Zadania 3. série zimnej časti KMS 2002/2003

Kategória ALFA

Úloha č. 1: Ukážte, že ak a a b sú také reálne čísla, že $a \geq 0$, $b \geq 0$, tak platí aj nerovnosť:

$$\frac{a^3+b^3}{3} \leq \frac{(a+b)^3}{2}.$$

Zistite navyše všetky reálne čísla $a \geq 0$ a $b \geq 0$, pre ktoré v tejto nerovnosti nastáva rovnosť.

Úloha č. 2: Nájdite všetky prirodzené čísla a, b, c, ktoré spĺňajú rovnicu:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Úloha č. 3: Dokážte, že ak je zlomok $\frac{a}{b}$ v základnom tvare, tak potom sú aj zlomky $\frac{a-b}{a\cdot b}$, $\frac{a+b}{a\cdot b}$ v základnom tvare.

Úloha č. 4: Zložený zlomok $3\frac{1}{2}$ si človek môže ľahko pomýliť s násobením $3 \cdot \frac{1}{2}$. Zistite, pre ktoré a, b, c platí, že zložený zlomok $a\frac{b}{c}$ predstavuje to isté číslo ako súčin $a \cdot \frac{b}{c}$.
(V zloženom zlomku $a\frac{b}{c}$ platí iba $b \geq 0$, $c > 0$. Nemusí platiť, že čísla b, c sú nesúdeliteľné alebo, že $b < c$).

Úloha č. 5: Existuje celé čísla a také, že výraz $\frac{a^5}{5}+\frac{a^3}{3}+\frac{7a}{15}$ nie je celým číslom? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Úloha č. 6: Nájdite všetky prirodzené čísla a, b a n také, že platí:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=n.$$

Úloha č. 7: Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že každý zo zlomkov

$$\frac{7}{n+9},\ \frac{8}{n+10},\ \frac{9}{n+11},\ \dots,\ \frac{31}{n+33}$$

je v základnom tvare (nedá sa skrátiť).

Kategória BETA

Úlohy č. 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8: Nájdite všetky reálne čísla x, ktoré spĺňajú rovnicu

$$[x]+\frac{1}{\{x\}}=\{x\}+\frac{1}{[x]},$$

kde $[x]$ je celá časť z x, t.j. celé číslo a, pre ktoré platí $a \leq x < a+1$ a $\{x\}$ je desatinná časť čísla x, t.j. $\{x\}=x-[x]$.

Úloha č. 9: Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne reálne čísla, ktoré spĺňajú $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$ a $ac=bd$. Zistite maximálnu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}.$$

Úloha č. 10: Nech m a n sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že ak $m+n-2$ zlomkov

$$\frac{m+n}{m},\ \frac{2(m+n)}{m},\ \frac{3(m+n)}{m},\dots,\ \frac{(m-1)(m+n)}{m},\ \frac{m+n}{n},\ \frac{2(m+n)}{n},\ \frac{3(m+n)}{n},\dots,\ \frac{(n-1)(m+n)}{n},$$

zakreslíme na číselnú os, tak v každom z intervalov $(1,2)$, $(2,3)$, $\dots$, $(m+n-2, m+n-1)$ bude ležať práve jeden z týchto zlomkov.

Úloha č. 11: Na tabuli sú napísané čísla 1001^2, 1002^2, $\dots$, 2001^2. V každom kroku je dovolené z tabule zotrieť tri čísla $a \leq b \leq c$ a namiesto nich napísať jedno číslo $\frac{a}{3}$. Dokážte, že ak na tabuli zostane už iba jedno číslo, tak bude menšie ako 2002.

Odporúčaná literatúra

Pokúsime sa uviesť pre Teba dostupnú literatúru. Skratka ŠMM znamená Škola Mladých Matematikov. Tieto publikácie sú malé brožúrky (cca. formát B5), ktoré by mal mať každý matematický kabinet. Nejednému z nás pomohli pri riešení seminárnych úloh.... Najrýchlejšia cesta, ako sa k nim dostať, je spýtať sa svojho učiteľa(-ľky) matematiky. Symbolom (∗) je označená literatúra, ktorá celkom nesúvisí s touto sériou, ale je veľmi užitočná (... prídu aj Vianoce...).

P. P. Korovkin: Nerovnosti
J. Sedláček: Čo víme o přirozených číslech, ŠMM 2
R. Výborný: Matematická indukce, ŠMM 6
F. Veselý: O delitelnosti čísel celých, ŠMM 14
A. Apfelbeck: Kongruence, ŠMM 21
A. Kufner: Nerovnosti a odhady, ŠMM 39
A. Vrba: Princip matematické indukce, ŠMM 40
P. Vít: Řetězové zlomky, ŠMM 49
(∗) L. Bukovský, I. Kluvánek: Dirichletov princíp, ŠMM 25
(∗) T. Hecht, Z. Sklenáriková: Metódy riešenia matematických úloh
(∗) L. C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov
(∗) I. Korec: Úlohy o veľkých číslach, ŠMM 61

Prednášky

Na záver ešte jedna dobrá správa. Prednášky k sériám KMS budú aj v Žiline. A keby len prednášky. Každú poslednú sobotu v mesiaci (najbližšie 26. 10., potom 30. 11. 2002) sa bude konať v Žiline Matematický Klub (MaK). Zraz je o 9 : 00 na Hurbanovej ulici na vrátnici budoby Žilinskej univerzity. Program a bližšie informácie nájdeš na stránke `www.sezam.sk/~visni/MaK.html`.

Termín odoslania riešení: 2. december 2002

Termín konania prednášky: 18. novembra 2002

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`