Zadania 1. série zimnej časti KMS 2003/2004

Kategória ALFA

1. Kubko na trhu pozoroval babku, ktorá sa hrala s rovnoramennými váhami. Po chvíli sa jej na zvráskavenej tvári vyčaril úsmev. Zistila totiž, že 3 broskyne a slivka vážia toľko isto ako 3 desaťdekové závažia a 2 marhule. Po polhodine aproximovania dospela opäť k rovnovážnemu stavu, keď v jednej miske mala 9 broskýň, 5 sliviek a 2 desaťdekové závažia a v druhej mala dvojkilové závažie a marhuľu. Kubko to nevydržal a zjedol jednu marhuľu, broskyňu a slivku aj s kôstkami. Viete o koľko stúpla jeho hmotnosť?

2. Babička kúpila Erike štvorcový obrus s rozmermi $n \times n$ štvorčekov. Tento obrus má niekoľko zaujímavých vlastností. Každý štvorček je zafarbený práve jednou farbou. Obrus vyzeral rovnako, keď ho Erika otočila či prevrátila, teda každý štvorček mal rovnakú farbu, ako všetky symetricky umiestnené štvorčeky, ale rôznu ako tie ostatné. Koľko farieb mal obrus?

3. Jeden kuchár pracoval v hoteli, kde na meranie času mali len 2 presýpacie hodiny: jedny na 4 minúty, druhé na 7 minút. Jedného dňa prišiel hosť, ktorý si na raňajky prial vajíčko varené presne 9 minút. Koľko najmenej času potreboval kuchár na jeho prípravu?

4. 29. marca 87 alebo 8. novembra 88 sú násobiace dátumy, lebo $29 \cdot 3 = 87$, resp. $8 \cdot 11 = 88$. Ktorý rok odhliadnuc od storočia je najplodnejší na takéto dátumy?

5. Na ostrove v Tichomorí žijú chameleóny 3 farieb: žlté, zelené a hnedé. Keď sa stretnú dva chameleóny rôznych farieb, oba sa prefarbia na tretiu farbu. V istom momente bolo na ostrove 13 žltých, 15 zelených a 17 hnedých chameleónov. Je možné, aby bolo po istom čase všetkých 45 chameleónov rovnakej farby? (Predpokladáme, že sa žiaden nový nenarodí, ani žiaden neumrie.)

6. Dokážte, že v každom konvexnom 9-uholníku existujú aspoň dve uhlopriečky ležiace na priamkach, ktoré sú rovnobežné alebo spolu zvierajú uhol menší než 7 stupňov.

7. Algebrogram je pravdivé matematické tvrdenie, zapísané len pomocou čísel (v desiatkovej sústave), znamienok $+, -, \cdot, :, =$ a zátvoriek. Všetky cifry čísel v tomto tvrdení sú však nahradené písmenami, pričom na mieste rovnakých číslic sú rovnaké písmená a na mieste rôznych sú rôzne. Pôvodné matematické tvrdenie sa nazýva riešenie algebrogramu. Algebrogram má toľko riešení, z koľkých rôznych tvrdení mohol vzniknúť.
Príklad č.1: Algebrogram $BKMS \cdot SKMS = SALADKMS$ má jedno riešenie a síce $9\,625 \cdot 5\,625 = 54\,140\,625$.
Príklad č.2: Algebrogram $AB \cdot C = AB$ má 64 riešení, lebo C musí byť 1, A môže byť ľubovoľná z ôsmich možných číslic (okrem 1 a 0) a B môže byť ľubovoľná zo zvyšných ôsmich číslic (okrem 1 a A).
Vymyslite algebrogram, ktorého počet riešení je čo najväčšie prvočíslo.

Kategória BETA

Úlohy č. **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

8. Dokážte, že pre všetky prirodzené n platí

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} < 1\,.$$

9. Aký zvyšok dostaneme, keď číslo $n^{n+1} + (n+1)^n$ vydelíme číslom $n(n+1)$?

10. Okolo okrúhleho stola sedí 30 ľudí. Každý z nich je buď múdry, alebo hlúpy. Každého z nich sa spýtame (práve raz), či jeho sused sediaci vpravo od neho je múdry alebo hlúpy. Pritom vieme, že múdry nám odpovedá pravdivo a hlúpy odpovedá náhodne. Počet hlupákov je najviac n. Pri akom najväčšom n môžeme s istotou nájsť múdreho človeka?

11. Kráľovské Mesto Seminára (KMS) má presne n obyvateľov. Chcú tam vytvoriť čo najviac klubov tak, aby ľubovoľné dva kluby mali spoločného člena, ale ľubovoľné tri kluby už nemali spoločného člena. Koľko najviac klubov môžu takto vytvoriť?

Kategória GAMA

Úlohy č. **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

12. Dokážte, že pre každé celé číslo $n > 1$ môžeme napísať číslo $n^{12} + 64$ ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako 1.

13. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Na stranách AB a AC zvolíme po rade body M, N. Kružnice s priemermi BN a CM sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q a ortocentrum H trojholníka ABC ležia na priamke.

14. Dokážte, že ak všetky steny štvorstena majú rovnaký obsah, tak jeho dve ľubovoľné protiľahlé hrany majú rovnakú dĺžku.

Termín odoslania riešení: **6. október 2003** (pre zahraničie: **2. október**)

Termín konania prednášky: 22. september 2003

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`