Zadania 1. série letnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Majme dané kladné celé čísla p a q. Zistite, či je číslo $p+q$ nepárne, ak viete, že číslo p^3-q^3 je nepárne. Platí opačné tvrdenie? Nezabudnite svoje zistenie zdôvodniť.

Úloha č. 2:
Po vydarenej kolonizácii sú už osídlené oba mesiace Marsu. Na Deimose platia iba bankovky s hodnotami 4, 8 a 12 Mk (Marťanských korún) a na Phobose sa používajú len bankovky s hodnotami 12, 16 a 20 Mk. V celej Slnečnej sústave platí *Logické pravidlo trhu:* Na každú planétu/mesiac sa môžu dovážať len tie výrobky, ktoré si môžu obyvatelia platnými domácimi platidlami zakúpiť (pričom pri kúpe sa môžu bankovky aj vydávať). Zistite, či možno na Deimos a Phobos dovážať tie isté výrobky. Ak áno, dokážte, ak nie, zistite, pre ktoré výrobky to neplatí.

Úloha č. 3:
Na ostrove S súostrovia KMS žijú iba poctivci, ktorí vždy hovoria pravdu a klamári, ktorí vždy klamú. Niektorí poctivci sa vypracovali medzi takzvaných elitných poctivcov, podobne existujú aj elitní klamári. Ostrovania sa združujú do rôznych klubov, pričom ostrovan môže byť členom aj viacerých klubov. Klubový život na ostrove S spĺňa nasledujúce 4 podmienky:

1. Elitní poctivci tvoria klub.
2. Elitní klamári tvoria klub.
3. Pre každý klub K platí, že tí ostrovania, ktorí nie sú v klube K, tvoria klub.
4. Ku každému klubu K existuje aspoň jeden človek, ktorý o sebe prehlasuje, že je členom klubu K. (Jeho tvrdenie nemusí byť pravdivé, môže to byť klamár.)

Dokážte, že na ostrove S žije aspoň jeden neelitný poctivec a aspoň jeden neelitný klamár.
Zistite, či všetci poctivci tvoria jeden klub.

Úloha č. 4:
Pekár Rúža napiekol 32 koláčov rôznej hmotnosti. Keď Rúža odišiel telefonovať Ani, pribehol Foto s rovnoramennými váhami a s úmyslom zjesť dva koláče. Chcel zjesť dva najťažšie, no mal čas iba na 35 vážení na váhach, ktoré si priniesol. Pomôžte Fotovi nájsť spôsob, ako odhaliť dva najťažšie koláče.

Úloha č. 5:
Aňa na narodeniny dostala od Kuba veľkú bielu kocku $n\times n\times n$. (Samozrejme, že n je prirodzené číslo.) Keďže sa jej zdala príliš jednotvárna, zafarbila niektoré jej steny na červeno. Po rozrezaní na n^3 malých jednotkových kocočiek zistila, že 45 kocočiek nemá žiadnu stenu červenú. Aňa potom na oslave zjedla zvyšných 30 rúžových koláčov a zabudla, ako zafarbila svoju novú kocku. Pomôžte Ani zistiť, koľko stien pôvodnej kocky zafarbila na červeno.

Úloha č. 6:
Biológ Miki pozoruje chameleóna, ktorý chytá muchy. Chameleón má však prešpekulované pravidlá, ako bude pri chytaní múch oddychovať. Pred prvou chytenou muchou oddychuje 1 minútu. Pred každou $2m$-tou muchou oddychuje toľko minút, ako oddychoval pred m-tou muchou. Pred každou $2m+1$-ou muchou oddychuje o minútu viac, ako oddychoval pred m-tou muchou. Keď skončí niekoľko minútový oddych, chameleón okamžite chytí muchu a opäť začne oddychovať. Zistite:

a) Po koľkých minútach „snaženia“ chytil chameleón svoju 33-tiu muchu v poradí? (Ráta sa aj prvá minúta oddychu.)

b) Koľkatú muchu chytil chameleón po tom, čo prvý krát oddychoval 9 minút bez chytania?

c) Po akom dlhom oddychu chytil chameleón svoju 2005-tu muchu?

