Zadania 3. série zimnej časti KMS 2003/2004

Kategória ALFA

1. V krajine žije 99 princezien, 100 princov a 2 draci. Keď stretne princ draka, zabije ho. Keď stretne drak princeznú, zožerie ju. Keď stretne princeznú princ, zamiluje sa, od toľkej lásky mu pukne srdiečko a umrie. Takto si v našej krajine všetci šťastne žili, až kým nepomreli a nezostal tam iba jeden tvor. Ktorý to bol?

2. Miťo má v komore 2 sviečky, ktoré sú rovnako dlhé. Jedna z nich zhorí za 4, druhá za 5 hodín. Keďže potme sa študovať nedá, zapálil ich obe presne o polnoci. Keď doštudvoval a išiel spať, bola jedna sviečka trikrát dlhšia ako druhá. Kedy išiel spať?

3. Aký najväčší obsah môže mať rovnobežník s obvodom 20 cm?

4. Nájdi všetky prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú 11-násobku súčtu svojich číslic v dekadickom zápise.

5. V obore celých čísel vyriešte sústavu:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1 \tag{1}$$
$$y + z - x = 3 \tag{2}$$

6. Rozdeľte pravidelný šesťuholník na päť častí s rovnakým obsahom len pomocou pravítka a kružidla.
Poznámka: Časti sú súvislé a nemusia mať rovnaký tvar.

7. Označme n-té prvočíslo p_n. Dokážte, že pre $n \geq 12$ platí $p_n > 3n$.

Kategória BETA

Úlohy č. **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

8. Označme $C(n)$ ciferný súčet čísla n v desiatkovej sústave. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje prirodzené číslo a také, že všetky čísla $C(a), C(2a), \ldots, C(ma)$ sú párne.

9. Nájdi všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré $f(x) + xf(1-x) = x^2 + 1$.

10. Nech a, b, c, d sú také celé čísla, že a, b, c sú za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti a zároveň b, c, d sú za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti. Okrem toho platí $a + b + c + d = 4 \cdot 3^{2003}$. Nájdite všetky takéto čísla.

11. Ukážte, že ak pre racionálne čísla x, y, z platí $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$, potom platí aj $x = y = z = 0$.

Kategória GAMA

Úlohy č. **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

12. Hra solitér sa hrá na tabuľke $m \times n$ štvorčekov. V každom z nich je položená jedna minca. Na začiatku sú všetky mince okrem jednej v rohu otočené znakom nahor. V každom ťahu môžeme z tabuľky zobrať ľubovoľnú mincu, ktorá je otočená znakom nahor, ale súčasne musíme otočiť všetky mince v štvorčekoch, ktoré hranou susedia s tým, odkiaľ sme mincu práve zobrali. Nájdite všetky dvojice (m, n), pre ktoré je možné takýmito ťahmi zobrať všetky mince.

13. Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, aby pre každé dva nesúdeliteľné delitele a, b čísla n bolo aj číslo $a + b - 1$ deliteľom n.

14. Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla a, b, c spĺňajúce rovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ platia nerovnosti

$$0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2\,.$$