Zadania 2. série letnej časti KMS 2003/2004

Kategória ALFA

1. Veľká kocka je zložená z $3 \times 3 \times 3$ rovnakých malých kociek. Koľko je všetkých kvádrov (zložených z malých kociek) nachádzajúcich sa v tejto veľkej kocke? *Poznámka*: Aj kocka je kváder!

2. Rovnoramenný trojuholník, ktorého ramená majú dĺžku 8 cm, budeme volať osmičkový. Odpovedajte na nasledujúce otázky a svoje odpovede odôvodnite.

a) Je pravda, že čím je väčší uhol oproti základni osmičkového trojuholníka, tým je väčší jeho obsah?

b) Majme osmičkový trojuholník, ktorého veľkosť uhla oproti základni je 30°. Koľkokrát by sme museli tento uhol zväčšiť (zmenšiť), aby sa obsah trojuholníka zdvojnásobil?

c) Existuje dvojica nezhodných osmičkových trojuholníkov s rovnakým obsahom? Ak áno, opíšte takéto dvojice.

3. Na strane AC daného trojuholníka ABC zostrojte bod D taký, že obvod trojuholníka ADB sa rovná dĺžke strany AC.

4. Z rovnakých pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov zložte konvexný 4-uholník, 5-uholník, 6-uholník, 7-uholník, 8-uholník, 9-uholník, atď. Pokiaľ sa nejaký n-uholník zložiť nedá, skúste to odôvodniť. Útvary skladajte z čo najmenšieho počtu trojuholníkov.
Poznámka: Konvexný útvar má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°.

5. Nech V je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, ACV a BCV majú rovnaký polomer.

6. Nech A, B sú body v rôznych polrovinách určených priamkou m. Nájdite kružnicu k, ktorá prechádza bodmi A, B a na priamke m vytína úsek PQ minimálnej dĺžky (PQ je tetiva k).

7. Dokážte, že všetky tri strany ľubovoľného nerovnoramenného trojuholníka môžeme zväčšiť (zmenšiť) o rovnakú hodnotu tak, že dostaneme pravouhlý trojuholník.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

8. V trojuholníku ABC označme M stred strany AC. Na stranách AB a BC zvoľme postupne body K a N. Dokážte, že ak $|\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle MNB|$, tak kolmice na strany AB, BC a AC postupne v bodoch K, N a M sa pretnú v jednom bode. Zistite, či platí aj opačná implikácia.

9. Stred tetivy t kružnice k má vzdialenosť h od stredu kružnice k. Do každého kruhového odseku určeného tetivou t je vpísaný štvorec, ktorého dva susedné vrcholy ležia na kružnici k a zvyšné dva vrcholy ležia na tetive t. Zistite veľkosť rozdielu strán týchto štvorcov.

10. V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) stredná priečka rovnobežná so stranou BC pretne vpísanú kružnicu trojuholnika ABC v bode F, ktorý neleží na základni AC. Dokážte, že dotyčnica ku vpísanej kružnici v bode F pretne os uhla ACB na strane AB.

11. V rovine je daný konvexný päťuholník $ABCDE$, pre ktorý platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|\sphericalangle ABC| = 150°$, $|\sphericalangle CDE| = 30°$ a $|BD| = 2$ km. Zistite obsah päťuholníka $ABCDE$.

Kategória GAMA

Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

12. Dokážte, že pre každé prvočíslo $p > 3$ platí

$$p^3 \,\Big|\, \binom{2p-1}{p-1} - 1\,.$$

13. Nech $x \neq y$ sú reálne čísla také, že pre štyri po sebe idúce prirodzené čísla n je výraz $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ celé číslo. Ukážte, že potom je tento výraz celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.

14. Sú dané kladné reálne čísla x, y, z, a, b, c, také že $x + y + z = 1$ a $0 < a < b < c$. Ukážte, že

$$(ax + by + cz)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}\,.$$

Termín odoslania riešení: **5. apríl 2004** (pre zahraničie: **2. apríl**)

Termín konania prednášky: 22. marec 2004

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`