľkosť úsečky EF (v cm), ak viete iba toľko, že platí $|AG| = 6\,\mathrm{cm}$ a $|GE| = 4\,\mathrm{cm}$?

Úloha č. 3: Viete nakresliť štvoruholník $ABCD$, aby platilo $|AB| = 9\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 12\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 13\,\mathrm{cm}$, $|DA| = 14\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 15\,\mathrm{cm}$? Ak áno, tak si do obrázka dokreslite kolmice z bodov B a D na uhlopriečku AC a ich päty (priesečníky kolmíc s AC) označte postupne P a Q. Aká je veľkosť úsečky PQ? Viete to ukázať aj bez toho, aby ste to odmerali?

Úloha č. 4: V rovnostrannom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC| = |AC| = 10\,\mathrm{cm}$) si označme výšku z bodu A ako AD. Nad AD (ako nad priemerom) zostrojme kružnicu, ktorá pretína strany AB a AC v bodoch E a F. Vyrátajte pomer dĺžok $|EF| : |BC|$. Závisí tento pomer od veľkosti strany trojuholníka ABC?

Úloha č. 5: Všetci poznáme Pytagorovu vetu: *Obsah štvorca nad preponou je rovnaký ako súčet obsahov štvorcov nad odvesnami pravouhlého trojuholníka.*
Mal by bájny matematik pravdu aj v prípade, že by sme namiesto štvorcov použili
a) rovnostranné trojuholníky,
b) pravidelné šesťuholníky,
c) pravidelné 2002-uholníky?

Úloha č. 6: Na strane AB obĺždnika $ABCD$ si zvoľme bod F. Os úsečky AF pretína uhlopriečku AC v bode G. Úsečky FD a BG sa pretínajú v bode H. Dokážte, že trojuholníky FBH a GHD majú rovnaký obsah.

Úloha č. 7: V trojuholníku ABC delí ťažnica AM uhol BAC tak, že platí $2\,|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle CAM|$. Na priamke AM si vyznačme ako M tak bod, že uhol DBA je pravý. Dokážte, že potom platí $2\,|AC| = |AD|$.

Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8: Nech v lichobežníku $ABCD$ platí $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$, $AC \perp BD$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a E priesečník priamok $\overleftrightarrow{OB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$. Ukážte, že platí rovnosť

$$|BC|^2 = |CD| \cdot |CE|.$$

Úloha č. 9: Akú vlastnosť musí spĺňať trojuholník ABC, aby pre veľkosti jeho strán (a, b, c) platila rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2,$$

kde R označuje polomer opísanej kružnice trojuholníka ABC.

Úloha č. 10: V trojuholníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$. Nad stranami AB, BC sú (zvonka) zostrojené rovnostranné trojuholníky ABP a BCR. Stredy strán AB a BC označme M a K. Zostrojme ešte jeden rovnostranný trojuholník MKQ tak, že body B a Q budú ležať v rovnakej polrovine určenej priamkou MK. Dokážte, že body P, Q, R ležia na jednej priamke.

Úloha č. 11: Dané dve kružnice sa zvnútra dotýkajú v bode N. Dotyčnica ku vnútornej kružnici v jej bode K pretína vonkajšiu kružnicu v bodoch A a B. Nech M je stred oblúka AB vonkajšej krunice, ktorý neobsahuje bod N. Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku BMK nezávisí na voľbe bodu K.

Termín odoslania riešení: 4. november 2002

Termín konania prednášky: 21. októbra 2002

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`