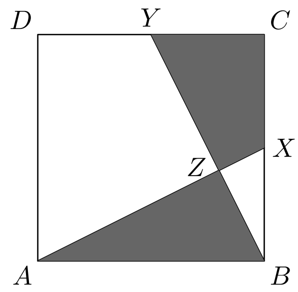
Zadania 2. série letnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Daná je úsečka AB. Navrhnite prirodzené číslo n a rozmiestnenie bodov X_1, X_2, …, X_n na úsečke AB tak, aby bol súčet dĺžok polkružníc s priemermi AX_1, X_1X_2, …, X_nB čo najmenší.

Úloha č. 2:
Na obrázku je nakreslený štvorec $ABCD$. Body X a Y sú stredy strán BC a CD. Porovnajte obsahy dvoch tmavých útvarov.



Úloha č. 3:
Majme obdĺžnik $ABCD$. Nech E a F označujú postupne stredy jeho strán AD a CD. Priesečník úsečiek AF a EC označme G. Dokážte, že uhly CGF a FBE majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 4:
Dané sú dva rovnobežníky $ABCD$ a $EFGH$, pričom bod D je totožný s bodom H, bod E leží na strane AB a bod C leží na strane FG. Dokážte, že obsahy týchto rovnobežníkov sú rovnaké.

Úloha č. 5:
Pavúk si chce poprezerať bočné steny pyramídy so štvorcovou podstavou a bočnými stenami v tvare rovnostranných trojuholníkov. Svoju púť začína zo stredu bočnej steny a chce navštíviť stredy všetkých ostatných bočných stien tak, aby prešiel najkratšiu trasu, pričom sa môže pohybovať iba po povrchu pyramídy. Ako to má spraviť a aká dlhá bude jeho trasa, ak vieme, že dĺžka každej hrany pyramídy je 2 cm? Nezabudnite dokázať, že trasa, ktorú chcete pavúkovi poradiť, je naozaj najkratšia.

Úloha č. 6:
Na veľkonočnom obruse je už s predstihom nakreslený konvexný štvoruholník $ABCD$. Bod M je stred strany AB a bod N je stred strany CD. Veľkonočný zajačik si (tiež s predstihom) všimol, že úsečka MN rozdelila štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že $ABCD$ je lichobežník.

Úloha č. 7:
Zistite a zdôvodnite, či môžu v rovine ležať tri body A, B, C tak, že platí $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2/2$. Ak áno, zistite čo najviac o vzájomnej polohe takýchto troch bodov.

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v (rôznych) bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.

Úloha č. 9:
Picasso namaľoval na veľké plátno okrem niekoľkých kociek aj dva trojuholníky, ABC a KLM. Odvtedy však už pár rôčkov uplynulo, obraz podľahol zubu času a z pôvodných trojuholníkov ostali len niektoré body: stred strany BC označený S_{BC}, bod A, priesečník výšok trojuholníka ABC označený V, stred S kružnice vpísanej do trojuholníka KLM a priesečníky osí uhlov MKL a KLM s protiľahlými stranami trojuholníka KLM. Dokážete zrekonštruovať tieto trojuholníky? Múzeum vám poskytne pravítko, kružidlo a ceruzku. Akýkoľvek iný nástroj by mohol obraz poškodiť, preto ho nesmiete použiť.

Úloha č. 10:
Vnútri strany AC trojuholníka ABC leží bod D taký, že $|AB| = |CD|$ a uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode E. Dokážte, že priamky AB a DE sú rovnobežné.

Úloha č. 11:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Označme v tomto poradí A', B', C', D' obrazy bodov A, B, C, D v osových súmernostiach podľa tej uhlopriečky, na ktorej neležia. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
a) Ak $ABCD$ je lichobežník a $A'B'C'D'$ je štvoruholník, tak $A'B'C'D'$ je tiež lichobežník.
b) Ak S je obsah štvoruholníka $ABCD$ a S' je obsah štvoruholníka určeného bodmi A', B', C', D', tak $S' \leq 3S$.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech M je množina slov dĺžky n nad k-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny M.
Poznámka: Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

Úloha č. 13:
Bod P je vnútorným bodom daného pravidelného mnohouholníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Stredy strán $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ označíme v tomto poradí $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |PM_i| \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} |PA_i| .$$

Kedy nastáva rovnosť? Skúste nájsť čo najlepší dolný a horný odhad pomeru $\sum_{i=1}^{n} |PM_i| \Big/ \sum_{i=1}^{n} |PA_i|$.

Úloha č. 14:
Neznámy dobrodinec nám daroval n bielych mačiatok ležiacich v kruhu, prirodzené číslo m a nasledovnú hru. Začneme počítať mačiatka od prvého a keď napočítame do m, presne m-té mačiatko v poradí zafarbíme na fialovo. Pokračujeme podobne ako predtým: začneme počítať od nasledujúceho $(((m+1) \bmod n)$-tého :) mačiatka, pričom fialové mačiatka už nepočítame, a keď napočítame do m, dotyčné mačiatko zafarbíme. Takto postupujeme, až kým neostane posledné nezafarbené mačiatko. Jedno biele mačiatko si chceme nechať, ale musíme dopredu, pred začatím farbenia, povedať, ktoré. Zjavne teda nie je jedno, ktoré mačiatko si vyberieme, pretože ho chceme mať biele a nie zafarbené na fialovo.
a) Majme v kruhu $2n$ mačiatok, prvých n sú mačičky a druhých n sú kocúrikovia. Vieme zvoliť také m, že najprv zafarbíme všetkých kocúrikov?
b) Majme n mačiatok, ktoré už ležia v kruhu. Mačiatko, ktoré sme si vybrali, je na p-tom mieste. Vieme zvoliť m tak, že mačiatko, ktoré sme si vybrali, ostane posledné?

Termín odoslania riešení: **3. apríl 2006** (pre zahraničie 31. marec 2006)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`