Zadania 3. série zimnej časti KMS 2005/2006

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Rozdeľte dva zhodné pravidelné šesťuholníky spolu na šesť častí tak, aby ste z týchto častí vedeli poskladať rovnostranný trojuholník (bez medzier alebo prienikov týchto častí).

Úloha č. 2:
Ďaleko-preďaleko, v krajine púští a stromov, žil si štastne kmeň beduínov na čele s náčelníkom Omarom. Omar bol múdry a spravodlivý náčelník, preto sa rozhodol vysporiadať sa aj s krádežou slona, ktorá sa jedného dňa v kmeni odohrala. Nájsť zlodeja nebolo ťažké, ale na veľké prekvapenie všetkých bolo ťažké nájsť majiteľa slona. Vedelo sa, že slon patrí jednému z trojice Ahmed, Mehak a Zafir, pričom je všeobecne známe, že každý z nich buď vždy klame, alebo vždy hovorí pravdu. Títo traja muži predniesli pred Omarom nasledujúce výroky:
Ahmed: „Slon patrí Zafirovi.“
Mehak: „Môj slon to nie je.“
Zafir: „Aspoň dvaja z nás klamú.“
Z týchto výrokov Omar, aj napriek svojej veľkej múdrosti, nemohol určiť, komu slon patrí. To ho trochu nahnevalo, a tak povedal: „No tak, komu z vás slon naozaj patrí?“ Zafir mu odpovedal a odpoveďou bolo meno jedného z nich, teda jedno z mien Ahmed, Mehak a Zafir. Potom už Omar vedel, komu slon patrí. Viete to už aj vy?

Úloha č. 3:
Je známe, že štvorec (druhá mocnina) každého nepárneho prirodzeného čísla dáva po delení číslom 2 zvyšok 1.
a) Bude tento zvyšok rovný 1 aj po delení jednotlivými číslami 4, 8, 16, resp. 32?
b) Vezmime ľubovoľné prirodzené číslo, ktoré nie je deliteľné číslom 3. Bude jeho štvorec po delení číslom 3 dávať zvyšok 1? Aké zvyšky bude dávať po delení číslom 9?

Úloha č. 4:
Danka mala v zošite napísané tri rôzne nenulové cifry. Vytvorila z nich všetky možné trojciferné čísla a tie sčítala. Vyšlo jej číslo 2125. Neskôr si uvedomila, že jedno z trojciferných čísel zabudla pripočítať. Ktoré to bolo?

Úloha č. 5:
Kde bolo, tam bolo, bola raz jedna krajina. V tejto krajine si žili dievčatá a chlapci, a žili si štastne, pretože každý mal aspoň jedného kamaráta. Jedného dňa sa deti rozhodli, že sa zabavia, a preto usporiadajú dve súťaže: volejbalový turnaj a matematickú olympiádu. Pochopiteľne, že obe súťaže sa uskutočnili presne v ten istý čas. Všetkým deťom sa síce páčili obe súťaže, ale každý sa zúčastnil práve jednej z nich. „Nuž, nevadí,“ povedali si deti a pretože sú zvedavé, dodali: „Poprosím teda niektorého zo svojich kamarátov, aby mi prezradil, ako bolo na druhej súťaži.“
Vašou úlohou je dokázať, že deti sa mohli rozdeliť na obe súťaže tak, aby každé z nich malo kamaráta na druhej súťaži (teda na tej, ktorej sa nezúčastnilo).

Úloha č. 6:
Nech x, y, z sú ľubovoľné reálne čísla.
a) Dokážte, že ak platí $y < 1 < x$, tak platí aj $xy + 1 < x + y$;
b) Ak sú splnené všetky tri predpoklady $1 \leq x$, $y \leq z$ a $y + z < x + 1$, tak platí $y < x$.

Úloha č. 7:
Okolo ohňa sedí $n+1$ psov ($n \geq 1$). Jeden z nich je bankár a má n kariet, ostatní nemajú ani jednu kartu. V jednom kroku zvolíme dvoch psov A a B (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kartu a spolu majú aspoň dve. Zoberieme jednu kartu od psa A a dáme ju jednému zo susedov psa B a zoberieme jednu kartu od psa B a dáme ju jednému zo susedov psa A. Pre ktoré n sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem bankára má jednu kartu?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Graf funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má dva stredy symetrie. Dokážte, že funkcia f sa dá napísať ako súčet lineárnej a periodickej funkcie.

Úloha č. 9:
Nech m, n sú kladné celé čísla. Dokážte, že číslo $5^m + 5^n$ sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov práve vtedy, keď je číslo $m - n$ párne.

Úloha č. 10:
Pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geq 6abc\,.$$

Úloha č. 11:
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť s počiatočnými členmi $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 15$ a s predpisom

$$a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \qquad \text{pre } n \geq 4.$$

Dokážte, že ak je a_n prvočíslo, tak aj n je prvočíslo.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nech M je množina slov dĺžky n nad k-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny M.

Poznámka: Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.

Úloha č. 13:
a) (3 body) Daná je priamka a na nej $mn + 1$ úsečiek. Dokážte, že medzi týmito úsečkami existuje $m + 1$ navzájom disjunktných úsečiek alebo $n + 1$ úsečiek, ktoré majú spoločný bod.
b) (4 body) Nech P je ľubovoľným (ale pevným) vnútorným bodom daného pravidelného mnohouholníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Stredy strán $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ označme postupne $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} |PM_i| \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} |PA_i| \, .$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha č. 14:
Trojuholník ABC je ťažnicami rozdelený na šesť menších trojuholníkov. Dokážte, že stredy kružníc opísaných týmto šiestim trojuholníkom ležia na jednej kružnici.

Akadémia a Klub Trojstenu.

Ďalšia časť obľúbenej Akadémie Trojstenu, nasledovanej Klubom Trojstenu, sa uskutoční 16., resp. 17. decembra 2005. Bližšie informácie hľadajte na našej internetovej stránke `www.kms.sk`, pozvánku vám pošleme so vzorovými riešeniami druhej série. Nezabúdajte, že už sa na vás tešíme.

Termín odoslania riešení: **5. decembra 2005** (pre zahraničie 2. decembra 2005)

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `www.kms.sk`