Zadania 1. série letnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Vo svietniku sú dve sviečky, ktoré majú rovnakú výšku. Prvá zhorí za päť hodín a druhá za tri hodiny. Obe sviečky zapálime naraz. Po koľkých minútach bude prvá sviečka trikrát vyššia ako druhá?

Úloha č. 2:
Dve kružnice s polomermi 1 m a 3 m chceme umiestniť v rovine tak, aby spĺňali tieto dve podmienky:

- Existujú dve priamky, ktoré sú na seba kolmé a obe sa dotýkajú obidvoch kružníc.
- Vzdialenosť stredov daných dvoch kružníc je čo najmenšia.

Ako máme tieto kružnice umiestniť? Aká bude vzdialenosť ich stredov a prečo bude najmenšia?

Úloha č. 3:
V trojuholníku ABC označme D a E stredy strán AB a AC.
a) Dokážte, že ak priesečník osí uhlov BDE a CED leží na úsečke BC, tak dĺžka strany BC je rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán AB a AC.
b) Dokážte aj opačné tvrdenie, teda že ak je dĺžka strany BC rovná aritmetickému priemeru dĺžok strán AB a AC, tak priesečník osí uhlov BDE a CED leží na strane BC.

Poznámka: Aritmetický priemer dĺžok strán AB, AC je číslo $(|AB| + |AC|)/2$.

Úloha č. 4:
a) Každý bod roviny je ofarbený niektorou z dvoch farieb. Dokážte, že v tejto rovine existujú dva body rovnakej farby vzdialené od seba presne jeden meter.
b) Keďže máme radšej pestrejší svet, ofarbíme našu rovinu troma farbami. Dokážte, že aj teraz existujú v tejto rovine dva body rovnakej farby vzdialené presne jeden meter.

Úloha č. 5:
Na oslave sa zišlo desať priateľov. Posadali si okolo okrúhleho stola, každý na miesto označené štítkom so svojim menom. Okolo jedenástej hodiny vyšli všetci na chvíľu na terasu a sledovali ohňostroj. Po návrate si každý sadol buď na svoje pôvodné miesto, alebo o jedno miesto vedľa (napravo alebo naľavo). Koľkými rôznymi spôsobmi si mohli posadať okolo stola?

Úloha č. 6:
Nájdite všetky štvorice reálnych čísel a, b, c, d, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a+b &= 8, \\ ab+c+d &= 23, \\ ad+bc &= 28, \\ cd &= 12. \end{aligned}$$

Úloha č. 7:
Rozhodnite, či sa dá štvorec rozdeliť na konečne veľa rovnoramenných nepravouhlých lichobežníkov. Lichobežníky nemusia byť navzájom zhodné. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
V lese býva 2007 trpaslíkov očíslovaných číslami 1 až 2007. Na príkaz Snehulienky sa nejakých 41 z nich postaví do radu tak, aby ich čísla tvorili aritmetickú postupnosť. Snehulienka si všimla, že nech sa trpaslíci postavia do radu hocijako, vždy bude medzi nimi aspoň jeden z jej 90 obľúbených trpaslíkov. Aké čísla majú Snehulienkini obľúbení trpaslíci? Nájdite aspoň jednu možnosť a zdôvodnite, prečo táto skupina trpaslíkov má požadovanú vlastnosť.

Úloha č. 9:
Riešime rovnicu $x^n - y^n = 2^z$ s neznámymi x, y, z v obore prirodzených čísel.
a) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice pre $n = 2$.
b) Zistite, či má táto rovnica riešenie pre nejaké prirodzené číslo $n > 2$. Svoje tvrdenie dokážte.

Úloha č. 10:
Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC taký, že $|\sphericalangle AMC| = 90°$, $|\sphericalangle AMB| = 150°$ a $|\sphericalangle BMC| = 120°$. Označme P, Q, R stredy kružníc opísaných trojuholníkom AMC, AMB a BMC. Dokážte, že obsah trojuholníka ABC je menší než obsah trojuholníkoa PQR.

Úloha č. 11:
Na nekonečnom bielom štvorčekovom papieri je konečný počet štvorčekov zafarbených čiernou farbou. Každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov, opäť susediacich celou stranou.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Nech p, q sú navzájom rôzne prvočísla. Zistite, či existuje funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x)^p$ aj $f(x)^q$ sú polynómy a pritom f nie je polynóm.

Úloha č. 13:
Vo vrcholoch obdĺžnika sú štyri mestá. Chceme postaviť cestnú sieť tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého a pri tom aby táto sieť mala minimálnu dĺžku (t. j. súčet dĺžok jednotlivých úsekov). Ako to máme spraviť?

Úloha č. 14:
Máme pred sebou rad vriec tiahnúci sa na obe strany do nekonečna. V týchto vreciach je nejako rozmiestnený konečný počet zemiakov. V tejto neľahkej situácii môžme robiť dve operácie:
1) Nech A, B, C sú v tomto poradí (zľava doprava) tri susedné vrecia. Zoberieme po jednom zemiaku z vriec A a B a pridáme jeden zemiak do vreca C.
2) Nech A, B, C, D sú v tomto poradí (zľava doprava) štyri susedné vrecia. Zoberieme dva zemiaky z vreca C a pridáme po jednom zemiaku do vriec A a D.
Dokážte, že po istom počte krokov sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme použiť ani jednu operáciu. Zitite, či výsledná situácia závisí od operácií, ktoré sme použili v jednotlivých krokoch.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **26. februára 2007** (pre zahraničie 22. februára 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **1. marca 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`