Zadania 2. série letnej časti KMS 2006/2007

Kategória ALFA

<u>Úloha č. 1:</u>
Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré sú deliteľné číslom 41 a majú presne 41 kladných deliteľov.

<u>Úloha č. 2:</u>
Štvorec so stranou n vyfarbíme tak, že ho rozdelíme na n^2 jednotkových štvorčekov a každý z týchto štvorčekov vyfarbíme práve jednou z farieb červená, zelená alebo modrá. Nájdite najmenšie n také, že pri ľubovoľnom zafarbení štvorca so stranou n vieme nájsť riadok alebo stĺpec obsahujúci aspoň tri štvorčeky rovnakej farby.

<u>Úloha č. 3:</u>
Ajka a Bebe hrajú kartovú hru s balíčkom 32 kariet. Začína Ajka, potom sa hráči na ťahu striedajú. V jednom ťahu môže hráč z balíčka zobrať jednu kartu alebo prvočíselný počet kariet. Prehráva ten, kto nemôže urobiť ťah. Ktorý z hráčov má v tejto hre víťaznú stratégiu? Popíšte ju.

Poznámka: Víťazná stratégia pre hráča je popis, ako má tento hráč ťahať tak, aby určite vždy vyhral bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper. Samozrejme, takáto stratégia môže závisieť od súperovych ťahov. Zvyčajne ťahy víťaznej stratégie popisujeme spôsobom „ak súper potiahne sem, potom urobím takýto ťah, inak…“.

<u>Úloha č. 4:</u>
Máme nejaké podmnožiny množiny $M = \{1, 2, \dots, 12\}$. Vieme o nich, že žiadne dve z nich nemajú rovnaký počet prvkov a žiadna z nich nie je podmnožinou inej. Koľko najviac takých podmnožín môžeme mať?

<u>Úloha č. 5:</u>
Uhol pri vrchole A trojuholníka ABC má 60 stupňov, jeho strana AB má dĺžku 4 cm a strana AC má dĺžku 6 cm. Rozrežte tento trojuholník na tri časti tak, aby sa z nich dal bezo zvyšku a bez prekrývania zložiť pravidelný šesťuholník.

<u>Úloha č. 6:</u>
V rovine máme danú úsečku AB a tiež máme zadanú dĺžku h. Uvažujme všetky možné body C také, že v trojuholníku ABC bude mať výška na stranu AB veľkosť h. Pre ktorý z týchto bodov C je súčin veľkostí výšok trojuholníka ABC najväčší?

<u>Úloha č. 7:</u>
Predstavme si nekonečnú štvorčekovú sieť. Do každého štvorčeka vpíšeme jedno z čísel 1, 2, 3, 4. Toto číslo bude udávať počet rôznych čísel vpísaných do susedných štvorčekov. (Štvorčeky sú susedné práve vtedy, ak majú spoločnú stranu.) Napríklad okolo štvorčeka, v ktorom je napísané číslo 1, musia byť všetky štyri čísla rovnaké. Zistite, či sa dá naša štvorčeková sieť vyplniť tak, aby sme každé z čísel 1, 2, 3, 4 použili aspoň raz.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

<u>Úloha č. 8:</u>
Každý bod trojrozmerného priestoru je zafarbený jednou z piatich farieb. Každá farba je použitá na zafarbenie aspoň jedného bodu. Dokážte, že existujú štyri body navzájom rôznej farby ležiace v jednej rovine.

<u>Úloha č. 9:</u>
Je daný lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Vnútri strany BC leží bod K. Z bodov C, B zostrojme rovnobežky s priamkami KA, KD (v tomto poradí). Dokážte, že sa tieto rovnobežky pretnú na priamke AD.

<u>Úloha č. 10:</u>
Čísla $1, 2, \dots, n$ sú v tomto poradí napísané na obvode kruhu. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla a, b nahradiť číslami $(a + b)/2$, $(a + b)/2$. Je možné dosiahnuť po konečnom počte krokov, aby všetky napísané čísla boli rovnaké?

<u>Úloha č. 11:</u>
Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Označme E, F po rade päty kolmíc z bodu P na priamky AB, CD. Dokážte, že os úsečky EF rozpoľuje úsečky BC a DA.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Rozhodnite, či existuje útvar U, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2, ale nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1. Úlohu riešte pre nasledovné útvary U:
a) pravouholník,
b) mnohouholník,
c) konvexný mnohouholník.

Poznámka: Za úlohy a) a b) je spolu 7 bodov, za úlohu c) body navyše.

Úloha č. 13:
Nech $n \geq 3$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú dané kladné reálne čísla. Označme $x_{n+1} = x_1$ a $x_{n+2} = x_2$. Dokážte, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \qquad \text{alebo} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{n}{2}.$$

Úloha č. 14:
Riešime rovnicu $a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$ v kladných celých číslach.
a) Dokážte, že táto rovnica má aspoň jedno riešenie.
b) Zistite, či má táto rovnica konečne veľa riešení.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. apríla 2007** (pre zahraničie 2. apríla 2007).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **9. apríla 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. www.kms.sk