Zadania 3. série zimnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Skupina myšiek bývajúca na F324 sa rozhodla usporiadať športové zápolenie. Najskôr sa samozrejme musia rozdeliť do družín. Myšky sa o to už hodnú chvíľu snažia a stále nič. Zistili iba, že keby ich bolo o tri viac, mohli by sa rozdeliť do štyroch družín, keby ich bolo o štyri viac, mohlo by byť družín päť a nakoniec, keby ich bolo o päť viac, mohli by sa rozdeliť do šiestich družín. Zistite všetky možné počty myšiek.

Úloha č. 2:
V krajine tvaru štvorcovej siete 3×3 žijú ovečky a vlci. Každý rok si každý z tvorov vyberie jedno ľubovoľné políčko, kde bude celý nasledujuci rok, pričom 2 zvieratká rovnakého druhu nemôžu byť na tom istom políčku. Ak sa na políčku nachádza iba jedna ovečka, po roku umrie, ale porodí ďalšie dve ovečky (tie v nasledujúcom roku môžu ísť na hociktoré políčka). Ak je na políčku iba vlk, tak umrie, lebo sa nenapapá. Ak je na políčku vlk a ovečka, tak vlk zožerie ovečku, po roku zomrie, ale porodí ďalších dvoch vlkov. Zistite, aké počty vlkov a ovečiek v krajine spôsobia, že po niekoľkých rokoch *URČITE* niektorý z druhov vymrie.
Poznámka: Ak sa stane, že sa má v krajinke rozmiestniť 10 alebo viac ovečiek (vlkov), tak sa rozmiestni iba 9 a ostatné odídu študovať do USA, pričom sa už nevrátia.

Úloha č. 3:
Nepárne prirodzené čísla sú rozdelené do skupín nasledovne: V prvej skupine je číslo jedna. Pre $n \geq 2$, po zostavení $n-1$ skupín zostavíme n-tú tak, že do nej dáme $2n-1$ najmenších nepárnych prirodzených čísel, ktoré ešte nie sú v žiadnej skupine. Zistite, v ktorej skupine je číslo

a) 17 b) 2004 c) $2004^{2004}-1$.

Úloha č. 4:
Nech a, b, c sú reálne čísla také, že $a^2+c^2 \leq 4b$. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1 \geq 0\,.$$

Úloha č. 5:
20 členov tenisového klubu sa rozhodlo usporiadať medzi sebou 14 súbojov dvojhry tak, aby každý člen hral aspoň jeden zápas. Dokážte, že spomedzi týchto 14 súbojov vieme vybrať 6 tak, že všetkých 12 hráčov v týchto súbojoch je rôznych.

Úloha č. 6:
Prirodzené čísla p, q sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď sú nesúdeliteľné čísla 2^p-1, 2^q-1. Je toto tvrdenie pravdivé?
Poznámka: Dve čísla sú nesúdeliteľné práve vtedy, keď ich najväčší spoločný deliteľ je jedna.

Úloha č. 7:
Tomáš dostal na narodeniny veľkú bonboniéru. Mala štvorcový tvar rozmerov $2n\times 2n$ (bolo v nej teda $4n^2$ cukríkov rozmiestnených v $2n$ riadkoch a $2n$ stĺpcoch). Ešte na oslave ju otvoril a spolu s kamarátmi veľa cukríkov zjedli. Keď sa druhý deň Tomáš zobudil, našiel v bonboniére, chúďa, už iba $3n$ cukríkov. Dokážte, že bez ohľadu na to, ktoré cukríky zostali, môže Tomáš zvoliť takých n riadkov a n stĺpcov bonboniéry, že na nich budú všetky zvyšné cukríky.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech x a y sú reálne čísla také, že x^2+y^2, x^3+y^3 aj x^4+y^4 sú racionálne čísla. Dokážte, že potom aj $x+y$ a xy sú racionálne čísla.

Úloha č. 9:
Nájdite všetky dvojice celých čísel x a y, pre ktoré platí

$$(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)+x(x+1)(x+2)=y^{2^x}.$$

Úloha č. 10:
Štvorec s rozmermi 99×99 je celý pokrytý dlaždičkami tvarov ,  a . Žiadne dve dlaždičky sa neprekrývajú a žiadna nevyčnieva von. Dlaždičky môžu byť aj pootáčané. Dokážte, že dlaždičiek tvaru  je aspoň 199.

Úloha č. 11:
Rasťo má na papieri napísaných 26 rôznych čísel z množiny $\{1,2,\ldots,100\}$. Ukážte, že sa z nich dá vybrať niekoľko (aspoň jedno) tak, že ich súčin bude štvorec (t.j. druhá mocnina celého čísla).

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
V ostrouhlom trojuholníku ABC platí $|AC| < |AB|$. Body O, H, P sú postupne stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ortocentrum trojuholníka ABC a päta výšky z vrcholu C na stranu AB. Nech kolmica cez bod P na priamku OP pretína priamku AC v bode Q. Dokážte, že uhly PHQ a BAC majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 13:
Nech p je prvočíslo tvaru $4k+1$. Dokážte, že rovnica $x^2 - py^2 = -1$ má aspoň jedno riešenie (x, y) v celých číslach.

Úloha č. 14:
Ľubovoľný n-uholník P leží v rovine. Jeho strany sú označené $1, 2, \ldots, n$. Nech $S = s_1, s_2, s_3, \ldots$ je konečná alebo nekonečná postupnosť, pričom $s_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Budeme preklápať mnohouholník P takto: najprv ho preklopíme okolo hrany s číslom s_1 (takže P v novej polohe je osovo súmerný s P v pôvodnej polohe podľa strany s_1), potom okolo hrany s číslom s_2 a tak ďalej.

a) Dokážte, že existuje nekonečná postupnosť S taká, že keď podľa nej budeme preklápať P, tak každý bod v rovine bude aspoň raz zakrytý mnohouholníkom P.

b) Dokážte, že postupnosť S požadovaná v časti a) nemôže byť periodická.

c) Nech P je pravidelný päťuholník s polomerom opísanej kružnice rovným 1. Nech D je ľubovoľný kruh s polomerom $1,00001$ v rovine päťuholníka. Existuje konečná postupnosť S taká, že keď popreklápame P podľa S, bude päťuholník P celý ležať vnútri kruhu D?

Odporúčaná literatúra

Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2. Mladá fronta, Praha, 1961.
Veselý, F.: O dělitelnosti celých čísel, ŠMM 14. Mladá fronta, Praha, 1966.
Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Státní pedagogické nakladatelsví, Praha, 1990. ISBN 80-210-0120-8
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990. ISBN 80-05-00627-6
Lozansky, E. – Rousseau, C.: Winning Solutions. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1996. ISBN 0-387-94743-4
Engel, A.: Problem–Solving Strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998. ISBN 0-387-98219-1
Kuczma, M. E.: International Mathematical Olympiads 1986–1999. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003. ISBN 0-88385-811-8
Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry Revised. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967. ISBN 0-88385-619-0

Termín odoslania riešení: **29. november 2004** (pre zahraničie 26. november 2004)

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`