Zadania 2. série zimnej časti KMS 2003/2004

Kategória ALFA

1. Koľko najmenej vrcholov môže mať mnohosten, ktorý má šesť stien?

2. Nájdite tri nepodobné trojuholníky, ktorých všetky strany aj výšky majú celočíselné dĺžky.

3. Nájdite štvoruholník s obsahom
a) $8,5$,
b) $8,25$,
ktorého vrcholy ležia v priesečníkoch štvorčekovej siete a žiadne jeho dve strany nie sú rovnobežné (obsah jedného štvorčeka je 1).

4. V rovnobežníku $ABCD$ je M stred strany BC. Priamka DT je kolmá na priamku MA, pričom bod T leží na MA. Dokážte, že $|CT| = |CD|$.

5. Os vnútorného uhla α a os vonkajšieho uhla γ trojuholníka ABC sa pretínajú v bode D. Bodom D vedieme rovnobežku so stranou BC, ktorá pretne strany AC a AB postupne v bodoch L a M. Určte dĺžku $|LM|$, pokiaľ viete, že $|LC| = 5$ a $|BM| = 7$.

6. Nakreslite všetky rôzne súvislé plášte pravidelného osemstena. Plášte, ktoré môžeme dostať otočením alebo prevrátením, pokladáme za rovnaké.

7. Nad každou stranou rovnobežníka zostrojíme štvorec (zvonku). Dokážte, že
a) štvotuholník určený stredmi týchto štvorcov je tiež štvorec.
b) uhlopriečky nového štvorca prechádzajú priesečníkom uhlopriečok pôvodného rovnobežníka.

Kategória BETA

Úlohy č. **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

8. Vezmite si krajčírsky meter a vystrite ho na zem. Potom ho preložte pozdĺž niektorej priamky prechádzajúcej jeho stredom tak, aby prekrývajúce sa časti krajčírskeho metra vytvorili trojuholník. Zistite, pre ktorú z týchto priamok bude mať trojuholník najmenší obsah.

9. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Nájdi vnútri tohto trojuholníka množinu bodov P takých, že pre päty P_A, P_B, P_C kolmíc z bodu P na strany BC, CA, AB platí $|\sphericalangle P_B P_A P_C| = 45°$.

10. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Body C_1 a A_1 sú zvolené na polpriamkach BA a DC tak, že platí $|DA| = |DA_1|$ a $|BC| = |BC_1|$. Dokážte, že uhlopriečka DB pretína úsečku A_1C_1 v jej strede.

11. Nech Q je stred pripísanej kružnice k trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka zvnútra strany BC. Nech M je stred strany AC a P priesečník MQ a BC. Dokážte, že $|AB| = |BP|$, ak $|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$.

Kategória GAMA

Úlohy č. **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

12. Uvažujme $2n$ rôznych prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ menších ako $n^2 + 1$ $(n > 2)$. Dokážte, že nejaké tri z rozdielov $a_i - a_j$ (pre všetky možné $i \neq j$) sú rovnaké.

13. Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_{n+1} = a_1)$ platí nerovnosť

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

14. Ak pre prirodzené číslo n platí, že $4^n + 2^n + 1$ je prvočíslom, tak n je mocninou trojky. Dokážte!

Termín odoslania riešení: **3. november 2003** (pre zahraničie: **30. október**)

Termín konania prednášky: 20. október 2003

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`