Zadania 3. série letnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Na medzinárodnej olympiáde z matematiky, ktorá sa konala na Galapágoch, sa objavila takáto náročná úloha: *Na štvorčekovom papieri je nakreslený obdĺžnik s rozmermi* 2×4, *vrcholy má v mrežových bodoch a strany má rovnobežné zo stranami papiera. Vyfarbite štvrtinu z jeho obsahu, môžete pri tom vyfarbovať len celé štvorčeky štvorčekovej siete. Nájdite práve jedno riešenie.* Úlohu zdarne vyriešili všetci účastníci súťaže. Pri kontrole výsledkov organizátori s údivom zistili, že žiadne dve riešenia nie sú rovnaké a nikto nevyfarbil dva štvorčeky, ktoré spolu susedili stranou. Inak sa vyskytli všetky možné riešenia. Zistite počet účastníkov tejto olympiády.

Úloha č. 2:
Zdôvodnite, prečo pre žiadne prirodzené čísla x, y neplatí $x^2 - 5y = 27$.

Úloha č. 3:
Máme päť mincí, z ktorých každá má hodnotu jedno euro. Vieme, že tri z nich sú pravé a dve falošné. Falošné mince majú rovnakú hmotnosť, ale nevieme, či väčšiu ako pravé, alebo menšiu. Pravé jednoeurovky majú samozrejme tiež navzájom rovnakú hmotnosť. Na koľko najmenej vážení na rovnoramenných váhach vieme nájsť aspoň jednu pravú mincu ?

Úloha č. 4:
Zábudlivý duch Dušan žije v strašidelnom dome. Tento dom má dva vchody a Dušan má za úlohu strašiť pri práve jednom z nich, zabudol však pri ktorom. Pamätá si len, že pri jeho vchode je vždy párny počet dobrých duchov. Naopak, pri vchode, kde Dušan nemá strašiť, je vždy nepárny počet dobrých duchov. Okrem Dušana sú v dome len dobrí a zlí duchovia, Dušan nie je ani dobrý, ani zlý. Každý dobrý duch hovorí vždy pravdu, každý zlý vždy klame. Dušan sa vybral k jednému z vchodov a tam stretol troch duchov A, B a C, ktorí mu povedali:

A: Pri tomto vchode je párny počet zlých duchov.

B: Práve teraz je tu nepárny počet duchov. (Vrátane Dušana.)

C: Som dobrý duch práve vtedy, keď A a B maju rovnakú povahu. (Obaja sú dobrí, alebo sú obaja zlí.)

Je Dušan pri svojom vchode? Pozor. A, B a C nemusia byť jediní duchovia, ktorí sú pri tomto vchode.

Úloha č. 5:
Máme šachovnicu s rozmermi 3×3, v jej strede j stojí kráľ. Na ostatné políčka okolo neho sa rozostavujú poddaní, pričom na každom políčku môže byť ľubovoľný počet poddaných. Rozostavujú sa tak, aby ich počet bol rovnaký v oboch krajných riadkoch aj stĺpcoch. Zistite, aké rôzne počty poddaných sa môžu rozostaviť na šachovnicu, ak má byť ich počet v každom z krajných riadkov aj stĺpcov 19. Nezabudnite k týmto počtom napísať aj príslušné rozostavenie.

Úloha č. 6:
Máme šachovnicu s rozmermi 3×3. V dolných rohoch sú dva červené kone, v horných rohoch sú dva modré kone. Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že dva červené kone budú v horných rohoch a dva modré kone budú v dolných rohoch? Na koľko najmenej ťahov vieme dosiahnuť, že po diagonálach (uhlopriečkach) budú oproti sebe kone rovnakej farby?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 7:
V Uhorkovom meste majú neuveriteľne veľa štvorcových námestí so stranou celočíselnej dĺžky. Chcú ich vydláždiť dlaždicami tvaru  (zloženými zo štyroch zhodných jednotkových štvorcov). Pomôžte Vševedkovi zistiť všetky možné rozmery (štvorcových) námestí, ktoré je možné vydláždiť.
Poznámka: Jednotkový štvorec je štvorec so stranou dĺžky 1.

Úloha č. 8:
Sofiine šťastné čísla sú tieto: všetky mocniny čísla 5, všetky súčty aspoň dvoch rôznych mocnín čísla 5 a číslo 69. Raz chcel Miťo zavolať Sofii, no nepamätal si jej číslo. Vedel len, že je to jej 2006-te najmenšie šťastné číslo. Pomôžte Miťovi zistiť Sofiine telefónne číslo.

Úloha č. 9:
Dané sú kladné reálne čísla x, y, z také, že rozdiel každých dvoch z nich má absolútnu hodnotu menšiu ako 2. Dokážte, že

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

Úloha č. 10:
Nech k je prirodzené číslo a $P(x)$ polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že existuje prirodzené číslo n také, že súčet $P(1) + P(2) + \cdots + P(n)$ je deliteľný číslom k.

Úloha č. 11:
Bača má v stáde 101 oviec. Ak z nich vyberie ľubovoľných 100, vždy ich vie rozdeliť na 2 skupiny po 50 oviec tak, aby súčty hmotností oviec v jednotlivých skupinách boli rovnaké. Dokážte, že každé dve bačove ovce vážia rovnako.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech ABC je trojuholník ($|AB| < |BC|$) a S stred kružnice doňho vpísanej. Označme M stred úsečky AC a N stred toho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý obsahuje bod B. Dokážte, že uhly SMA a SNB majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 13:
Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y, pre ktoré platí

$$3^x = y \cdot 2^x + 1.$$

Úloha č. 14:
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokážte, že

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Termín odoslania riešení: **2. máj 2006 (Pozor, je to utorok.)** (pre zahraničie 28. apríl 2006)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava www.kms.sk