Zadania 2. série zimnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Máme daný pravidelný päťuholník $ABCDE$. Nájdite súčet uhlov ACB, CAD a ADE.

Úloha č. 2:
V trojuholníku ABC označme S priesečník osí jeho vnútorných uhlov. Bodom S veďme priamku p rovnobežnú so stranou AB. Priesečníky priamky p so stranami AC, BC označme po rade P, Q. Dokážte, že $|PQ| = |AP| + |BQ|$.

Úloha č. 3:
Daný je trojuholník ABC. Na strane AB leží bod D tak, že je v jednej tretine tejto strany bližšie k bodu A. Na strane BC leží bod E tak, že je v jednej štvrtine tejto strany bližšie k bodu B. Na strane AC leží bod F tak, že je v jednej polovici tejto strany. Zistite, aký je pomer obsahov trojuholníkov DEF a ABC.

Úloha č. 4:
V rovine je daný trojuholník KMS, ktorý je mapou nejakého územia. Územie je rozdelené medzi tri štáty, ktorých hlavné mestá sú vrcholy trojuholníka K, M, S. Každý bod trojuholníka patrí tomu štátu, ku ktorého hlavnému mestu je najbližšie. Ak je nejaký bod rovnako vzdialený od dvoch (troch) hlavných miest, patrí hranici týchto štátov. Zistite, ako musí vyzerať trojuholník KMS, aby niektoré dva štáty nemali spoločnú hranicu.

Úloha č. 5:
Nech CD a BE sú výšky trojuholníka ABC. Dokážte, že trojuholníky ACB a ADE sú podobné.

Úloha č. 6:
Kružnicu k so stredom S pretínajú dve rôznobežné priamky p a r. Priesečník P týchto priamok leží zvonku kružnice k. Priamka p prechádza bodom S a pretína kružnicu k v bodoch A a B, pričom bod B leží na úsečke AP. Priamka r pretína kružnicu k v bodoch C a D, pričom bod D leží na úsečke CP. Dĺžka DP je zhodná s polomerom kružnice k. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, ak viete, že uhol priamok p a r je φ.

Úloha č. 7:
Medzi Marsom a Jupiterom sú tri planétky K_{01},M_{10} a S_{11}, ktoré neležia na jednej priamke. Naša NASA vyslala sondu, ktorá by mala okolo nich preletieť po priamke tak, aby boli vzdialenosti všetkých troch planétok od dráhy letu sondy rovnaké. Pomôžte svojim kolegom matematikom z NASA a určte množinu všetkých možných dráh sondy.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech bod I je stred kružnice k vpísanej do trojuholníka ABC a nech T je prienik tejto kružnice s úsečkou BC. Priamka rovnobežná s priamkou IA prechádzajúca bodom T pretína kružnicu k po druhý raz v bode S. Dotyčnica ku kružnici k v bode S pretína úsečky AB a AC v bodoch C_1 a B_1 (v tomto poradí). Dokážte, že trojuholníky ABC a AB_1C_1 sú podobné.

Úloha č. 9:
V priestore je daný valec s výškou 1 Ym a s polomerom podstavy 1 Ym. Nájdite najmenší počet lôpt (gúľ) s polomerom 1 Ym potrebných na pokrytie tejto oblasti.

Poznámka: Ak vás zaujíma, čo je „Ym“, skúste sa pozrieť napríklad na internetovú stránku s adresou `http://columbia.thefreedictionary.com/List+of+Prefixes+for+Basic+Metric+Units`.

Úloha č. 10:
Po hranách kocky lozia traja pavúci a v jej vnútri lieta mucha. Pavúci tvoria vrcholy trojuholníkovej siete a snažia sa ňou chytiť muchu. Maximálna rýchlosť aspoň jedného z nich je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Pavúci muchu chytia, ak sa nachádza vnútri stiete, alebo na jej okraji. Zistite, či sa pavúkom vždy podarí muchu chytiť.

Úloha č. 11:
Kružnice so stredmi O a O' sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka TT' sa dotýka prvej kružnice v bode T a druhej v bode T'. Päty kolmíc spustených z bodov T a T' na priamku OO' označme S a S'. Polpriamka AS pretína prvú kružnicu znova v bode R a polpriamka AS' druhú kružnicu znova v bode R'. Dokážte, že body R, B a R' ležia na jednej priamke.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x),$$

kde x, y, z sú reálne čísla.

Prémiová úloha za (bezvýznamný) plusový bodík: Viete zistiť (a poriadne dokázať), či daný výraz nadobúda všetky hodnoty medzi minimom a maximom?

Úloha č. 13:
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ také, že pre všetky kladné celé čísla m, n je číslo $(m^2+n)^2$ deliteľné číslom $f(m^2) + f(n)$.

Úloha č. 14:
V rovine sú dané dve konečné množiny bodov A, B. Pre každú množinu C štyroch navzájom rôznych bodov z množiny $(A \cup B)$ existuje priamka, ktorá oddelí množinu $(C \cap A)$ od množiny $(C \cap B)$ (priamka oddeľuje dve množiny bodov práve vtedy, ak sa body jednej z týchto množín nachádzajú vnútri jednej z polrovín určených touto priamkou a body druhej množiny sa nachádzajú vnútri tej druhej polroviny). Dokážte, že existuje priamka, ktorá oddeľuje množiny A a B.

Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963
Horák, S.: Kružnice, ŠMM 16. Mladá fronta, Praha, 1966
Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revisited. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.

Tieto, ako aj ďalšie zaujímavé matematické knižky možno čítať aj vďaka **Knižnici KMS**. Viac informácií nájdeš na `www.kms.sk/kniznica.php`.

Náboj FKS a Klub Trojstenu.

S veľkým potešením Vám oznamujeme, že dňa 11. novembra 2005 sa uskutoční ďalší ročník obľúbeného **Náboja FKS**. Vítaní sú všetci študenti stredných škôl, ktorých baví fyzika. Bližšie informácie nájdete na internetovej stránke `www.fks.sk` a vo vzorových riešeniach prvej série FKS.
Na druhý deň sa uskutoční v poradí už tretie vydanie Klubu Trojstenu. Ako zvyčajne, budete si môcť vypočuť niekoľko zaujímavých prednášok z matematiky, fyziky a informatiky, stretnúť sa so študentmi z celého Slovenska s podobnými záujmami a poobede si zahrať Veľkú hru. Ako zvyčajne, bližšie informácie možno nájsť na internetovej stánke `www.kms.sk/klub.php`.

Termín odoslania riešení: **7. november 2005** (pre zahraničie 4. november 2005)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `www.kms.sk`