

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:

Vieme, že súčet trinástich rôznych prirodzených čísel je 92. Zistite súčet dvoch najväčších z týchto čísel.

Úloha č. 2:

Dve dobré kamarátky Janka a Hanka si prvého septembra presne napoludnie nastavili ručičkové hodinky na rovnaký (správny) čas. O niekoľko dní sa znovu stretli a zistili, že Jankine hodinky sa každú hodinu ponáhľajú o jednu sekundu a Hankine sa každú hodinu omeškajú o jeden a pol sekundy. Zistite, o koľko hodín najbližšie od poludnia prvého septembra budú hodinky oboch dievčat ukazovať rovnaký čas. Zistite tiež, o koľko hodín budú najbližšie ukazovať naraz správny čas.

Úloha č. 3:

Zistite, koľko rôznych štvorciferných čísel možno napísať pomocou cifier 1, 2, ..., 8, ak majú byť všetky cifry v čísle navzájom rôzne a všetky zostavené čísla majú byť deliteľné deviatimi.

Úloha č. 4:

O jednej skúške vieme, že priemerný počet bodov študentov, ktorí túto skúšku spravili, je 65. Priemerný počet bodov tých, ktorí ju nespravili, je 35. Zistite, koľko percent študentov skúšku spravilo, ak je celkový priemerný počet bodov 53.

Úloha č. 5:

V triede je 29 študentov. Každý študent buď stále klame, alebo stále hovorí pravdu. Jedného dňa si študenti posadali okolo okrúhleho stola a každý z nich povedal, že obaja jeho susedia sú klamári. Dokážte, že v triede je aspoň 10 študentov, ktorí stále hovoria pravdu. Je možné, aby v triede bolo presne 10 takýchto študentov?

Úloha č. 6:

Nevedko vie, že Hlavné námestie v Uhorkovom meste má tvar obdĺžnika a je celé pokryté štvorcovými dlaždičkami veľkosti 10 cm × 10 cm, ktoré sa neprekrývajú. Jeho kamarát Vševedko vie, že polovica všetkých dlaždičiek leží na okraji námestia. A čo vy, viete povedať, aké má toto námestie rozmery?

Úloha č. 7:

Nekonečne veľa mravcov ide za sebou popri stene domu. Prvý ide Ferdo. Druhý si udržiava od Ferda konštantný odstup pol metra. Tretí mravec ide 3/4 metra za Ferdom, štvrtý 4/5 metra a n -tý mravec v poradí ide $n/(n+1)$ metra za Ferdom. Vracajú sa domov s úlovkom pozostávajúcím z piatich stebiel trávy rovnakej dĺžky l . Nájdite najmenšie možné l , ak viete, že každý mravec nesie aspoň jedno steblo.

Kategória BETA

Úlohy číslo 5, 6, 7 sú rovnaké ako v kategórii ALFA.

Úloha č. 8:

Máme 45 klebetníc, pričom každá sa za posledný týždeň dozvedela novú klebetu a chce sa o ňu podeliť s ostatnými. Vie to urobiť tak, že niektorej inej zavolá a pritom si navzájom povedia všetky klebety, ktoré vedia. Chceme, aby každá z nich vedela všetky klebety. Na koľko najmenej zavolaní to ide?

Úloha č. 9:

Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned}x^3 - y^2 &= z^2 - x \\y^3 - z^2 &= x^2 - y \\y^3 - x^2 &= y^2 - z.\end{aligned}$$

Poznámka: Daná sústava naozaj *nie* je symetrická a tak to aj má byť :-).

Úloha č. 10:

Na plániku je 2000 miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto A je počet miest spojených s mestom A priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel 1, 2, 4, 8, ..., 1024. Nech $S(A)$ je počet ciest z mesta A do iných miest (rôznych od A) s najviac jedným medzipristátím. Nezabudnite, že z mesta A do mesta B môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do $S(A)$ započítať. Dokážte, že keď sčítame $S(A)$ všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť 10 000.

Úloha č. 11:

Nájdite najmenšie nepárne prirodzené číslo $n > 1$ s nasledujúcou vlastnosťou: existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorých štvorec (druhá mocnina) je rovný súčtu štvorcov nejakých n za sebou idúcich prirodzených čísel.

Katégorie GAMA

Úlohy číslo 10 a 11 sú rovnaké ako v kategórii BETA.

Úloha č. 12:

Nech $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ je taká funkcia, že funkcie $f(x) - x^3$ a $f(x) - 3x$ sú rastúce. Zistite, či funkcia $f(x) - x^2 - x$ musí byť monotónna.

Úloha č. 13:

Kružnica k vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka strán AB , BC , CA po poradí v bodoch Q , E , P . Úsečka EF je priemerom kružnice k . Priamky FA , FP , FQ pretínajú priamku BC po poradí v bodoch M , K , L . Dokážte, že bod M je stredom úsečky KL .

Úloha č. 14:

Dokážte, že z ľubovoľných 200 prirodzených čísel vieme vybrať práve 100 čísel tak, že súčet vybratých čísel je deliteľný číslom 100.

Odporúčaná literatúra

Zoznam odporúčanej literatúry k tejto sérii, ako aj k samostatnému štúdiu, nájdete na internete na adrese www.kms.sk/kniznica.php. Na tejto adrese je tiež zoznam všetkých kníh z **Knižnice KMS**, ktoré sú k dispozícii našim riešiteľom, ako aj ostatným matematickým nadšencom. Kontaktná adresa je mito@kms.sk.

Sponzori

Za sponzorstvo ďakujeme firme Radoma, s.r.o. Prešov.

Termín odoslania riešení: **10. október 2005** (pre zahraničie 7. október 2005)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

www.kms.sk