Zadania 2. série letnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

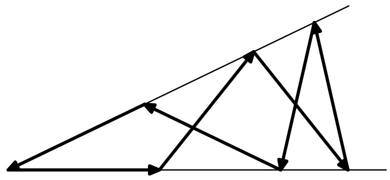
Úloha č. 1:
Pomalý pavúk Jozef sa pohybuje po stole rovnomernou rýchlosťou 10 centimetrov za minútu. Na začiatku každej minúty sa otočí o 30° doprava. Jozef takto cestuje už 73 minút. V polovici sedemdesiatej štvrtej minúty si povedal, že od začiatku ďalšej minúty sa začne otáčať pre zmenu o 10° doľava. Vráti sa niekedy po sedemdesiatej štvrtej minúte Jozef na miesto, na ktorom už bol? Ak áno, kedy najskôr?

Úloha č. 2:
V obdĺžniku $ABCD$ máme lomenú čiaru z vrcholu A do vrcholu C takú, že ľubovoľná z rovnobežiek so stranami obdĺžnika ju pretína v najviac jednom bode. Dokážte, že dĺžka tejto lomenej čiary nie je väčšia ako polovica obvodu obdĺžnika.

Úloha č. 3:
Majme danú kružnicu k a ľubovoľný bod A. Bodom A veďme ľubovoľné priamky, ktoré môžu vytnúť tetivu na kružnici k. Nájdite množinu stredov týchto tetív.

Úloha č. 4:
Uhol pri vrchole trojuholníka je rozdelený dvoma priamkami na tri rovnaké uhly. Tieto dve priamky rozdeľujú protiľahlú stranu trojuholníka na tri úseky. Môže sa stať, že najdlhší úsek na strane bude ten stredný?

Úloha č. 5:
Blška Baška skáče po dvoch ramenách uhla ako na obrázku. Všetky jej skoky sú rovnakej dĺžky. Začína z vrcholu uhla a po siedmych skokoch sa vráti naspäť do tohto vrcholu. Aká je veľkosť uhla?



Úloha č. 6:
Daný je uhol AVB a v ňom ležiaca kružnica k, ktorá sa nemusí dotýkať ramien uhla. Nájdite na nej bod P, pre ktorý je súčet vzdialeností bodu P od ramien AV a BV minimálny.

Úloha č. 7:
Na polkružnici nad priemerom AB leží bod M. Na úsečke AB leží bod K. Stred kružnice prechádzajúcej bodmi A, M, K označme P a stred kružnice prechádzajúcej bodmi M, K, B označme Q. Dokážte, že body M, K, P a Q ležia na jednej kružnici.

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
V rovine je daný rovnostranný trojuholník ABC. Dokážte, že existuje kladná konštanta k taká, že pre každý bod X danej roviny môžeme vhodne zvoliť znamienka $+$ a $-$ tak, že platí

$$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 = k,$$

kde v_1, v_2, v_3 sú postupne vzdialenosti bodu X od priamok AB, BC, CA.

Úloha č. 9:
V trojuholníku ABC je všetko označené ako obvykle. Ak je uhol α dva krát taký veľký ako uhol β, tak $a^2 = b(b+c)$. Dokážte. Platí aj obrátená implikácia?

Úloha č. 10:
Nech AB je priemer kružnice k a O je jej stred. Vnútri úsečky AB zvoľme bod C. Uvažujme iba jeden z oblúkov AB, kolmica na AB cez bod C pretína tento oblúk v bode D. Kružnica vpísaná do útvaru CBD (t. j. dotýkajúca sa kratšieho oblúka BD a úsečiek CB a CD) sa dotýka úsečky AB v bode J.

a) Dokážte, že $|AD| = |AJ|$.

b) Dokážte, že DJ je osou uhla CDB.

Úloha č. 11:
Kružnica k_1 sa v bode T zvonka dotýka kružnice k_2. Na k_2 uvažujme ľubovoľný bod P neležiaci na spojnici stredov oboch kružníc. Bodom P vedieme dotyčnice ku k_1, ktoré sa jej dotknú v bodoch A a B. Priamky AT, BT pretnú k_2 znovu postupne v bodoch C, D. Priamka CD pretne dotyčnicu ku k_2 vedenú bodom P v bode M. Určte množinu všetkých možných polôh bodu M, keď meníme polohu bodu P.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nájdite všetky prosté funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$f(f(n)) \le \frac{n + f(n)}{2}.$$

Poznámka: Prostá funkcia je taká, že pre všetky x, y platí $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

Úloha č. 13:
Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a X je množina s n prvkami. Nech $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ sú podmnožiny množiny X také, že zjednotenie ľubovoľných 50 z nich má viac ako $50n/51$ prvkov. Dokážte, že z týchto podmnožín sa dajú vybrať tri také, že každé dve z nich majú aspoň jeden spoločný prvok.

Úloha č. 14:
Nech m a n sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak m je nepárne, tak číslo

$$\frac{1}{3^m n} \sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k$$

je celé.

Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963
Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revised. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.
Engel, A.: Problem–solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.
www.kms.sk/kniznica.php

Termín odoslania riešení: **4. apríl 2005** (pre zahraničie 1. apríl 2005 (Pozor! Je to streda!))
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava www.kms.sk