Zadania 1. série zimnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Obdĺžnikový plátok mamutieho mäsa vážil 6 kg. Rozdelili si ho traja praľudia. Najprv obdĺžnik rozrezali na dva kusy. Krátko na to jeden z nich znovu rozrezali na dva kusy. Oba tieto rezy boli rovné. Vznikli takto tri trojuholníky a každý pračlovek si zobral jeden. Jeden z nich mal kus ťažký ako aritmetický priemer zvyšných dvoch. Koľko vážili kusy mäsa?

Úloha č. 2:
Na lúke našli lúčne koníky plánik spoločenskej hry. Plánik bol podobný ako pri hre človeče. Na plániku bola uzavretá cestička s políčkami. Dalo sa teda hopkať dookola. Štyri koníky sa postavili na štyri za sebou idúce políčka. Koníky vedeli skakáť práve o štyri políčka. Koníky sa chvíľu hrali a skákali v smere hodinových ručičiek. Keď skončili, boli opäť na tých istých štyroch políčkach, z ktorých začali. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci zoradené ak viete, že na plániku bolo 14 políčok.
Potom sa hrali ich šiesti kamaráti, ktorí vedia skákať o 4, 5, 6, 7, 8 a 9 políčok. Začínali zo 4., 5., 6., 7., 8. a 9. políčka (bolo to šesť za sebou idúcich políčok). Každý začínal z políčka s takým číslom, o koľko políčok vedel skákať. Plánik mal 2004 políčok. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci usporiadné, ak skončili hru na tej istej šestici políčok, na ktorej začínali.
Poznámka: Pri tejto hre nezáleží na poradí, v akom koníky skáču. V priebehu hry, nie však na konci, môže stáť na jednom políčku aj viacero koníkov.

Úloha č. 3:
Majme pravidelný štvorboký ihlan so štvorcovou podstavou $ABCD$ a vrcholom V. Označme K stred hrany AB. Bod L je v 1/9 hrany CD, bližšie k bodu C. Bod M je v 1/4 hrany BV, bližšie k bodu V. Bod N je v 1/4 hrany CV, bližšie k bodu V. Porovnajte dĺžku dvoch ciest z K do N:

a) $|KL| + |LN|$

b) $|KM| + |MN|$.

Úloha č. 4:
Na ostrove piadimužíkov zaviedli novú menu. V novej mene platia takéto mince: 1 LI = 10 LILI, 1 LILI = 10 LILILI a 1 LILILI= 10 LILILILI. Zistite, koľko je spôsobov, ako v LI, LILI, LILILI a LILILILI zaplatiť sumu 2004 LILILILI.

Úloha č. 5:
Skupinka troch turistov idúcich rýchlosťou 6 km/h a jeden cyklista idúci rýchlosťou 30 km/h sa vybrali na cestu z dediny A do dediny B, ktoré sú vzdialené 45 km. Neznie to dobre, ale je to tak. Cyklista môže odviezť jedného cestujúceho. Nájdite najkratší čas, za aký celá partia môže doraziť do dediny B a spôsob, ako tento čas dosiahnuť.

Úloha č. 6:
V hoteli je 10 izieb umiestnených na jednej chodbe očíslovaných od 1 po 10 v tomto poradí. Hosť si môže buď objednať jednu izbu na dva po sebe idúce dni, alebo dve susedné izby na jeden deň. Nájomné je 1 dukát na izbu a deň. Turistická sezóna trvá 50 dní. Je známe, že izba číslo 1 nebola obsadená prvý a izba číslo 10 posledný deň sezóny. Dokážte, že majitelia na nájomnom nezískali viac ako 496 dukátov.

Úloha č. 7:
Existuje v rovine 100 priamok takých, že žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode a spolu sa pretínajú práve v 2004 bodoch?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a pre $n > 2$ nech číslo $a_n = \overline{a_{n-1}a_{n-2}}$ vznikne spojením čísel a_{n-1} a a_{n-2} sprava doľava. Postupnosť ďalej pokračuje takto: $a_3 = \overline{a_2a_1} = 10$, $a_4 = \overline{a_3a_2} = 101$, $a_5 = \overline{a_4a_3} = 10110$. Nájdite všetky n, pre ktoré je a_n deliteľné číslom 11.

Úloha č. 9:
Máme 1001 obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán nepresahujúcimi 1000. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri (nazvime ich A, B a C) tak, že A sa zmestí do B a B sa zmestí do C.
Poznámka: Ak sú dva obdĺžniky rovnaké, zmestia sa jeden do druhého.

Úloha č. 10:
V piesku na Dunajskej pláži sú napísané čísla 19 a 82. Každý deň prejde okolo nich kajakár Rúža a s číslami urobí jednu z troch možných zmien: obe čísla zvýši o jedna, obe čísla umocní na druhú, alebo jedno z čísel zvýši o jedna a druhé umocní na druhú. Môže sa stať, že jedného dňa budú obe čísla rovnaké?

Úloha č. 11:
Daný je konečný počet štvorcov, pričom súčet ich obsahov je 1/2. Ukážte, že ich je možné umiestniť do štvorca so stranou 1 tak, aby sa neprekrývali.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Daná je postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, pričom a_1 nie je deliteľné piatimi a pre každé prirodzené číslo $n \geq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslica na mieste jednotiek čísla a_n. Dokážte, že postupnosť a_n obsahuje nekonečne veľa mocnín dvojky.

Úloha č. 13:
Nájdite prirodzené čísla a, b tak, aby výraz

$$\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

bol čo najväčším prvočíslom.

Úloha č. 14:
Kružnice k_1 a k_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode A a súčasne sa obe dotýkajú zvnútra kružnice k v bodoch A_1 a A_2. Bod P je jeden z priesečníkov spoločnej vnútornej dotyčnice k_1 a k_2 s kružnicou k. Nakoniec, body B_i sú druhé priesečníky priamok PA_i s kružnicou k_i $(i = 1, 2)$. Dokážte, že priamka B_1B_2 sa dotýka oboch kružníc k_1, k_2.

Odporúčaná literatúra

Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2. Mladá fronta, Praha, 1961
Veselý, F.: O dělitelnosti celých čísel, ŠMM 14. Mladá fronta, Praha, 1966
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Vrba, A.: Kombinatorika, ŠMM 45. Mladá fronta, Praha, 1980
Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Státní pedagogické nakladatelsví, Praha, 1990.
Vilenkin, N. L.: Kombinatorika. SNTL – Mir, Praha – Moskva, 1977.
Vrba, A.: Princip matematické indukce, ŠMM 40. Mladá fronta, Praha, 1977
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Mac Lane, S – Birkhoff, G.: Algebra. ALFA, Bratislava, 1974.
Engel, A.: Problem–solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

Termín odoslania riešení: **4. október 2004** (pre zahraničie 1. október 2004)

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`