Zadania 1. série letnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

V tomto obdĺžniku je práve jedno nepravdivé tvrdenie.
V tomto obdĺžniku sú práve dve nepravdivé tvrdenia.
V tomto obdĺžniku sú práve tri nepravdivé tvrdenia.
$\vdots$
V tomto obdĺžniku je práve 2005 nepravdivých tvrdení.
V tomto obdĺžniku je práve 2006 nepravdivých tvrdení.

Koľko z tvrdení v obdĺžniku je pravdivých?

Úloha č. 2:
Zistite, aká číslica bude na 7000. mieste za desatinnou čiarkou v desatinnom zápise čísla 1/7000.

Úloha č. 3:
Nájdite najmenšie číslo deliteľné číslom 12, ktoré sa v desiatkovej sústave dá zapísať pomocou piatich jednotiek a ľubovoľného počtu číslic 0 a 3.

Úloha č. 4:
Na obvode kruhu je pravidelne rozmiestnených 100 bodov. Niektorých 50 z nich je zafarbených na červeno, zvyšných 50 na modro. Pri ľubovoľnom zafarbení bodov platí, že počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých všetky tri vrcholy sú červené, je rovnaký, ako počet pravouhlých trojuholníkov, ktorých vrcholy sú modré. Dokážte.

Úloha č. 5:
Aďka sa po sústredení rozhodla, že chce domáce zvieratko a kúpila si žabičku. Aby sa žabička nenudila, nakreslila jej na stôl mrežovú sieť a žabku položila do jedného z mrežových bodov. Do bodu, ktorý je o dva body vpravo a o dva body hore od žabičky, Aďka položila lentilku. Pre žabky je lentilka veľká pochúťka, preto sa čoskoro vydá ju zjesť. Žabička sa vie medzi mrežovými bodmi pohybovať iba tak, že skočí o jeden bod hore, dole, doprava alebo doľava. K lentilke sa chce dostať po presne šiestom skoku (nie skôr), pričom jej nevadí, ak medzi niektorými dvomi bodmi skočí viackrát. Pomôžte Aďkinej žabke zistiť, koľkými spôsobmi sa vie dostať k pochúťke.

Úloha č. 6:
Dvaja hráči hrajú takúto hru: Na tabuli sú napísané dve čísla, napríklad 144 a 15. Hráči sa striedajú v ťahoch. Ten, kto je na ťahu, si vyberie nejaké dve (rôzne) čísla na tabuli a pripíše nové, ktoré je ich rozdielom (tým kladným rozdielom, záporné čísla sa na tabuľu nepíšu), pričom to nové číslo musí byť rozdielne od všetkých, ktoré už sú na tabuli. Takto hráči ťahajú, až kým jeden z nich nemôže pripísať na tabuľu žiadne nové číslo. Hráč, ktorý nemôže potiahnuť, prehral. Popíšte, ako má ťahať prvý hráč, aby vyhral, ak na začiatku sú na tabuli napísané čísla
a) 17 a 4,
b) 102 a 201.

Úloha č. 7:
Na tabuli bola nakreslená štvorcová tabuľka s 10×10 políčkami. V každom políčku bolo napísané jedno celé číslo. Čísla v riadkoch boli zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Peťo znenazdajky poprehadzoval čísla v každom stĺpci tak, že teraz sú v každom stĺpci čísla zoradené podľa veľkosti od najmenšieho po najväčšie. Dokážte, že pôvodná dobrá vlastnosť tabuľky sa nepokazila, teda čísla v riadkoch sú opäť zoradené podľa veľkosti.

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Mazo dostal na Vianoce čiernu skrinku a k nej manuál obsahujúci konečný počet (najmenej však dve) navzájom rôznych reálnych čísel. Keď do skrinky vložíme ľubovoľné číslo z manuálu, vypadne z nej opäť jedno z čísel uvedených v manuáli. Mazo zistil, že keď vloží do skrinky ľubovoľné číslo x, vypadne mu číslo $ax+b$, kde a, b sú reálne konštanty vmontované výrobcom do skrinky ($a \neq 0$).
(a) Zistite, koľko môže existovať rôznych skriniek (s rôznymi konštantami) k Mazovmu manuálu.
(b) Aďa sa chváli, že dostala manuál, v ktorom je 2005 čísel so súčtom 0 a k nemu dve rôzne čierne skrinky. Mazo overil, že skrinky sú od toho istého výrobcu ako jeho skrinka, zamyslel sa a potom povedal, že v Adinom manuáli musí byť aj číslo 0. Má Mazo pravdu?

Úloha č. 9:
Nech $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n = 1, 2, \dots$ (známa Fibonacciho postupnosť). Zistite, či existuje nekonečná rastúca aritmetická postupnosť prirodzených čísel, ktorá neobsahuje žiadne číslo z Fibonacciho postupnosti.

Úloha č. 10:
Rasťo sa hrá s tabuľkou 6×6, ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kamienok. Rasťo vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke?

Úloha č. 11:
Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sa dajú čísla $1, 2, 3, \dots, 4n$ rozdeliť do n skupín po štyri čísla tak, aby v každej skupine aspoň jedno číslo bolo priemerom zvyšných troch.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech $ABCO$ je štvorsten taký, že priamky OA, OB, OC sú navzájom kolmé. Nech r je polomer gule doňho vpísanej a nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že $|OH| \leq \pi r$.

Úloha č. 13:
Daný je rovnobežník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok O. Body M, N sú stredy úsečiek BO, CD (v tomto poradí). Dokážte, že ak trojuholníky ABC a AMN sú podobné, tak $ABCD$ je štvorec.

Úloha č. 14:
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

Náboj a Klub Trojstenu.

Celkom nečakane, aj tento rok sa blíži jar a s ňou koniec marca a začiatok apríla, ktorý je pre nás všetkých neodmysliteľne spätý s Nábojom. Niekedy v tomto čase sa môžete tešiť na ďalší zo skvelých Nábojov KMS a možno aj na čoraz obľúbenejší Klub Trojstenu (nechajte sa prekvapiť :). Pozvánku aj s presným dátumom konania včas zašleme aj na vašu školu. Najaktuálnejšie informácie ale samozrejme nájdete na našej internetovej stránke `www.kms.sk`, kde sa okrem iného dozviete aj to, či, a ak áno, tak aké prekvapenie sme pripravili v súvislosti s tohtoročným Nábojom.

Termín odoslania riešení: **6. marca 2006** (pre zahraničie 3. marca 2006)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`