Nezabudnite svoje tvrdenia riadne zdôvodniť.

Úloha č. 7:
Peťo má nekonečnú štvorčekovú sieť. Pomôžte mu zistiť, pre ktoré N z množiny $\{1, 2, \ldots, 8\}$ je splnená nasledujúca podmienka: Existuje ofarbenie políčok tejto siete na čierne a biele také, že každé čierne políčko susedí práve s N čiernymi políčkami a každé biele políčko susedí práve s N bielymi políčkami (políčka spolu susedia, ak majú spoločnú stranu alebo vrchol).

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nájdite všetky nezáporné celé čísla n, pre ktoré existujú celé čísla a, b spĺňajúce

$$n^2 = a + b, \qquad n^3 = a^2 + b^2.$$

Úloha č. 9:
Je možné rozdeliť množinu racionálnych čísel väčších ako 1 na dve neprázdne disjunktné množiny A a B tak, aby
a) súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny A patril do A a súčet ľubovoľných dvoch čísel z množiny B patril do B?
b) súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny A patril do A a súčin ľubovoľných dvoch čísel z množiny B patril do B?

Poznámka: Dve množiny sú disjunktné práve vtedy, keď nemajú spoločný prvok.

Úloha č. 10:
Marťanská kocka modrej neznámej hmoty so stranou 10 sa skladá z $10 \times 10 \times 10$ kocočiek. Každá kocočka má svoje súradnice (postupne od vrcholovej kocočky $(1, 1, 1)$ po vrcholovú kocočku $(10, 10, 10)$) a je na začiatku zafarbená striebornou farbou. Mačiatka Pa a Pi sa hrajú nasledujúcu hru. Začína Pa a potom sa striedajú v ťahoch. Mačiatko, ktoré je na ťahu, si vyberie striebornú kocočku, ktorá má najväčší súčet súradníc (v prípade, že je takých kocočiek viac, môže si vybrať ľubovoľnú z nich) a prefarbí ju zo striebornej na zlatú. Navyše môže ľubovoľne prefarbiť (na zlatú či na striebornú) každú kocočku okrem vybranej, ktorú pretína alebo ktorej sa dotýka úsečka spájajúca stred vybranej kocočky so stredom kocočky $(1, 1, 1)$. Prehrá mačiatko, ktoré nebude môcť urobiť svoj ťah. Pre ktoré z mačiatok existuje víťazná stratégia?

Úloha č. 11:
Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n sa dajú čísla $1, 2, \dots, n$ napísať v takom poradí, že pre každé dve čísla sa ich aritmetický priemer nebude rovnať žiadnemu z čísel napísaných medzi nimi.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech a, b, c, $a+b-c$, $b+c-a$, $a+c-b$, $a+b+c$ je sedem rôznych prvočísel. Súčet nejakých dvoch z čísel a, b, c je 1000. Označme najväčšie, resp. najmenšie zo spomínaných siedmich čísel ako M, resp. m. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla $M - m$.

Úloha č. 13:
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník vpísaný do kružnice so stredom O. Nech M, N sú body na priamke AC také, že $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$. Nech D je päta kolmice z bodu M na priamku BC, E päta kolmice z bodu N na priamku AB. Nech O' je stred kružnice opísanej trojuholníku BED. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka ABC leží na kružnici opísanej trojuholníku BED. Dokážte, že stred úsečky AN a bod B sú súmerne združené podľa stredu úsečky OO'.

Úloha č. 14:
Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ označme s_n počet permutácií $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ prvých n prirodzených čísel takých, že

$$1 \le |a_k - k| \le 2 \qquad \text{pre všetky } k = 1, 2, \dots, n\,.$$

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n > 6$ platí

$$7s_{n-1} < 4s_n < 8s_{n-1}\,.$$

Odporúčaná literatúra

Zoznam odorúčanej literatúry sme presunuli na internet. Spolu s ďalšími podrobnosťami o projekte Knižnica KMS ho nájdeš na `www.kms.sk/kniznica.php`.

Termín odoslania riešení: **14. marec 2005** (pre zahraničie 11. marec 2005)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `www.kms.sk`